Analisi Matematica 4

A.A. 2008/2009, 1^o Appello

Prof. Claudio D'Antoni

15 Giugno 2009

1. Sia $(x(t,u,v),\, y(t,u,v))$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = y & x(0) = u \\ \dot{y} = x & y(0) = v \end{cases}$$

Si consideri $\forall t > 0$ l'applicazione $T_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita

$$T_t(u,v) = (x(t,u,v),\, y(t,u,v)) \ .$$

Si provi che $\forall t$

(i) T_t é iniettiva, suriettiva e C^1;

(ii) $m(T_t(A)) = m(A)$ per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile secondo Peano-Jordan.

2. Sia

$$\omega = \left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x - \left(\frac{2y}{x} - 3\right) \mathrm{d}y$$

(i) Si verifichi che ω é esatta nel suo dominio.

(ii) Si determini una primitiva di ω.

(iii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = (e^{(\sin(t))^2},\, \ln(2 - \cos(t))\,)$ con $t \in [0, \pi/2]$.

3. Sia

$$S = \left\{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, |z| \le 1\right\} \ .$$

Si calcoli il flusso del campo

$$\underline{V} = \left(x(1+2y),\, y^2,\, z^2 - z^3 - z\right)$$

uscente da S. Usare il teorema della divergenza.