Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27 gennaio 2025

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Titolare del corso:	
Sessione per l'orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

R

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a + b\sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità (non è richiesto lo studio della derivata seconda).
$[(a,b) = (3,2), (2,-3), (-3,2), (-1,-4)]$

Esercizio 2. **[6 punti]** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{2b}^{+\infty} \frac{\log ax}{\sqrt{(x-b)^3}}\, dx.$$

$[(a,b) = (5,2), (2,3), (2,5), (3,2)]$

Esercizio 3. **[6 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$[A] \qquad z^2(4 - |z^2|) = 5i.$$
$$[B] \qquad z^2(|z^2| - 2) = 3i.$$
$$[C] \qquad z^2(2 - |z^2|) = 3i.$$
$$[D] \qquad z^2(|z^2| - 4) = 5i.$$

Esercizio 4. **[5 punti]** Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al IV ordine di

$$f(x) = \frac{1}{\log(a + x^2)}.$$

$[a = 4, 5, 2, 3]$

Esercizio 5. **[7 punti]** Dopo aver trovato la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A, \end{cases}$$

trovarne l'intervallo massimale di esistenza.
$[A = 2, 3, 4, 5$ e seni e coseni permutati (quando c'è il coseno al denominatore si parte da $-\pi$)$]$

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a + b\sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.
$[(a, b) = (3, 2), (2, -3), (-3, 2), (-1, -4)]$

Svolgimento: Considereremo qui il caso $(a, b) = (3, 2)$.
Osserviamo preliminarmente che la funzione è pari, quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

- Dominio: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, infatti non c'è nessuna limitazione nei domini delle funzioni che compongono f.
- Asintoti:
  - poiché la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, non vi sono asintoti verticali.
  - $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \nexists$ asintoti orizzontali.
  - $f(x) = 3 + x^{4/3}(2 + o(1))$ implica che f non abbia asintoti obliqui, in quanto sopralineare all'infinito (ovvero $|f(x)/x| \to \infty$ per $|x| \to \infty$).
- Studio della derivata: risulta

$$f'(x) = \frac{4x(2x^2-1)}{3[x^2(x^2-1)]^{2/3}} \qquad x \neq 0,\ x \neq \pm 1. \tag{1}$$

  Lo studio del segno di f' ci dice che la funzione è crescente in $[-1/\sqrt{2}, 0]$ ed in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e decrescente negli altri intervalli. Abbiamo allora anche che $f(\pm 2^{-1/2}) = 3 - 2^{1/3}$ è il minimo assoluto della funzione, mentre l'estremo superiore della funzione si deduce essere $+\infty$ dallo studio sugli asintoti.
- Punti di non derivabilità: nei valori $x = 0$ e $x = \pm 1$ non possiamo applicare le regole di derivazione per funzioni composte, che ci ha permesso di ricavare (1). Facendo un'analisi via rapporto incrementale, o via limite della derivata trovata (i.e. usando il teorema di de l'Hôpital), otteniamo che non esiste derivata in tali punti. Più precisamente:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \Rightarrow \qquad 0 \text{ è un punto di cuspide;}$$
$$\lim_{x\to \pm 1} f'(x) = \pm\infty \qquad \Rightarrow \qquad \pm 1 \text{ sono punti di flesso a tangente verticale.}$$

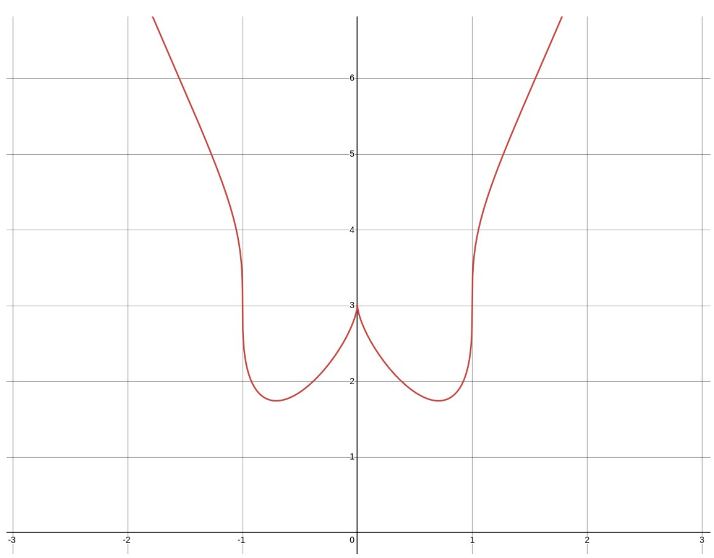

FIGURA 1. Grafico della funzione $3 + 2\sqrt[3]{x^4 - x^2}$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{2b}^{+\infty} \frac{\log ax}{(x-b)^{3/2}}\,dx.$$

