- **Teorema** Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.

$$f \in \mathcal{R}(a,b) \iff \begin{cases} \forall \text{ successione di suddivisioni } D_n' \\ \text{t.c. } |D_n'| \longrightarrow 0 \text{ risulta} \\ \lim_{n\to\infty} s(D_n') = \lim_{n\to\infty} S(D_n') = l \\ \text{ed è } \quad l = \int_a^b f(x)\,dx. \end{cases}$$

Dim. ($\Leftarrow$) Presa una qualunque D_n' come da Hp,

$$0 \leq \inf S_{sup} - \sup S_{inf} \leq S(D_n') - s(D_n') \longrightarrow 0.$$

→ Inoltre $s(D_n') \leq \int_a^b \leq S(D_n')$ $\Rightarrow$ Th. del confronto.

$(\Rightarrow)$ Lavoreremo solo sulle $s(\mathcal{D}_n')$. Facile adattare il caso $S(\mathcal{D}_n')$, fatto sul libro.

Serve il seguente:

- **Lemma**:

Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione di $[a,b]$
$y_1, \dots, y_k \in [a,b]$
$\tilde{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$

$$\Longrightarrow \quad s(\mathcal{D}) \leq s(\tilde{\mathcal{D}}) \leq s(\mathcal{D}) + k\,|\mathcal{D}|\operatorname{osc} f$$

ove
$$\operatorname{osc} f := \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Dim. lemma

→ La disuguaglianza $s(\tilde{\mathcal{D}}) \geq s(\mathcal{D})$ già dimostrata.

→ Basta dimostrare il caso $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{\bar{y}\}$ e poi si procede iterativamente:

$$\begin{aligned}
s(\mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_k\}) &\leq s(\mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_{k-1}\}) + |\mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_{k-1}\}| \operatorname{osc} f \\
&\leq \underbrace{s(\mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_{k-1}\})}_{\leq} + |\mathcal{D}| \operatorname{osc} f \\
&\leq \left(s(\mathcal{D} \cup \{y_1, \dots, y_{k-2}\}) + |\mathcal{D}| \operatorname{osc} f\right) + |\mathcal{D}| \operatorname{osc} f \\
&= \left(s(\mathcal{D} \cup \{y_1 \dots y_{k-2}\})\right) + 2|\mathcal{D}| \operatorname{osc} f \\
&\leq \ \vdots \\
&\leq s(\mathcal{D}) + k\,|\mathcal{D}| \operatorname{osc} f.
\end{aligned}$$

→ Se $\bar{y} \in \mathcal{D}$ banale:

$$s(\mathcal{D} \cup \{\bar{y}\}) = s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}) + |\mathcal{D}| \operatorname{osc} f.$$

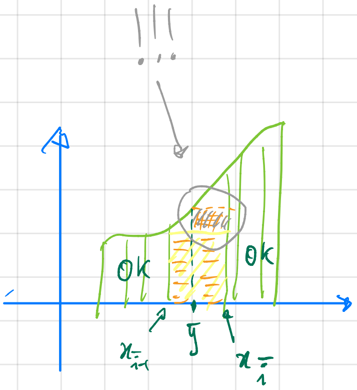
→ Sia $\bar{y} \notin \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, $\bar{y} \in (x_{\bar{i}-1}, x_{\bar{i}})$

$$\Rightarrow s(\mathcal{D} \cup \{\bar{y}\}) - s(\mathcal{D}) = \cancel{\sum^{\bar{i}-1}} - \cancel{\sum^{\bar{i}-1}}$$

$$+ \left(\inf_{[x_{\bar{i}-1}, \bar{y})} f\right)(\bar{y} - x_{\bar{i}-1}) + \left(\inf_{[\bar{y}, x_{\bar{i}})} f\right)(x_{\bar{i}} - \bar{y})$$

$$- \left(\inf_{[x_{\bar{i}-1}, x_{\bar{i}})} f\right)(x_{\bar{i}} - x_{\bar{i}-1})$$

$$+ \cancel{\sum_{\bar{i}+1}} - \cancel{\sum_{\bar{i}+1}}$$



$$\leq \left(\sup_{[a,b]} f\right)(\bar{y} - x_{\bar{i}-1}) + \left(\sup_{[a,b]} f\right)(x_{\bar{i}} - \bar{y})$$

$$- \left(\inf_{[a,b]} f\right)(x_{\bar{i}} - x_{\bar{i}-1})$$

$$= \left(\sup_{[a,b]} f\right)(\cancel{\bar{y}} - x_{\bar{i}-1} + x_{\bar{i}} - \cancel{\bar{y}})$$

$$- \left(\inf_{[a,b]} f\right)(x_{\bar{i}} - x_{\bar{i}-1})$$

$$= (\operatorname{osc} f)\,(x_{\bar{i}} - x_{\bar{i}-1})$$

$$\leq (\operatorname{osc} f)\,|\mathcal{D}|.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$ Lemma

• Lasciare interpretazione geometrica per esercizio.

Finiamo dim. dell'implicazione ($\Rightarrow$) del Th.

→ Sia $\mathcal{D}_n'$ una generica successione t.c. $|\mathcal{D}_n'| \to 0$.
<u>oss.</u>: ovviamente $s(\mathcal{D}_n') \leq \sup S_{inf} := \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

→ fissato $\varepsilon > 0$, sia $\mathcal{D}$ una suddivisione t.c.

$$s(\mathcal{D}) \geq \ell - \varepsilon/2$$

→ Sia $k = \# \mathcal{D}$ e sia

$$\tilde{\mathcal{D}}_n := \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_n'.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad s(\mathcal{D}_n') &\geq s(\tilde{\mathcal{D}}_n) - k|\mathcal{D}_n'| \operatorname{osc} f \\
&\geq s(\mathcal{D}) - k|\mathcal{D}_n'| \operatorname{osc} f \\
&\geq \ell - \frac{\varepsilon}{2} - k|\mathcal{D}_n'| \operatorname{osc} f \\
&\geq \ell - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

per il lemma

definitivamente perché $|\mathcal{D}_n'| \to 0$.

→ Riassumendo,

$$\ell - \varepsilon \leq s(\mathcal{D}_n') \leq \ell \quad \text{definitivamente}$$

$\Rightarrow \quad s(\mathcal{D}_n') \to \ell$ per definizione di limite.

* Analogamente $S(\mathcal{D}_n') \to L := \inf S_{sup}$

* Siccome $\ell = L = \int f$ per Hp, $\Rightarrow$ Tesi.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$