Università degli Studi di Roma Tor Vergata
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Analisi Matematica 4
8 settembre 2010

Gli studenti del nuovo ordinamento e quelli del vecchio ordinamento che seguono il nuovo programma devono svolgere gli esercizi da 1) a 5), mentre quelli del vecchio ordinamento che seguono il vecchio programma gli esercizi da 1) a 3) e poi gli esercizi 6) e 7).

1) Sia S la superficie grafico della funzione $z = x^2 + y^2$ di dominio il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$. Si calcoli il flusso, attraverso S, del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

2) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (x + y)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{per } x \in (0, 1/\sqrt[n]{\pi}), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

5) Determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x - 2)(x^2 + 1)}$$

e discuterne la convergenza.

6) Si verifichi che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (4x + 2y)\, dx + (2x - 6y)\, dy$$

è integrabile nel piano e se ne calcoli una primitiva.

7) Si calcoli l'integrale doppio della funzione $f(x, y) = x$ esteso al triangolo di vertici $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 1)$.