

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x-a|}{x-a-1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

$$[a = (2, 3, 4, 5)]$$

Esercizio 2. [6 punti] Siano $a \in \mathbb{R}$ e

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < a \\ x(x-2) & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

- (i) Determinare gli insiemi immagine $f((-\infty, a))$ e $f([a, +\infty))$.
- (ii) Per quali valori di a f è iniettiva in \mathbb{R} ?
- (iii) Per quali valori di a f è suriettiva in \mathbb{R} ?
- (iv) Per quali valori di a f è biiettiva in \mathbb{R} ?

Altre versioni ($[B, C, D]$):

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x > a \\ x(x+2) & \text{se } x \leq a, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < a \\ x(2-x) & \text{se } x \geq a, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > a \\ -x(x+2) & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :

$$(z + ia)^3 - ia = 0$$

$$[a = 8, 27, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}]$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n}{\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2 \cos(\frac{1}{n^2})}.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Esercizio 5. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\beta = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \left(\frac{ax}{1-ax} \right)^{\frac{\beta}{a}} dx.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x-a|}{x-a-1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

$$[a = (2, 3, 4, 5)]$$

Svolgimento: Dominio di f : $\{x \neq a + 1\}$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow (a+1)^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (a+1)^+} f(x) = +\infty.$$

$x = a + 1$ asintoto verticale (destra)

Inoltre si noti che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{a-x}{x-a-1}} = xe^{-1}e^{\frac{-1}{x-a-1}} & x < a \\ xe^{\frac{x-a}{x-a-1}} = xee^{\frac{1}{x-a-1}} & x \geq a \end{cases}$$

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = xee^{\frac{x-a}{x-a-1}} = xee^{\frac{1}{x-a-1}} = xe\left(1 + \frac{1}{x-a-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = xe + e + o(1)$$

Pertanto $f(x) \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$ e $y = e(x+1)$ è l'equazione dell'asintoto obliquo a $+\infty$

Analogamente, per $x \rightarrow -\infty$, si ha

$$f(x) = xe^{\frac{a-x}{x-a-1}} = xe^{-1}e^{\frac{-1}{x-a-1}} = xe^{-1}\left(1 - \frac{1}{x-a-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = xe^{-1} - e^{-1} + o(1)$$

Pertanto $f(x) \rightarrow -\infty$ se $x \rightarrow -\infty$ e $y = e^{-1}(x-1)$ è l'equazione dell'asintoto obliquo a $-\infty$

Risulta: $f \geq 0$ se $x \geq 0$, $x \neq a + 1$ e $f < 0$ se $x < 0$

Risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{a-x}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2} (x^2 - (2a+1)x + (a+1)^2) & x < a \\ \frac{e^{\frac{x-a}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2} (x^2 - (2a+3)x + (a+1)^2) & x > a, x \neq a+1 \end{cases}$$

In $x = a$ f non è derivabile per il teorema del valor medio poiché

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = 1 - a \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = 1 + a$$

Quindi $x = a$ è un punto angoloso

Inoltre $f'(x) > 0$ per $x < a$, quindi f è crescente in $(-\infty, a)$

Mentre per $x > a$, $x \neq a + 1$, il segno di f' coincide con il segno di $x^2 - (2a+3)x + (a+1)^2$.

Si osservi che le radici del polinomio di secondo grado sono $x_{\pm} = \frac{2a+3 \pm \sqrt{4a+5}}{2}$ e verificano $x_- < a < a+1 < x_+$. Quindi,

f è decrescente in $(a, a+1)$ | f è decrescente in $(a+1, x_+)$ | f è crescente in $(x_+, +\infty)$

$x = a$ è punto di massimo relativo | mentre $x = x_+$ è punto di minimo relativo

Inoltre, $\lim_{x \rightarrow (a+1)^-} f'(x) = 0$

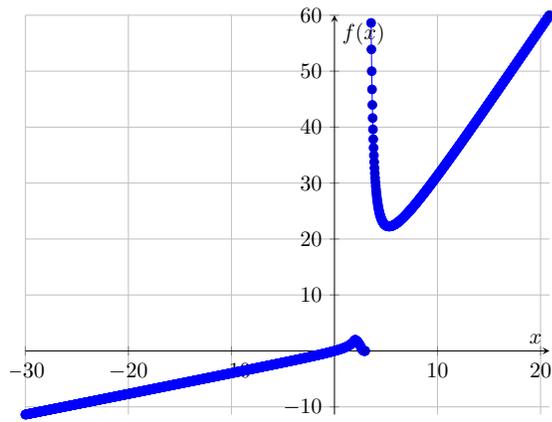


FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

Esercizio 2. [6 punti] Siano $a \in \mathbb{R}$ e

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < a \\ x(x - 2) & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

- (i) Determinare gli insiemi immagine $f((-\infty, a))$ e $f([a, +\infty))$.
- (ii) Per quali valori di a f è iniettiva in \mathbb{R} ?
- (iii) Per quali valori di a f è suriettiva in \mathbb{R} ?
- (iv) Per quali valori di a f è biiettiva in \mathbb{R} ?

Altre versioni ($[B, C, D]$):

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x > a \\ x(x + 2) & \text{se } x \leq a, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < a \\ x(2 - x) & \text{se } x \geq a, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > a \\ -x(x + 2) & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$

Svolgimento: (nel caso della versione $[A]$).

