

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 16/2/2026

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [10 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - b^2|} e^{\frac{b}{x-b}} \quad \left[f(x) = \sqrt{|x^2 - b^2|} e^{-\frac{b}{x+b}} \right]$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[b = 2, 3]$

Svolgimento. Studiamo la prima funzione. Il grafico della seconda si ottiene da questa per riflessione rispetto all'asse y .

Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{b\}$, ed f è continua in D . Chiaramente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = -b$, che sarà quindi il minimo assoluto di f . Il grafico di f non presenta simmetrie evidenti.

Si ha, in base alle gerarchie di infiniti e infinitesimi,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty,$$

e dunque la retta di equazione $x = b$ è un asintoto verticale destro per il grafico di f . Per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \pm x \sqrt{1 - \frac{b^2}{x^2}} e^{\frac{b}{x} + o(\frac{1}{x})} = \pm x \left(1 - \frac{b^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \left(1 + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= \pm(x + b) + o(1), \end{aligned}$$

e pertanto le rette di equazione $y = \pm(x + b)$ sono asintoti obliqui per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per $x \in D \setminus \{-b\}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{|x^2 - b^2|}} \operatorname{sgn}(x^2 - b^2) - \frac{b}{(x - b)^2} \sqrt{|x^2 - b^2|} \right) e^{\frac{b}{x-b}} \\ &= \operatorname{sgn}(x^2 - b^2) \frac{e^{\frac{b}{x-b}}}{\sqrt{|x^2 - b^2|}} \frac{x^2 - 2bx - b^2}{x - b}. \end{aligned}$$

da cui segue, per $x \rightarrow -b^\pm$,

$$f'(x) = \mp \frac{e^{\frac{b}{x-b}}}{\sqrt{|x^2 - b^2|}} \frac{x^2 - 2bx - b^2}{x - b} \sim \pm \frac{1}{\sqrt{|x^2 - b^2|}} b e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \pm\infty,$$

e pertanto $x = -b$ è un punto di cuspidi per il grafico di f . Inoltre

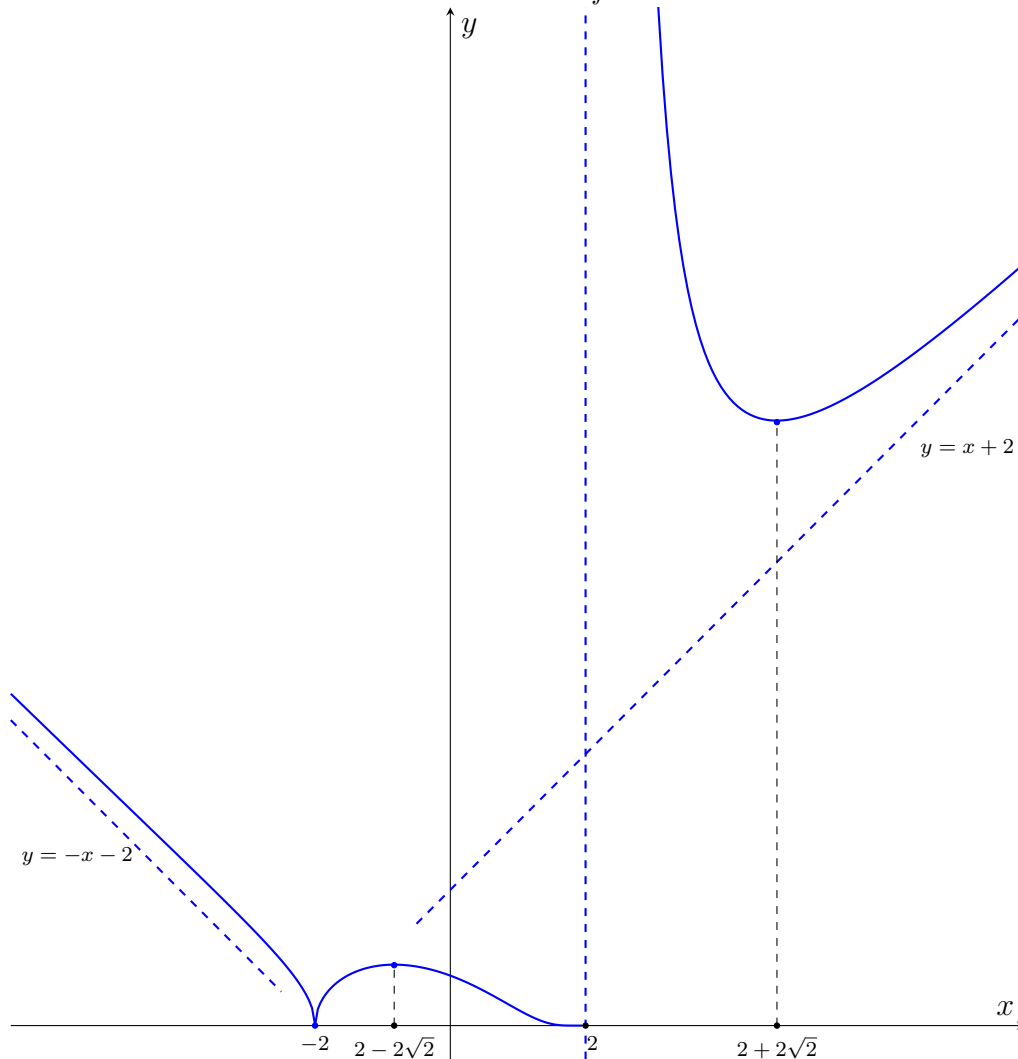
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = 0.$$

