

Università di Roma “Tor Vergata – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 11/07/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{ax}(e^x - 1)^{1/3}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
[$a = \pm 1$, $b = \pm 1$]

Svolgimento:

Studiamo il caso $a = -1$, $b = 1$:

$$f(x) = e^{-x}(e^x - 1)^{1/3}.$$

Dominio: $\mathbb{R}$.

Segno: $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x = 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Asintoti: si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Non ci sono asintoti obliqui dato che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Intervalli di monotonia: per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(3 - 2e^x)}{3\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}} \quad x \neq 0.$$

Quindi $f'(x) < 0$ per $x < \log \frac{3}{2}$ e $x \neq 0$ mentre $f'(x) > 0$ per $x > \log \frac{3}{2}$ e si ha $f'(\log \frac{3}{2}) = 0$.

Abbiamo allora che la funzione è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, \log \frac{3}{2})$ mentre è monotona decrescente in $(\log \frac{3}{2}, +\infty)$.

Eventuali punti di massimo/minimo relativo: Vi è un massimo relativo ed assoluto nel punto $x_M = \log \frac{3}{2}$, con $f(x_M) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

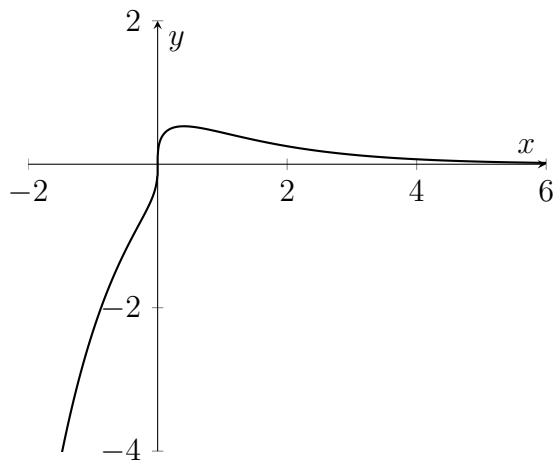
Eventuali punti di non derivabilità: possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = +\infty$, pertanto possiamo concludere che in $x = 0$ abbiamo un punto di non derivabilità con tangente verticale.

Intervalli di concavità/convessità (anche se non richiesti): per $x \neq 0$, si ha

$$\frac{4e^{2x} - 15e^x + 9}{9e^x \sqrt[3]{(e^x - 1)^2 (e^x - 1)}},$$

studiandone il segno vediamo che la funzione è concava in $(-\infty, \log(3/4)) \cup (0, \log 3)$ e convessa in $(\log(3/4), 0) \cup (\log 3, \infty)$. Pertanto ha un flesso, a tangente verticale, in $x = 0$ ed un altro, a tangente obliqua, in $x = \log 3$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = -1$, $b = 1$.



Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2a}} \frac{x \arcsen \sqrt{1-ax}}{\sqrt{1-ax}} dx.$$

$$[a = \pm 2, \pm 3]$$

Svolgimento: In questo svolgimento poniamo I il valore dell'integrale proposto.

Operando la sostituzione $ax = t$, risulta

$$I = \frac{1}{a^2} \int_0^{1/2} \frac{t \arcsen \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Poniamo adesso $\sqrt{1-t} = s$ e troviamo

$$I = -\frac{2}{a^2} \int_1^{1/\sqrt{2}} (1-s^2) \arcsen s ds = \frac{2}{a^2} \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-s^2) \arcsen s ds.$$

Sostituiamo $s = \sin y$, ovvero $y = \arcsin s$, ed otteniamo

$$I = \frac{2}{a^2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} y (1 - \sin^2 y) \cos y dy.$$

Integriamo adesso per parti ed abbiamo

$$I = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[y \left(\sin y - \frac{1}{3} \sin^3 y \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin y - \frac{1}{3} \sin^3 y \right) dy \right\}.$$

Poiché

$$\int \sin^3 y dy = \int (1 - \cos^2 y) \sin y dy = -\cos y + \frac{1}{3} \cos^3 y + c \quad c \in \mathbb{R},$$

deduciamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{a^2} \left[y \left(\sin y - \frac{1}{3} \sin^3 y \right) + \cos y + \frac{1}{3} \left(-\cos y + \frac{1}{3} \cos^3 y \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{a^2} \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{2}{a^2} \left[\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \frac{5}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned}$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 \bar{z}^{-1} + a \bar{z} z^{-1} = 0.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Svolgimento:

Dato che $z = 0$ non è soluzione posso riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$z^2 \bar{z}^{-1} (\bar{z} z^{-1})^{-1} = -a \quad \text{ovvero} \quad z^3 \bar{z}^{-2} = -a.$$

Utilizzando la rappresentazione di Eulero per z , $z = \rho e^{\theta i}$, si ha

$$\rho e^{5\theta i} = -a,$$

da cui $\rho = a$ e $\theta_k = (2k - 1) \frac{\pi}{5}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pertanto $z_k = a e^{\theta_k i}$, per $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 4. [5 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge:

$$\int_a^{+\infty} \left(x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} \right)^\alpha dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Osserviamo che la convergenza va verificata soltanto a $+\infty$. Inoltre, possiamo scrivere

$$x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt[a]{x}} (1 - \cos e^{-ax}).$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos e^{-ax}}{e^{-2ax}} = \frac{1}{2},$$

per il principio del confronto asintotico ci possiamo ricondurre a studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è integrabile all'infinito la funzione $\left(\frac{1}{\sqrt[a]{x}} e^{-2ax} \right)^\alpha$.

Possiamo quindi concludere che se $\alpha > 0$ allora l'integrale converge mentre se $\alpha \leq 0$ allora l'integrale diverge.

Esercizio 5. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\log(1+ax)) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x} \sin x^2 + \log(\cos x)}.$$

$$[a = \pm 3, \pm 5]$$

Svolgimento: Valutiamo in prima battuta l'andamento asintotico del numeratore e del denominatore e poi ne valutiamo il rapporto.

Numeratore: sviluppando il logaritmo per $x \rightarrow 0$,

$$\log(1+ax) = ax - \frac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = ax - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

quindi tenendo conto che $\sin t = t + o(t^2)$, per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\sin(\log(1+ax)) = ax - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2) + o([ax - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2)]^2) = ax - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2).$$

Poiché

$$\cos ax = 1 - \frac{(ax)^2}{2} + o((ax)^3) = 1 - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2)$$

e

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

otteniamo

$$\text{numeratore} = ax - \frac{(ax)^2}{2} + 1 - \frac{(ax)^2}{2} - (1 + ax + \frac{(ax)^2}{2}) + o(x^2) = -\frac{3}{2}(ax)^2 + o(x^2).$$

Denominatore: osserviamo che per la gerarchia degli infiniti/infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} \sin x^2}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-y)^p}{e^y} \sin \left(-\frac{1}{y}\right)^2 = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

quindi in particolare $e^{1/x} \sin x^2 = o(x^2)$.

Inoltre

$$\log(\cos x) = \log \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Riassumendo:

$$\text{denominatore} = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Rapporto: dalle stime precedenti abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\log(1+ax)) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x} \sin x^2 + \log(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{3}{2}(ax)^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2}(ax)^2}{\frac{x^2}{2}} \frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 3a^2.$$