Analisi Matematica 4

A.A. 2008/2009, 2^o Appello

Prof. Claudio D'Antoni

13 Luglio 2009

1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \arctan(x^2 - 1) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

(i) Discutere l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni al variare $\alpha \in \mathbb{R}$, e provare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Trovare inoltre le soluzioni di equilibrio.

(ii) Sia x_α la soluzione massimale tale che $x_\alpha(0) = \alpha$. Studiare le monotonia di x_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Studiare i limiti $\lim_{t\to\pm\infty} x_\alpha(t)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Utilizzare il criterio dell'asintoto: sia $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)$ esiste finito. Se $\lim_{t\to\pm\infty} f'(t)$ esiste, allora $\lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$.

2. Sia

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

calcolare $\int_\gamma \omega$ con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove

- $\gamma_1 = (2 + \cos(t),\ \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$;
- γ_2 é il segmento da $(-1, 0)$ a $(0, -1/2)$;
- γ_3 é il segmento da $(0, -1/2)$ a $(1, 0)$.

3. Calcolare il flusso del campo

$$\underline{V} = \left(x^3, y^3, z^3\right)$$

uscente dalla superficie

$$S = \left\{ (x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}\ .$$

Usare il teorema della divergenza.