Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/01/2024 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo locali e globali, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso. **È richiesto lo studio della derivata seconda**.

$[(a, b) = (1, 1), (1, -1), (2, 1), (2, -1)]$

Svolgimento: In tutti i casi $a > 0$. In tutti i casi il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e la funzione continua. La funzione corrispondente ai parametri $(a, -1)$ si ottiene moltiplicando per -1 quella corrispondente ai parametri $(a, 1)$ e quindi il grafico della prima si ottiene da quello della seconda tramite una riflessione rispetto all'asse x. Consideriamo quindi solo il caso $(a, 1)$ ossia $f(x) = e^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}$.

È evidente che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare il grafico di f non interseca l'asse x. Si ha inoltre $f(0) = e^{-1}$. Inoltre f è una funzione pari.
Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

e quindi l'asse x è un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Essendo il dominio di f uguale $\mathbb{R}$ e la funzione continua non possono esserci asintoti verticali.
La funzione è derivabile infinite volte in

$$\mathbb{R} \setminus \{-a, a\} = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, +\infty)\,.$$

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = 2\frac{1-(\frac{x}{a})^2}{|1-(\frac{x}{a})^2|}\frac{x}{a^2}e^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}$$

se $|x| \neq a$. Si ha

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = -\frac{2}{a} < 0$$

e

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = \frac{2}{a} > 0\,.$$

Quindi f non è derivabile in a e a è un punto angoloso. Analogamente

$$f'_+(-a) = \lim_{x\to -a^+} f'(x) = -\frac{2}{a} < 0$$

e

$$f'_-(-a) = \lim_{x\to -a^-} f'(x) = \frac{2}{a} > 0\,.$$

Quindi f non è derivabile in $-a$ e $-a$ è un punto angoloso. Si ha

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

Inoltre

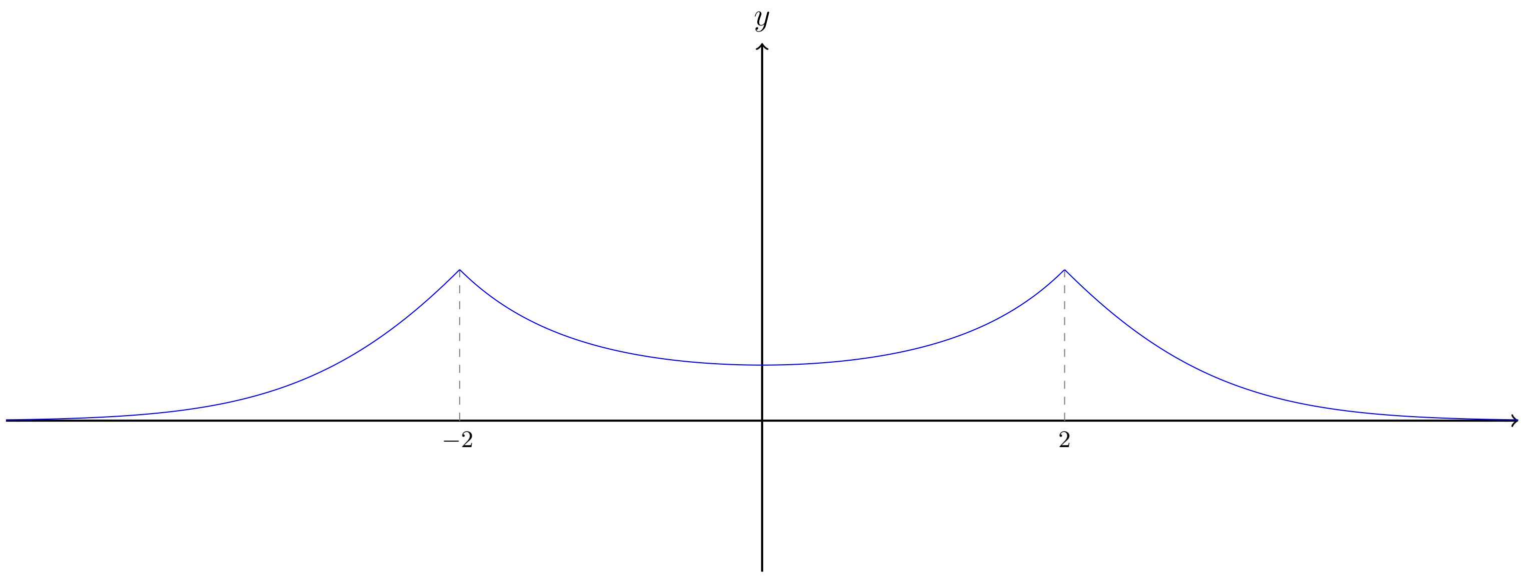
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (0, a)\,.$$

Di conseguenza f è *strettamente crescente* in $(-\infty, -a]$ e in $[0, a]$ mentre f è *strettamente decrescente* in $[-a, 0]$ e in $[a, +\infty)$. 0 è un punto di *minimo locale* e $f(0) = e^{-1}$ è il corrispondente valore. I punti $-a$ e a sono punti di massimo assoluto e il corrispondente valore massimo è $f(a) = f(-a) = 1$.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{1-(\frac{x}{a})^2}{|1-(\frac{x}{a})^2|}\frac{2}{a^2} \right) e^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}\,.$$

Si ha $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ e quindi f è *strettamente convessa* in $(-\infty, -a]$ in $[-a, a]$ e in $[a, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso. Si noti che f non può essere convessa in nessun intorno di uno dei due punti di massimo a e $-a$.