$[(a,b) = (5,2), (2,3), (2,5), (3,2)]$

Svolgimento: Consideriamo il caso $(a,b) = (2,3)$ e calcoliamo prima l'integrale in definito. Procedendo per parti:

$$I := \int \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}}\,dx = -2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + 2\int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx.$$

Integriamo adesso il secondo addendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx &= 2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt \qquad (t := \sqrt{x-3}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inserendo quest'ultimo risultato nell'integrale indefinito, otteniamo:

$$I = -2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_6^{+\infty} \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \left[-2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right]_6^c \\ &= \lim_{c\to\infty} \left\{-2\frac{\log(2c)}{(c-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{c-3}}{\sqrt{3}} + 2\frac{\log(12)}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 1\right\} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(12). \end{aligned}$$

Esercizio 3. [6 punti]
Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
&[A] \qquad z^2(4-|z^2|)=5i.\\
&[B] \qquad z^2(|z^2|-2)=3i.\\
&[C] \qquad z^2(2-|z^2|)=3i.\\
&[D] \qquad z^2(|z^2|-4)=5i.
\end{aligned}
$$

Svolgimento: Mostreremo qui lo svolgimento nel caso [B].

- osserviamo che $|z^2|-2\neq 0$, altrimenti nell'equazione avremmo $0=3$, assurdo, possiamo quindi scrivere il problema come
$$z^2=\tfrac{3i}{|z^2|-2}=ai, \qquad \text{per un certo } a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
- Se $a>0$ allora $|z^2|=a$ e l'equazione da studiare diventa
$$(ai)(a-2)=3i \quad\Longrightarrow\quad a(a-2)=3,$$
la cui unica soluzione positiva è $a=3$. Concludendo, risolviamo $z^2=ai=3i$ ed otteniamo $z=\pm\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $a<0$ allora $|z^2|=|a|=-a$ e l'equazione da studiare diventa
$$ai(-a-2)=3i \quad\Longrightarrow\quad a(-a-2)=3,$$
che non ha soluzioni reali.

In conclusione, le soluzioni del problema proposto sono $z=\pm\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Altro svolgimento (I): Si scrive $z=\rho e^{\theta i}$ e si risolvono i due problemi

$$
\begin{aligned}
\rho^2(\rho^2-2)e^{2\theta i}&=3e^{(\pi/2)i} \qquad \text{se } \rho^2-2\geq 0,\\
\rho^2(2-\rho^2)e^{(2\theta+\pi)i}&=3e^{(\pi/2)i} \qquad \text{se } \rho^2-2<0.
\end{aligned}
$$

Per risolvere tali problemi, si eguagliano moduli e argomenti, a meno di $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
N.B. non dimenticare il secondo caso (da dove viene?).

Anche: Si pone $w=z^2$. Allora $|w|=|z^2|=|z|^2$ e l'equazione per w diventa $w(|w|-2)=3i$. Ponendo $w=a+bi$, si ottiene $(a+bi)\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)=a\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)+b\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)i=3i$, ovvero

$$
\begin{cases} a\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)=0\\ b\left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)=3\end{cases}
\Leftrightarrow \quad
\begin{cases} a=0\\ b\left(\sqrt{b^2}-2\right)=3\end{cases}
\quad \text{e/o} \quad
\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=2\\ 0=3\end{cases}
$$

L'ultimo sistema non ha soluzioni ($0\neq 3!$), quindi $a=0$ e b verifica
$$b\,(|b|-2)=3.$$
Distinguiamo i casi $b\geq 0$ e $b<0$. Se $b\geq 0$, allora $|b|=b$ e $b(b-2)=3$, ovvero $b^2-2b-3=(b-3)(b+1)=0$; l'unica soluzione non-negativa è $b=3$ e abbiano trovato la soluzione $w=0+3i=3i$. Se invece $b<0$, allora $|b|=-b$ e $b(-b-2)=3$, ovvero $b^2+2b+3=0$, che non ha soluzioni. In conclusione
$$w=z^2=3i=3e^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ quindi } z=\pm\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}(1+i).$$
Ponendo invece $w=\rho e^{i\varphi}$ si giunge allo stesso risultato.
Ragionando analogamente negli altri casi si trova:
$$[A]:\ z^2=-5i=5e^{-i\frac{\pi}{2}}, \qquad [C]:\ z^2=-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}, \qquad [D]:\ z^2=5i=5e^{i\frac{\pi}{2}},$$
ovvero
$$[A]:\ z=\pm\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \qquad [C]:\ z=\pm\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \qquad [D]:\ z=\pm\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Altro svolgimento (II): Si pone $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x^2 - y^2 + 2ixy)(x^2 + y^2 - 2) = 3i \iff \begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ 2xy(x^2 + y^2 - 2) = 3 \end{cases}$$

