

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Analisi Matematica 4

8 luglio 2010

Gli studenti del nuovo ordinamento e quelli del vecchio ordinamento che seguono il nuovo programma devono svolgere gli esercizi da 1) a 5), mentre quelli del vecchio ordinamento che seguono il vecchio programma gli esercizi da 1) a 3) e poi gli esercizi 6) e 7).

1) Sia  $S$  la superficie torica di raggi 1 e 2, quindi di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (2 + \sin u) \cos v \\ y = (2 + \sin u) \sin v \\ z = \cos u \end{cases} \quad u, v \in [-\pi, \pi].$$

Se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, supponendo uguale ad 1 la densità di massa.

2) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + y = -2 \sin x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - 3y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{\log(x^{2n})}{n+1}, \quad x \neq 0.$$

5) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2 x}{n+x^2}\right).$$

6) Si verifichi che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{\sin y \, dx - x \cos y \, dy}{x^2}$$

è integrabile nel semipiano  $x > 0$  e se ne calcoli una primitiva.

7) Si calcoli il baricentro della parte dell'ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 \leq 1$$

contenuta nel primo quadrante.