Prova scritta del corso di Calcolo I

Corsi di Laurea in Scienza dei Materiali e Fisica dell'Atmosfera

a.a. 2008-09

21 gennaio 2009

1. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}(x^2-x+3)^n}.$$

Soluzione. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n-1}\,|x^2-x+3|^n}{\sqrt{(n+1)^2+n}\,|x^2-x+3|^{n+1}} = \frac{1}{|x^2-x+3|},$$

e dunque, in base al criterio del rapporto, la serie data converge assolutamente se $|x^2-x+3| > 1$, cioè se $x^2-x+2 > 0$ o se $x^2-x+4 < 0$. La prima di queste disequazioni è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e la seconda non è verificata per nessun valore di x), e dunque la serie data converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Studiare la funzione:

$$f(x) = 2 + xe^{-\frac{1}{x}},$$

determinandone in particolare gli insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi, intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi e disegnarne il grafico.

Soluzione. L'insieme di definizione della funzione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e chiaramente $f \in C^1(D)$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = (t = -1/x) = \lim_{t\to+\infty} 2 - \frac{e^t}{t} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,$$

e dunque l'asse y è un asintoto verticale per $x \to 0^-$. Inoltre:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} + e^{-\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = (t = 1/x) = \lim_{t\to 0^\pm} 2 + \frac{e^{-t} - 1}{t} = 1,$$

e dunque la retta $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Il calcolo della derivata prima porge:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x \neq 0,$$

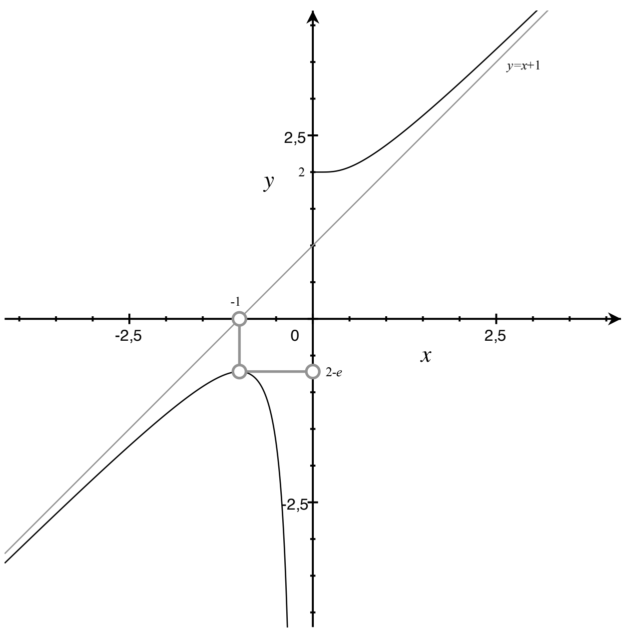
e pertanto $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 0)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, .1) \cup (0, +\infty)$, e $x = -1$ è un punto di massimo relativo, per il quale $f(-1) = 2 - e$. Si ha anche

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0$$

quindi la tangente al grafico di f in $x = 0$ è orizzontale. La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}, \qquad x \neq 0,$$

e quindi il grafico di f rivolge la concavità verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x > 0$. Il grafico di f è quello mostrato in figura.



3. Discutere, al variare di $s \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \, dx}{x^s \sqrt{1+x^4}}.$$

Soluzione. In base al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si ha:

$$\frac{\sin^2 x}{x^s \sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{s-2}} \qquad \text{per } x \to 0^+,$$

e dunque l'integrale considerato converge in un intorno di $x = 0$ se e solo se $s < 3$. Inoltre si ha

$$\frac{\sin^2 x}{x^s \sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{x^s \sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{s+2}} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e si ha pertanto convergenza all'infinito se $s > -1$. Se d'altra parte $s \leq -1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{x^{-s} \sin^2 x \, dx}{\sqrt{1+x^4}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{dx}{x} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k+3} = +\infty,
\end{aligned}$$

e quindi l'integrale considerato diverge all'infinito. Si conclude che l'integrale converge se e solo se $-1 < s < 3$.