Riportiamo qui sotto il grafico di f nel caso $(a, b) = (2, 1)$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax}+e^{ax}+1}{e^{ax}+1}\,dx.$$

$[(a,b)=(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Utilizzando la sostituzione $t=e^{ax}$ si trova

$$\int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax}+e^{ax}+1}{e^{ax}+1}\,dx = \frac{1}{a}\int_1^b \frac{t^2+t+1}{t(t+1)}\,dt$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+1)}\,dt &= \int 1\,dt + \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt\\ &= t + \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt\end{aligned}$$

Ponendo

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}$$

si trova $A=1$ e $B=-1$. Quindi

$$\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \log|t| - \log|t+1| + C = \log\left|\frac{t}{t+1}\right| + C\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax}+e^{ax}+1}{e^{ax}+1}\,dx &= \frac{1}{a}\left[t+\log\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_{t=1}^{t=b}\\ &= \frac{b-1}{a} + \frac{1}{a}\log(\frac{2b}{b+1})\,.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[6 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = b\sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

$[(a, b) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)]$

<u>*Svolgimento:*</u> In tutti i casi $a > 0$ e $b \neq 0$. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione omogenea associata è $y'' + a^2 y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $\lambda^2 + a^2 = 0$ che ha due soluzioni immaginarie $\lambda = \pm ai$. Di conseguenza l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax)\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $y_p = x(A\cos(ax) + B\sin(ax))$. Si trova

$$y_p'' + a^2 y_p = -2aA\sin(ax) + 2aB\cos(ax)$$

che risolve l'equazione se $A = -\frac{b}{2a}$ e $B = 0$. L'integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) - \frac{b}{2a} x\cos(ax)\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova quindi

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ aC_1 - \frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = (\frac{b}{2a^2} - \frac{1}{2a})\sin(ax) - \frac{b}{2a} x\cos(ax)\,.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il seguente limite di successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\sin(\frac{a}{n}) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos(\frac{b}{n}) + \frac{a^2-b^2}{n^2\log(n+2)}\right)^3}{\binom{n}{3}a^n + n!\log(1+\frac{1}{n^6})}$$

$[(a,b) = (\sqrt{3},1), (\sqrt{2},\sqrt{3}), (\sqrt{3},\sqrt{5}), (1,\sqrt{2})]$

Svolgimento: Si ha

$$\binom{n}{3}a^n \sim \frac{n^3}{6}a^n$$

e di conseguenza, per ogni numero intero positivo k ,

$$\frac{1}{n!}\binom{n}{3}a^n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ per } n \to +\infty\,.$$

Quindi

$$\binom{n}{3}a^n + n!\log(1+\frac{1}{n^6}) = n!\left(\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\;.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \sin(\frac{a}{n}) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos(\frac{b}{n}) + \frac{a^2-b^2}{n^2\log(n+2)} &= \frac{a}{n} + 1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} - 1 + \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{a^2-b^2}{n^2\log(n+2)} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\left(\sin(\frac{a}{n}) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos(\frac{b}{n}) + \frac{a-b}{n^2\log(n+2)}\right)^3 = \frac{(a^2+b^2)^3}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\;.$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\sin(\frac{a}{n}) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos(\frac{b}{n}) + \frac{a-b}{n^2\log(n+2)}\right)^3}{\binom{n}{3}a^n + n!\log(1+\frac{1}{n^6})} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\frac{(a^2+b^2)^3}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)}{n!\left(\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(a^2+b^2)^3}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)} \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3 \\ &= \begin{cases} 8 \\ \frac{125}{8} \\ 64 \\ \frac{27}{8} \end{cases}\;. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$(z^2 + ia^2)(z + iz + ia) = 0.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Le soluzioni dell'equazione si ottengono unendo le soluzioni di $z^2 + ia^2 = 0$ con quelle di $z + iz + ia$. Le soluzioni della prima equazione si possono ottenere tramite la rappresentazione esponenziale ponendo $z = |z|e^{i\theta}$. L'equazione diventa

$$|z|^2 e^{i2\theta} = a^2 e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

da cui segue $|z| = a$ e $\theta = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si trovano quindi due soluzioni $z = -\frac{a}{\sqrt{2}} + i\frac{a}{\sqrt{2}}$ e $z = \frac{a}{\sqrt{2}} - i\frac{a}{\sqrt{2}}$. La seconda equazione è di primo grado e ha come unica soluzione $z = -\frac{ia}{1+i} = -\frac{ia(1-i)}{2} = -\frac{a}{2} - i\frac{a}{2}$.