Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 15/9/25

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{|\cos x|} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} \qquad \left[f(x) = \frac{a}{|\sin x|} e^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]$$

specificando: dominio, eventuali simmetrie (parità, periodicità...), eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. (*Suggerimento:* può essere utile osservare che il polinomio $t^3 - t^2 + t - 1$ ha $t = 1$ come radice.)
$[a = \pm 1]$

Svolgimento: Consideriamo la prima funzione con $a = 1$. Le altre si ottengono riflettendo rispetto all'asse x e/o traslando di $\frac{\pi}{2}$.
Funzione 2π-periodica. Basta studiarla in $[-\pi, \pi]$.
Dominio: $D = [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Asintoti. Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui. Si ha

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\cos x|} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\cos x|} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} = 0,$$

e dunque $x = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale.
Derivabilità e derivata. Per $x \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x} e^{\frac{1}{\sin x - 1}}\right) &= \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{(\sin x - 1)^2}\right) e^{\frac{1}{\sin x - 1}} = \frac{\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos^2 x (\sin x - 1)^2} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} \\ &= \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x (\sin x - 1)} e^{\frac{1}{\sin x - 1}}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1)$. Dunque

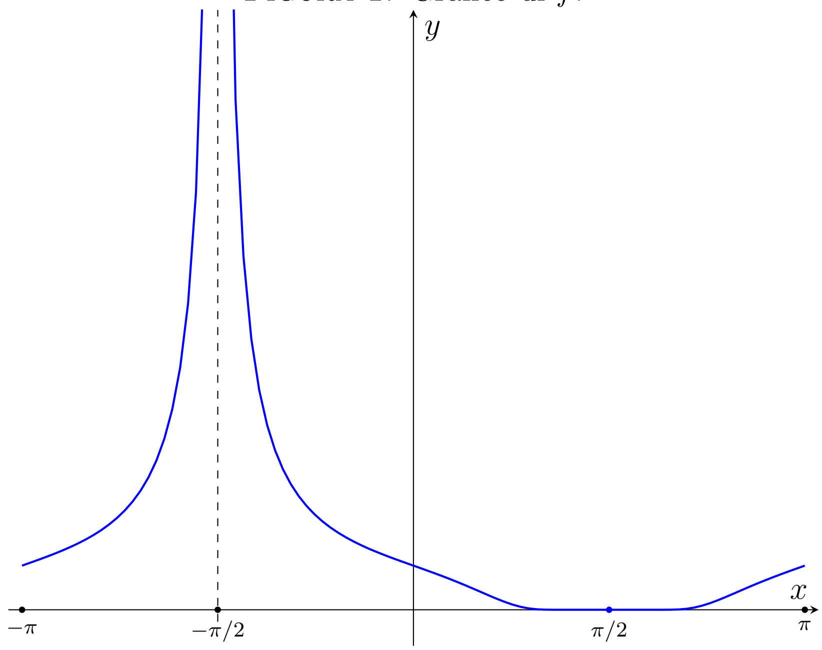
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x (\sin x - 1)} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ -\frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x (\sin x - 1)} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^\pm} f'(x) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^\pm} \mp \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x (\sin x - 1)} e^{\frac{1}{\sin x - 1}} = 0.$$

Monotonia e punti estremali. Si ha chiaramente f crescente in $[-\pi, \frac{\pi}{2})$ e in $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, e f decrescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dunque $x = \frac{\pi}{2}$ è l'unico minimo relativo (e anche assoluto) per la funzione estesa per continuità.

Figura 1. Grafico di f.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale improprio (convergente):

$$\int_a^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^2} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Cambiando variabile $t = \sqrt{x}$ ed integrando per parti si ha

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^2} dx = 2 \int \frac{\arctan t}{t^3} dt = -\frac{1}{t^2} \arctan t + \int \frac{dt}{t^2(t^2+1)}$$

La funzione razionale dell'ultimo integrale si decompone in fratti semplici come

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1},$$

e dunque

$$\int \frac{dt}{t^2((t+1)^2+1)} = -\frac{1}{t} - \arctan t.$$

L'integrale richiesto è pertanto

$$\int_a^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^2} dx = \lim_{r \to +\infty} \left[-\frac{1}{t^2} \arctan t - \frac{1}{t} - \arctan t \right]_{\sqrt{a}}^{r}$$

$$= \frac{a+1}{a} \arctan \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. **[6 punti]** Determinare le soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} |z| = a, \\ |z - a - ia| = a, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Geometricamente, il sistema descrive l'intersezione di due circonferenze, la prima di centro l'origine e raggio a, la seconda di centro (a, a) e raggio a. È quindi chiaro che ci sono due punti di intersezione $z = a$ e $z = ia$.
Algebricamente, le $z \in \mathbb{C}$ soddisfano la prima equazione se e solo se $z = ae^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Quindi la seconda diventa

$$|ae^{i\theta} - a - ia| = a \iff (a\cos\theta - a)^2 + (a\sin\theta - a)^2 = a^2 \iff 2 - 2\sin\theta - 2\cos\theta = 0$$
$$\iff \sin\theta + \cos\theta = 1$$

ed è chiaro che le uniche soluzioni sono $\theta = 0$, cioè $z = a$, e $\theta = \frac{\pi}{2}$, cioè $z = ia$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} \pm\frac{(x^{3/2}+1)\left[\sin\left(\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]}{\sqrt{x^3+b}\,e^{-\frac{b}{2x^3}}-x^{3/2}}.$$

(*Suggerimento:* può essere utile ricordare la formula $\arctan t = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}$ per $t > 0$.)

$[b = 2, 3]$

Svolgimento: Al denominatore si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3+b}\,e^{-\frac{b}{2x^3}}-x^{3/2} &= x^{3/2}\left[\left(1+\frac{b}{2x^3}-\frac{b^2}{8x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\left(1-\frac{b}{2x^3}+\frac{b^2}{8x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)-1\right]\\ &= x^{3/2}\left(-\frac{b^2}{4x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right).\end{aligned}$$

Al numeratore si ha

$$\begin{aligned}\sin\left(\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) &= \sin\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)+2\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{48x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^6}+\frac{1}{6x^6}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{24x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\\ &= \frac{11}{24x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right).\end{aligned}$$

Poiché allora $\frac{x^{3/2}+1}{x^{3/2}} \to 1$, il limite richiesto è

$$\lim_{x\to+\infty} \pm\frac{\frac{11}{24x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)}{-\frac{b^2}{4x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)} = \mp\frac{11}{6b^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. **[5 punti]** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = \cos(ax), \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

$[a = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

Svolgimento: Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + a^2$ ha radici $\lambda_{1,2} = \pm ia$, e quindi l'integrale generale dell'omogenea è

$$y_o(t) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax).$$

L'equazione ammette una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = x[A\cos(ax) + B\sin(ax)].$$

Derivando si ha

$$y_p''(x) = 2a[-A\sin(ax) + B\cos(ax)] - a^2x[A\cos(ax) + B\sin(ax)],$$

e pertanto A, B sono determinati dall'equazione

$$2a[-A\sin(ax) + B\cos(ax)] = \cos(ax),$$

da cui segue che l'integrale generale è

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1\cos(ax) + C_2\sin(ax) + \frac{x}{2a}\sin(ax).$$

Le costanti arbitrarie sono determinate dalle condizioni

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y'(0) = aC_2 = 1, \end{cases}$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\sin(ax).$$