Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta dell'1 settembre 2025

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{|e^x - a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso.
$[a = 3, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}]$.

Svolgimento:
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, e si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, in quanto, per $x \to +\infty$, si ha $f(x) \sim e^{-x}e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \to 0$. La funzione è derivabile per ogni $x \neq \log a$, ed ha una cuspide in $x = \log a$ che risulta un minimo globale. La derivata vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x}}{2\sqrt{|e^x-a|}}(-2|e^x-a| + e^x \mathrm{sign}(e^x-a)) = \frac{e^{-x}(2a-e^x)}{2\sqrt{|e^x-a|}}\mathrm{sign}(e^x-a) \\ &= \begin{cases} \frac{2ae^{-x}-1}{2\sqrt{|e^x-a|}} & \text{se } x > \log a \\ \frac{-2ae^{-x}+1}{2\sqrt{|e^x-a|}} & \text{se } x < \log a \end{cases} \end{aligned}$$

Esiste un unico punto critico $x = \log(2a)$ che risulta un massimo locale. La funzione decresce in $(-\infty, \log a)$, cresce in $(\log a, \log(2a))$ e decresce in seguito. La derivata seconda vale, per $x \neq \log a$,

$$f''(x) = \frac{4a^2e^{-x} - 6a + e^x}{4(|e^x-a|)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{se } x \neq \log a$$

da cui risulta che f ha due flessi in $x = \log((3-\sqrt{5})a)$ e $x = \log((3+\sqrt{5})a)$, ed è convessa in $(-\infty, \log((3-\sqrt{5})a)$ e in $(\log((3+\sqrt{5})a), +\infty)$, concava altrove.

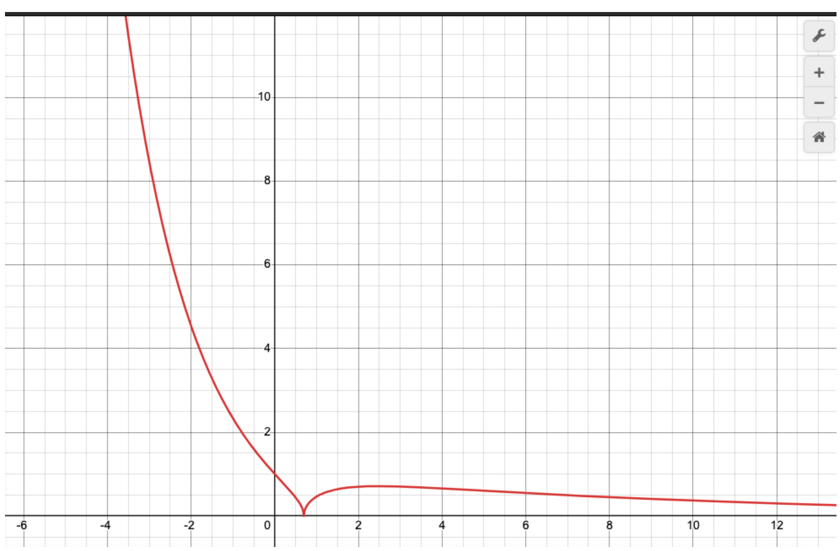

FIGURE 1. Grafico di f per $a = 2$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}}}{e^{-n} \pm \sin^2(\frac{1}{n})}$$

[$a = 2, 3$ (con segno + al denominatore, $a = -2, -3$ con segno $-$ davanti a $\sin^2(\frac{1}{n})$]

Svolgimento: Essendo $\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{a}{n^2}\right)}$ valutiamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n &= e^{n\log\left(1+\frac{a}{n^2}\right)} \\ &= e^{n\left(\frac{a}{n^2}-\frac{a^2}{2n^4}+o(n^{-4})\right)} = e^{\frac{a}{n}-\frac{a^2}{2n^3}+o(n^{-3})} \\ &= 1+\frac{a}{n}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

e sviluppando $\sqrt{\frac{n+2a}{n}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2a}{n} - \frac{1}{8}\,\frac{4a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, il numeratore si stima come

$$\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}} = \frac{a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Riguardo il denominatore, si ha

$$e^{-n} \pm \sin^2(\frac{1}{n}) = e^{-n} \pm \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \pm\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

e si conclude

$$\frac{\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}}}{e^{-n} \pm \sin^2(\frac{1}{n})} \sim \frac{\frac{a^2}{n^2}}{\pm\frac{1}{n^2}} \to \pm a^2\,.$$

