Università degli Studi di Roma Tor Vergata
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - Test di Analisi Matematica 4

Roma, 28 maggio 2010

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,-y,0)$ attraverso il toro $\mathbf{T}$ ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza contenuta nel piano x,z di centro $(R,0)$ e raggio r, $0<r<R$.

[R.: $-2\pi^2 Rr^2$]

2) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin\dfrac{x}{2}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

[R.: $y(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$]

3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 + 2(x-1)y}{(x-1)^2}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

indicando l'intervallo di esistenza della soluzione.

[R.: $y(x) = -\frac{(x-1)^2}{3x+1}$, $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$]

4) Trovare lo sviluppo di Fourier della funzione f periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x^3$ per $x \in [-\pi,\pi)$, e discuterne la convergenza.

(Sugg.: può essere utile ricordare che gli sviluppi delle funzioni $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ sono, rispettivamente:

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx, \qquad \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.)$$

[R.: $2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{6-\pi^2k^2}{k^3}\sin kx$]

5) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}\frac{n^2 x}{1+n^2|x|}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$