Segue dall'ultima equazione che $x^2 + y^2 - 2 \neq 0$, quindi, per la prima equazione $x^2 = y^2$, ovvero $x = \pm y$. Sostituendo $x = y$ nella seconda equazione si ottiene $2y^2(2y^2 - 2) = 3$, ovvero $4(y^2)^2 - 4y^2 - 3 = (2y^2 - 3)(2y^2 + 1) = 0$ e $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Sostituendo $x = -y$ nella seconda equazione si ottiene $-2y^2(2y^2 - 2) = 3$, ovvero $-4(y^2)^2 + 4y^2 - 3 = 0$, che non ammette soluzioni. Perciò le due soluzioni sono $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + i)$.

Esercizio 4. **[5 punti]** Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al IV ordine di

$$f(x) = \frac{1}{\log(a + x^2)}.$$

$[a = 4, 5, 2, 3]$

Svolgimento: Useremo i seguenti sviluppi:

$$\log(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2), \qquad \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Consideriamo il caso $a = 5$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\log 5 + \log\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)} \\
&= \frac{1}{\log 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{25} + o(x^4)} \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 + \frac{1}{5\log 5}\,x^2 - \frac{1}{50\log 5}\,x^4 + o(x^4)\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 - \left(\frac{1}{5\log 5}\,x^2 - \frac{1}{50\log 5}\,x^4\right) + \left(\frac{1}{5\log 5}\,x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right] \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 - \frac{1}{5\log 5}\,x^2 + \left(\frac{1}{50\log 5} + \frac{1}{25\log^2 5}\right)x^4 + o(x^4)\right] \\
&= \frac{1}{\log 5} - \frac{1}{5\log^2 5}\,x^2 + \left(\frac{1}{50\log^2 5} + \frac{1}{25\log^3 5}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Idea per altro svolgimento: Si pone $x^2 = t$ e si considera la funzione $g(t) = [\log(a+t)]^{-1}$. Poiché $x \to 0$ dà anche $t \to 0$, si può scrivere lo sviluppo di Maclaurin di g al secondo ordine (basta!) calcolando esplicitamente $g'(0)$ e $g''(0)$ e poi riportarlo allo sviluppo di $f(x)$, dato che $f(x) = g(x^2)$.

Esercizio 5. [7 punti]
Dopo aver trovato la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A, \end{cases}$$

trovarne l'intervallo massimale di esistenza.

[$A = 2, 3, 4, 5$ e seni e coseni permutati (quando c'è il coseno al denominatore si parte da $-\pi$)]

Svolgimento: Consideriamo il caso $A = 4$ e lavoriamo nell'intervallo massimale I, che verrà individuato raccogliendo le condizioni di esistenza.
L'EDO può essere svolta separando le variabili. Tenendo conto che $\cosh y \geq 1 > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, possiamo dividere ottenendo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\operatorname{senh} y(x)}{\cosh y(x)} y'(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx.$$

Svolgendo gli integrali (il primo con la sostituzione $y(x) = y$) e considerando gli integrali indefiniti, abbiamo

$$\int \frac{\operatorname{senh} y(x)}{\cosh y(x)} y'(x) dx = \log \cosh y(x) + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \log|\operatorname{sen} x| + c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo adesso che nell'intorno del punto dove è posto il problema di Cauchy risulta $\operatorname{sen} x < 0$, per cui nell'intervallo massimale I deve essere

$$\log(\cosh y(x)) = \log(-\operatorname{sen} x) + c = \log(-k \operatorname{sen} x) \qquad \text{dove } c \in \mathbb{R} \ \text{ e } k = e^c > 0. \tag{2}$$

Troviamo allora

$$\cosh y(x) = -k \operatorname{sen} x.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha $k = \cosh 4$. Quindi la soluzione è:

$$y(x) = \operatorname{arccosh}\big(-(\cosh 4)\operatorname{sen} x\big) \qquad x \in I$$

(la condizione iniziale si poteva usare anche in (2), trovando direttamente la costante di integrazione c).
Per quanto riguarda l'individuazione di I consideriamo che $\cosh y \geq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$ e che $y(x) \neq 0$ in I perché sia ben definita l'equazione nel problema di Cauchy dato. Va quindi imposto $-(\cosh 4)\operatorname{sen} x > 1$, ovvero

$$\operatorname{sen} x < -\frac{1}{\cosh 4}.$$

Risolvendo la disequazione trigonometrica otteniamo

$$I = \left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right), -\arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right)\right).$$