Avendosi

$$x^2 - 2bx - b^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < (1 - \sqrt{2})b \text{ o } x > (1 + \sqrt{2})b,$$

e tenendo conto del segno dei fattori $x - b$ e $\text{sgn}(x^2 - b^2)$ di f' , si vede che f è decrescente in $(-\infty, -b)$, crescente in $(-b, (1 - \sqrt{2})b)$, decrescente in $((1 - \sqrt{2})b, b)$ e in $(b, (1 + \sqrt{2})b)$ e infine crescente in $((1 + \sqrt{2})b, +\infty)$. Dunque come già osservato $x = -b$ è il minimo assoluto della funzione, $x = (1 - \sqrt{2})b$ è un massimo relativo, ma non assoluto (in quanto $\sup_D f = +\infty$ come visto), e $x = (1 + \sqrt{2})b$ è un minimo relativo ma non assoluto, in quanto $f((1 + \sqrt{2})b) > 0$.

FIGURA 1. Grafico di f con $b = 2$.



Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \log \left(\frac{1 + \sin x}{a - \sin x} \right) dx. \quad \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \log \left(\frac{a - \sin x}{1 + \sin x} \right) dx. \right]$$

$$[a = 3, 2]$$

Svolgimento. Svolgiamo il primo integrale. Il secondo si ottiene cambiando il segno. Facendo il cambiamento di variabile $t = \sin x$ e integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \log \left(\frac{1 + \sin x}{a - \sin x} \right) dx &= \int_0^1 (1 - t^2) \log \left(\frac{1 + t}{a - t} \right) dt \\ &= \left[\left(t - \frac{1}{3}t^3 \right) \log \left(\frac{1 + t}{a - t} \right) \right]_0^1 - \frac{1}{3}(a + 1) \int_0^1 \frac{3t - t^3}{(t + 1)(a - t)} dt. \end{aligned}$$

La funzione razionale dell'ultimo integrale non è propria. Eseguendo la divisione tra polinomi si trova allora

$$\frac{3t - t^3}{(t + 1)(a - t)} = t + a - 1 + \frac{(3 - (a - 1)^2 - a)t - a(a - 1)}{(t + 1)(a - t)},$$

e si può poi scomporre la funzione razionale propria al membro di destra in fratti semplici:

$$\frac{(3 - (a - 1)^2 - a)t - a(a - 1)}{(t + 1)(a - t)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - a},$$

con

$$\begin{aligned} A &= \frac{(3 - (a - 1)^2 - a)t - a(a - 1)}{a - t} \Big|_{t=-1} = -\frac{2}{a + 1}, \\ B &= -\frac{(3 - (a - 1)^2 - a)t - a(a - 1)}{t + 1} \Big|_{t=a} = \frac{a^3 - 3a}{a + 1}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{3t - t^3}{(t + 1)(a - t)} dt &= \int \left[t + a - 1 + \frac{1}{a + 1} \left(\frac{a^3 - 3a}{t - a} - \frac{2}{t + 1} \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 + (a - 1)t + \frac{1}{a + 1} ((a^3 - 3a) \log |t - a| - 2 \log |t + 1|) + c. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto è pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \log \left(\frac{1 + \sin x}{a - \sin x} \right) dx &= \left[\left(t - \frac{1}{3}t^3 \right) \log \left(\frac{1 + t}{a - t} \right) - \frac{1}{6}(a + 1)t^2 - \frac{1}{3}(a^2 - 1)t \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \log |t + 1| - \frac{1}{3}(a^3 - 3a) \log |t - a| \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \log \frac{4}{a - 1} - \frac{1}{6}(a + 1) - \frac{1}{3}(a^2 - 1) + \frac{1}{3}(a^3 - 3a) \log \frac{a}{a - 1}. \end{aligned}$$

Nelle diverse versioni:

$$I = \begin{cases} \frac{2}{3} \log 2 + 6 \log \frac{3}{2} - \frac{10}{3} & A, \\ -\frac{2}{3} \log 2 - 6 \log \frac{3}{2} + \frac{10}{3} & B, \\ \frac{2}{3} \log 8 - \frac{3}{2} & C, \\ -\frac{2}{3} \log 8 + \frac{3}{2} & D. \end{cases}$$

Metodo alternativo. Dopo la sostituzione, si ottiene

$$\int_0^1 (1-t^2) \log \left(\frac{1+t}{a-t} \right) dt = \int_0^1 (1-t^2) \log(1+t) dt - \int_0^1 (1-t^2) \log(a-t) dt,$$

e i due integrali si calcolano integrando per parti, il che dà luogo agli integrali di due funzioni razionali non proprie, ma con denominatori che hanno una sola radice reale.