Si noti che f è convessa in $[a, +\infty)$ e che

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a - 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = a(a - 2), \quad f'_-(a) = 1, \quad f'_+(a) = 2(a - 1).$$

Inoltre $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

$$(i) \quad f((-\infty, a)) = (-\infty, a - 1) \text{ e } f([a, +\infty)) = [\min_{[a, +\infty)} f, +\infty) = \begin{cases} [-1, +\infty) & \text{se } a \leq 1 \\ [a(a - 2), +\infty) & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

- (ii) Si noti che f è iniettiva in $(-\infty, a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e che f è iniettiva in $[a, +\infty)$ se e solo se $a \geq 1$. Perciò f è iniettiva in \mathbb{R} se e solo se $a \geq 1$ e $f((-\infty, a)) \cap f([a, +\infty)) = \emptyset$, ovvero se e solo se $a \geq 1$ e, per il punto (i), $a - 1 \leq a(a - 2) = a^2 - 2a$ ($\Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 \geq 0$), ovvero se e solo se

$$a \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

- (iii) Per il punto (i), f è suriettiva in \mathbb{R} se e solo se

$$\begin{cases} a - 1 \geq -1 & \text{se } a \leq 1 \\ a - 1 \geq a(a - 2) = a^2 - 2a & \text{se } a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

- (iv) f è biiettiva in \mathbb{R} se e solo se è iniettiva e suriettiva, ovvero se e solo se $a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :

$$(z + ia)^3 - ia = 0$$

$$[a = 8, 27, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}]$$

Svolgimento: L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$(z + ia)^3 = ia$$

Ponendo $w := z + ia$, si ha $w^3 = ia$. Ed essendo $ia = ae^{\frac{i\pi}{2}}$, ponendo $w = \rho e^{i\theta}$, si ha $\rho = a^{\frac{1}{3}}$ e $3i\theta = \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$ con $k = 0, 1, 2$. Quindi si ottiene $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ e le soluzioni dell'equazione $w^3 = ia$ sono

$$w_1 = a^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$w_2 = a^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$w_3 = a^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{-\pi}{2}} = -a^{\frac{1}{3}}i$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione $(z + ia)^3 - ia = 0$ sono

$$z_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - ia$$

$$z_2 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - ia$$

$$z_3 = -a^{\frac{1}{3}}i - ia$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^8} e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n}{\sqrt{a^2 n^4 - a^2} - an^2 \cos(\frac{1}{n^2})}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Si ha al numeratore: $\log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n = \log n(1 + \frac{a^2}{n^5}) - \log n = \log(1 + \frac{a^2}{n^5}) = \frac{a^2}{n^5}(1 + o(1))$.
D'altra parte $\frac{1}{n^8} e^{-n^2} = o(\frac{1}{n^6})$ e $\frac{\sin n}{n!} = o(\frac{1}{n^6})$. Pertanto il numeratore

$$\frac{1}{n^8} e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n = \frac{a^2}{n^5}(1 + o(1))$$

Al denominatore, il termine

$$\sqrt{a^2 n^4 - a^2} = an^2(1 - \frac{1}{n^4})^{\frac{1}{2}} = an^2 \left(1 - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{8n^8} + o(\frac{1}{n^8})\right) = an^2 - \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{8n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

Mentre

$$-an^2 \cos(\frac{1}{n^2}) = -an^2(1 - \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{24n^8} + o(\frac{1}{n^8})) = -an^2 + \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{24n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

Pertanto il denominatore si comporta come

$$\sqrt{a^2 n^4 - a^2} - an^2 \cos(\frac{1}{n^2}) = -\frac{a}{6} \frac{1}{n^6}(1 + o(1))$$

Pertanto il limite vale:

$$-6a$$

Esercizio 5. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\beta = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \left(\frac{ax}{1-ax} \right)^{\frac{\beta}{a}} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Poiché $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione potrebbe essere illimitata sia per $x \rightarrow 0^+$ che per $x \rightarrow \frac{1}{a}^-$. Per $x \rightarrow 0^+$, $\left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} \sim Cx^{\frac{\beta}{a}}$ per qualche costante $C > 0$ pertanto la funzione è integrabile vicino a zero se $\frac{\beta}{a} > -1$.

Per $x \rightarrow \frac{1}{a}^-$ invece

$$\left(\frac{ax}{1-ax} \right)^{\frac{\beta}{a}} \sim \frac{C}{(1-ax)^{\frac{\beta}{a}}}$$

Quindi la funzione è integrabile vicino a $\frac{1}{a}$ se $\frac{\beta}{a} < 1$. Perciò l'integrale è finito se e solo se $|\beta| < a$. Calcoliamo l'integrale per $\beta = \frac{a}{2}$, cioè:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx.$$

Ponendo $t = \sqrt{\frac{ax}{1-ax}}$ si ha $x = \frac{t^2}{a(1+t^2)}$ e $dx = \frac{2t}{a(1+t^2)^2} dt$ Inoltre per $x = 0 \Rightarrow t = 0$ mentre per $x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = +\infty$ Perciò otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Poiché $\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, integrando per parti si ha:

$$\frac{1}{a} \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \frac{-t}{1+t^2} + \frac{1}{a} \arctan t + C$$

pertanto

$$\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\omega}{1+\omega^2} + \arctan \omega \right) = \frac{\pi}{2a}$$

Pertanto l'integrale vale

$$\frac{\pi}{2a}$$

Altra possibile sostituzione per il calcolo dell'integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx.$$

Si può effettuare la sostituzione $t = \sqrt{1-ax}$. Si ha $x = \frac{1}{a}(1-t^2)$ e $dx = -\frac{2t}{a} dt$ Inoltre per $x = 0 \Rightarrow t = 1$ mentre per $x \rightarrow \frac{1}{a} \Rightarrow t \rightarrow 0$ Perciò otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx = \frac{2}{a} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Ponendo ora $t = \sin y$, si ha $dt = \cos y dy$, otteniamo

$$\frac{2}{a} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2 dy = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2y)) dy = \frac{\pi}{2a}$$