Secondo esonero del corso

Calcolo I - Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

a.a. 2008-09

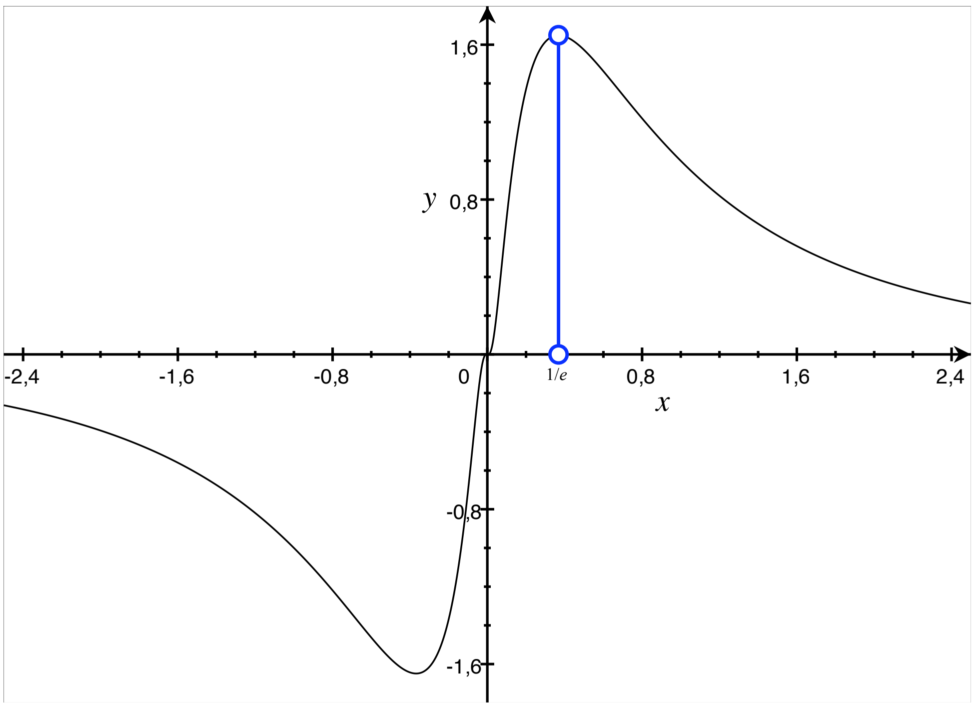
16 gennaio 2009

Compito A

1. Studiare la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{\log^2 |x|}{2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
determinandone in particolare gli insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali massimi e minimi e disegnarne il grafico. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda.)

Soluzione. Per definizione, il dominio di f è tutto l'asse reale $\mathbb{R}$. Inoltre f è sicuramente continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. È anche chiaro che f è dispari, quindi ci possiamo limitare a studiarla per $x \geq 0$. Si ha poi:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\log x \left(\frac{\log x}{2} + 1 \right)} = 0 = f(0),$$
per cui $f \in C^0(\mathbb{R})$ e non ci sono asintoti verticali. L'asse x è invece un asintoto orizzontale, in quanto chiaramente:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{\log^2 |x|}{2}} = 0.$$
Si ha poi, per $x > 0$,
$$f'(x) = -\frac{1 + \log x}{x^2} e^{-\frac{\log^2 x}{2}},$$
e dunque
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f'(x) &= (t = \log x) = -\lim_{t \to -\infty} \frac{t+1}{e^{t^2/2 + 2t}} \\ &= (\text{de L'Hôpital}) = -\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{(t+2) e^{t^2 + 2t}} = 0, \end{aligned}$$

da cui segue che $\exists f'(0) = 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre chiaramente $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x < -1$ cioè se e solo se $x < e^{-1}$, per cui la funzione ha un unico massimo relativo per $x = e^{-1}$ (e quindi, per disparità, un minimo relativo per $x = -e^{-1}$) e si ha $f(e^{-1}) = \sqrt{e}$. Il grafico di f è mostrato nella figura di sotto.



2. Calcolare il limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}.$$

Soluzione. Ricordando gli sviluppi di MacLaurin:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
\log(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sqrt{1 + x} &= 1 + \frac{x}{2} + o(x)
\end{aligned}$$

si ha che il limite richiesto è uguale a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)\right)-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)\right)^2-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=-\frac{4}{3}.$$

3. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}$$

Soluzione. Effettuando la sostituzione $t=\tan\frac{x}{2}$, che implica $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$, l'integrale richiesto si riduce a

$$2\int\frac{dt}{5(1+t^2)-3(1-t^2)}=\int\frac{dt}{1+4t^2}$$
$$=\frac{1}{2}\arctan(2t)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+c.$$