Esercizio 3. [7 punti] Determinare il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$ e di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = (1 + ax + \cos x)^{bx}.$$

$$[(a, b) = (2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)]$$

Svolgimento. Si ha

$$(1 + ax + \cos x)^{bx} = e^{bx \log(1 + ax + \cos x)},$$

e grazie al fattore bx , è sufficiente sviluppare $\log(1 + ax + \cos x)$ a meno di termini $o(x^2)$. Grazie allora agli sviluppi $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ e $\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \log(1 + ax + \cos x) &= \log\left(2 + ax - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)^2 \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}(2 + a^2)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Di conseguenza, usando lo sviluppo $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$ per $y \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} (1 + ax + \cos x)^{bx} &= e^{(\log 2)bx + \frac{1}{2}abx^2 - \frac{1}{8}(2 + a^2)bx^2 + o(x^3)} \\ &= 1 + (\log 2)bx + \frac{1}{2}abx^2 - \frac{1}{8}(2 + a^2)bx^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}\left((\log 2)bx + \frac{1}{2}abx^2 - \frac{1}{8}(2 + a^2)bx^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left((\log 2)bx + \frac{1}{2}abx^2 - \frac{1}{8}(2 + a^2)bx^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + (\log 2)bx + \frac{1}{2}abx^2 - \frac{1}{8}(2 + a^2)bx^3 + \frac{\log^2 2}{2}b^2x^2 + \frac{\log 2}{2}ab^2x^3 + \frac{\log^3 2}{6}b^3x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + (\log 2)bx + \frac{b}{2}(a + (\log^2 2)b)x^2 - \frac{b}{24}[6 + 3a^2 - 12(\log 2)ab - 4(\log^3 2)b^2]x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Per l'unicità nel teorema di Peano, il polinomio di MacLaurin richiesto è dunque

$$T_3(x) = 1 + (\log 2)bx + \frac{b}{2}(a + (\log^2 2)b)x^2 - \frac{b}{24}[6 + 3a^2 - 12(\log 2)ab - 4(\log^3 2)b^2]x^3.$$

Esercizio 4. [8 punti] Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ sono convergenti gli integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{x^a}{(|\sin x|^b + x^c)^\alpha |\log(\frac{1}{2}x(1+x))|^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{(|\sin x|^b + x^c)^\alpha |\log(\frac{1}{2}x(1+x))|^\alpha} dx.$$

$$[(a, b, c) = (2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}), (\frac{3}{2}, 2, 3), (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{1}{2}, 1, 2)]$$

Svolgimento. Chiaramente bisogna studiare il comportamento della funzione integranda f per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre poiché

$$\log\left(\frac{1}{2}x(1+x)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(1+x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, 1,$$

bisogna anche studiare f per $x \rightarrow 1$.

Per $x \rightarrow 0$ si ha chiaramente, essendo $\sin x = x + o(x)$ e $b < c$,

$$|\sin x|^b + x^c = x^b(1 + o(1)) + x^c = x^b(1 + o(1)) \sim x^b,$$

$$\log\left(\frac{1}{2}x(1+x)\right) = \log x + \log(1+x) - \log 2 \sim \log x,$$

e pertanto

$$f(x) \sim \frac{x^a}{x^{ab} |\log x|^\alpha} = \frac{1}{x^{ab-a} |\log x|^\alpha},$$

da cui segue che f è impropriamente integrabile per $x \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha \leq \frac{1+a}{b}$ (si noti che $\frac{1+a}{b} > 1$).

Per $x \rightarrow 1$, facendo il cambiamento di variabile $y = x - 1$ si ha

$$\log\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right) = \log\left(1 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2\right) = \frac{3}{2}y + o(y) \sim \frac{3}{2}(x-1),$$

da cui

$$f(x) \sim \frac{2^\alpha}{3^\alpha (\sin^b 1 + 1)^\alpha} \frac{1}{|x-1|^\alpha}$$

e pertanto f è impropriamente integrabile per $x \rightarrow 1$ se e solo se $\alpha < 1$.

Infine per $x \rightarrow +\infty$ si ottiene, tenendo conto della limitatezza di $\sin x$,

$$|\sin x|^b + x^c = x^c(1 + o(1)) \sim x^c, \quad \log\left(\frac{1}{2}x(1+x)\right) = \log x + \log(1+x) - \log 2 \sim 2 \log x,$$

e quindi

$$f(x) \sim \frac{x^a}{2^\alpha x^{ac} |\log x|^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{x^{ac-a} |\log x|^\alpha},$$

e di conseguenza f è impropriamente integrabile per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se $\alpha > \frac{1+a}{c}$ (si noti che $\frac{1+a}{c} < 1$).

Si conclude che il primo integrale improprio considerato è convergente se e solo se $\alpha < 1$ e il secondo se e solo se $\frac{1+a}{c} < \alpha < 1$.