

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Analisi Matematica 4

7 marzo 2011

Gli studenti del nuovo ordinamento e quelli del vecchio ordinamento che seguono il nuovo programma devono svolgere gli esercizi da 1) a 5), mentre quelli del vecchio ordinamento che seguono il vecchio programma gli esercizi da 1) a 3) e poi gli esercizi 6) e 7).

- 1) Calcolare l'area della porzione di cilindro di equazione

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

contenuta nella sfera di centro l'origine e raggio $2r$

- 2) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4 \cos 2x, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- 4) Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 2 - e^{-x} & \text{per } x \in [-\pi, 0), \\ e^x & \text{per } x \in [0, \pi), \end{cases}$$

prolungata per 2π -periodicità, e discuterne la convergenza.

- 5) Sia $P([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) := \{p : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ è un polinomio}\}$. Si dimostri che $P([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ con la norma della convergenza uniforme

$$\|p\|_\infty := \sup_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |p(x)|$$

non è uno spazio di Banach. (Suggerimento: ricordare che $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.)

- 6) Si verifichi che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{e^{x-y}[(x-1)dx - x dy]}{x^2}$$

è integrabile nel semipiano $x > 0$ e se ne calcoli la primitiva u tale che $u(1, 1) = 1$.

- 7) Si calcolino le coordinate del baricentro del dominio piano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 \leq y \leq 1\}.$$