Prova scritta del corso di Calcolo I

Corsi di Laurea in Scienza dei Materiali e Fisica dell'Atmosfera

a.a. 2008-09

8 giugno 2009

1. Utilizzando opportunamente gli sviluppi di Taylor calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

con un errore minore di 10^{-2}.

Soluzione. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha lo sviluppo di Taylor con resto in forma di Lagrange:

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi_x)^n} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

dove $\xi_x \in (0,x)$. Si ottiene pertanto la diseguaglianza

$$\left| \frac{\log(1+x)}{x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{x^n}{n+1}, \qquad \forall x \in [0,1],$$

e di conseguenza, essendo $\int_0^1 x^{k-1}/k \, dx = 1/k^2$,

$$\left| \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pertanto la determinazione dell'integrale dato, con l'approssimazione richiesta, si ottiene prendendo $n = 9$, cioè

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx \simeq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{81} (\simeq 0,83).$$

2. Studiare la funzione:
$$f(x) = \arcsin |e^{2x} - 1|,$$
determinandone in particolare gli insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi, intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi e disegnarne il grafico.

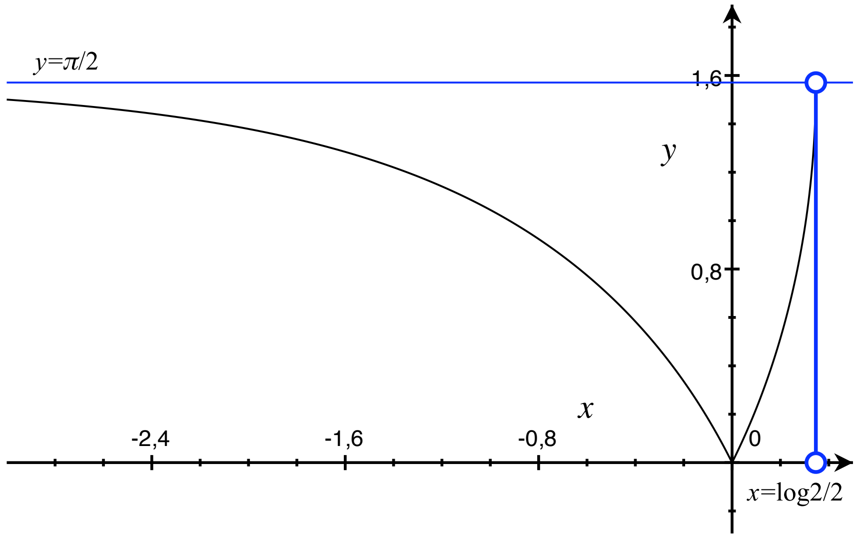
Soluzione. La funzione $t \mapsto \arcsin t$ è definita e continua per $t \in [-1, 1]$ e quindi l'insieme di definizione di f è
$$D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le |e^{2x} - 1| \le 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le e^{2x} - 1 \le 1\} = \left(-\infty, \frac{\log 2}{2}\right],$$
ed f è continua in D. Inoltre, essendo $e^{2x} - 1 = 0 \iff x = 0$, ed essendo $t \mapsto \arcsin t$ derivabile per $t \in (-1, 1)$, f è certamente derivabile in $D \setminus \{0, \frac{\log 2}{2}\}$.

Si ha poi
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\log 2}{2}\right),$$
e dunque la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per f, e non ci sono asintoti verticali ed obliqui.

Calcolando la derivata prima di f si ottiene
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-(e^{2x}-1)^2}} & \text{se } x \in \left(0, \frac{\log 2}{2}\right], \\ -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-(e^{2x}-1)^2}} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
da cui si deduce che, essendo $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm 2$, $x = 0$ è un punto angoloso per il grafico di f (e quindi f non è derivabile per $x = 0$) e che inoltre f è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, \frac{\log 2}{2})$, e pertanto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per f in cui però f' non si annulla (non è nemmeno definita). Si noti anche che
$$\lim_{x \to \left(\frac{\log 2}{2}\right)^-} f'(x) = +\infty,$$
e quindi il grafico di f ha tangente verticale in $x = \frac{\log 2}{2}$.

Infine la derivata seconda di f è data da
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4e^{4x}}{(1-(e^{2x}-1)^2)^{3/2}} & \text{se } x \in \left(0, \frac{\log 2}{2}\right], \\ -\frac{4e^{4x}}{(1-(e^{2x}-1)^2)^{3/2}} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
e quindi il grafico di f rivolge la concavità verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x \in \left(0, \frac{\log 2}{2}\right]$, e non possiede punti di flesso.

Il grafico di f è quello mostrato nella figura seguente.



3. Discutere, al variare di $s \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan\left(\frac{x^s}{x^2+1}\right) dx.$$

Soluzione. Avendosi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^s}{x^2+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } s>0, \\ 1 & \text{se } s=0, \\ +\infty & \text{se } s<0, \end{cases}$$

ed essendo $\arctan t \sim t$ per $t \to 0$ e $\arctan t \to \pi/2$ per $t \to +\infty$, si hanno gli andamenti asintotici per $x \to 0^+$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan\left(\frac{x^s}{x^2+1}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2-s}} & \text{se } s>0, \\ \frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } s \le 0, \end{cases}$$

e dunque essendo $1/2 - s < 1$ per $s > 0$, l'integrale considerato è convergente, nell'intorno di $x = 0$, per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Similmente valgono gli andamenti asintotici per $x \to +\infty$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan\left(\frac{x^s}{x^2+1}\right) \sim \begin{cases} 1 & \text{se } s \ge 2, \\ \frac{1}{x^{2-s}} & \text{se } s<2, \end{cases}$$

e quindi l'integrale dato è convergente se e solo se $s < 1$.