Esercizio 3. [7 punti]
Discutere l'esistenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} dx$$
e calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

$[a = 2, b = -2;\ a = 3, b = -1;\ a = 2, b = 1;\ a = 3, b = 1]$

Svolgimento:

Convergenza:
L'integrale può essere singolare nell'intorno di $x = 0$. Usando le formule di duplicazione si ha
$$\frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} = \frac{(\sin x)^3(a + 2b\cos x)}{(\cos(x) - 2\cos^2 x + 1)^\alpha}$$
e usando $\cos(x) - 2\cos^2 x + 1 = (1 + 2\cos x)(1 - \cos x)$ si ottiene, per $x \to 0^+$,
$$\frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} \sim \frac{(a + 2b)(\sin x)^3}{3^\alpha\,(1 - \cos x)^\alpha}$$
Per gli sviluppi di $\sin x, \cos x$ si conclude
$$\frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} \sim \frac{(a + 2b)}{(3/2)^\alpha} x^{3-2\alpha}$$
che è integrabile se e solo se $3 - 2\alpha > -1$ ovvero $\alpha < 2$.

Calcolo dell'integrale:
Per il calcolo, procediamo per sostituzione $y = \cos x$, e si ha
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))} dx = \int_0^1 \frac{a(1 - y^2) + 2by(1 - y^2)}{(1 - y)(2y + 1)} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{(a + 2by)(1 + y)}{(2y + 1)} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(a - b)}{(2y + 1)} dy + \frac{1}{2}\int_0^1 (a + b + 2by) dy$$
$$= \frac{a - b}{4}\log(|2y + 1|) + \frac{1}{2}(a + b)y + b\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a - b}{4}\log 3 + \frac{1}{2}(a + 2b).$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{1+ae^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Separando e integrando si ha

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{1+ae^x} = (t = e^x) \int \frac{1}{t(1+at)} dt$$
$$= \int (\frac{1}{t} - \frac{a}{1+at}) dt = \log\left(\frac{t}{1+at}\right) + C$$

da cui

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = C + \log\left(\frac{e^x}{1+ae^x}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $C = \log(1+a) - 2$, da cui

$$\frac{2}{\sqrt{y}} = 2 - \log\left(\frac{e^x(1+a)}{1+ae^x}\right)$$

e infine

$$y = \left(\frac{2}{2 - \log\left(\frac{e^x(1+a)}{1+ae^x}\right)}\right)^2$$

Esercizio 5. [5 punti]
Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^4 + a|z^2| + b = 0$$

$[a = 4, b = 2;\ a = -2, b = -1;\ a = 2, b = 1;\ a = -4, b = -2]$

Svolgimento: Usando $|z^2| = |z|^2$, e scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ si avrà

$$z^4 = -a\rho^2 - b$$

e il termine a destra è un numero reale. A seconda delle varianti si avrà allora:

(i) caso $a, b < 0$: in tal caso si ha $-a\rho^2 - b > 0$ e quindi

$$\rho^4 = -a\rho^2 - b\,, \quad 4\theta = 2k\pi\,.$$

L'equazione quadratica dà $\rho^2 = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ma la radice negativa va scartata. Quindi si hanno le soluzioni

$$z_k = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} e^{ik\frac{\pi}{2}}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

(ii) caso $a, b > 0$: in tal caso si ha $-a\rho^2 - b < 0$, da cui $-a\rho^2 - b = (a\rho^2 + b)e^{i\pi}$ e le soluzioni sono

$$z_k = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$$