Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/09/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{c}{2}x^2} - \cos(\sqrt{c}\,x)}{\left[a\left(\operatorname{sen}\sqrt{bx} - \sqrt{bx}\right)\right]^2 - b[\log(1+x)]^3}$$

$[(a,b,c) = (2,3,2),\ (2,3,3),\ (3,2,2),\ (3,2,3)]$

Svolgimento: Studieremo qui di seguito il caso $(a,b,c) = (2,3,2)$.

NUMERATORE:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)$$
$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 + \tfrac{1}{4!}(\sqrt{2}x)^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Numeratore} \;=\; \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4!}(\sqrt{2})^4\right] x^4 + o(x^4) = \tfrac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

DENOMINATORE:

$$\left[2(\operatorname{sen}\sqrt{3x} - \sqrt{3x})\right]^2 \;=\; 4\left(\sqrt{3x} - \frac{1}{6}\,(3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}\,(3x)^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) - \sqrt{3x}\right)^2 = 3x^3 - \frac{9}{10}\,x^4 + o(x^4),$$

$$3\,[\log(1+x)]^3 \;=\; 3\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Denominatore} = 3x^3 - \frac{9}{10}\,x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{18}{5}x^4 + o(x^4).$$

RIASSUMENDO: il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{18}{5}\,x^4 + o(x^4)} = \frac{5}{54}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}}\sqrt{b(x-a)^2 + x - a}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a,b) = (1,3), (-1,3), (1,4), (-1,4)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha $f(x) = g(x-a)$ con $g(x) := e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2+x}$, e dunque il grafico di f è il grafico di g traslato a destra di a. Studiamo dunque la funzione g.
Poiché $bx^2 + x = x(bx+1) \geq 0$ equivale a $x \leq -\frac{1}{b}$ o $x \geq 0$, il dominio di g è $D_g = (-\infty, -\frac{1}{b}] \cup (0, +\infty)$, e quello di f è $D = (-\infty, a - \frac{1}{b}] \cup (a, +\infty)$. Inoltre chiaramente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = a - \frac{1}{b}$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2+x} = 0,$$

e dunque il punto $x = a$ è di discontinuità eliminabile per f; inoltre per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2+x} &= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sqrt{1+\frac{1}{bx}} \\ &= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2bx} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \pm\sqrt{b}\left(x - 1 + \frac{1}{2b}\right) + o(1), \end{aligned}$$

e dunque le rette di equazione $y = \pm\sqrt{b}(x - a - 1 + \frac{1}{2b})$ sono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ per f.
La derivata di g è, per $x \in (-\infty, -\frac{1}{b}) \cup (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2}\sqrt{bx^2+x} + \frac{2bx+1}{2\sqrt{bx^2+x}}\right] = e^{-\frac{1}{x}}\frac{2(bx^2+x)+x^2(2bx+1)}{2x^2\sqrt{bx^2+x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2+(2b+1)x+2}{2x\sqrt{bx^2+x}}, \end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{b})^-} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2+(2b+1)x+2}{2x\sqrt{bx^2+x}} = -\infty,$$

si ha che $x = a - \frac{1}{b}$ è un punto a tangente verticale per il grafico di f, mentre essendo chiaramente

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2+(2b+1)x+2}{2x\sqrt{bx^2+x}} = 0,$$

ponendo $f(a) := 0$ si otterrebbe una funzione continua e derivabile in $x = a$ con $f'(a) = 0$.
Le radici del polinomio $2bx^2 + (2b+1)x + 2$ sono

$$x = \frac{-2b - 1 \pm \sqrt{4b^2 - 12b + 1}}{4b}$$

($4b^2 - 12b + 1 > 0$ per $b = 3, 4$), e poiché

$$\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b} < -\frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4b^2-12b+1} < 2b-3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 9$$

si ha che g' è negativa in $(-\infty, \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, -\frac{1}{b})$, mentre è positiva in $(\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(0, +\infty)$. Dunque f è decrescente in $(-\infty, a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$

e in $(a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a-\frac{1}{b})$, mentre è crescente in $(a+\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(a,+\infty)$ e pertanto i punti

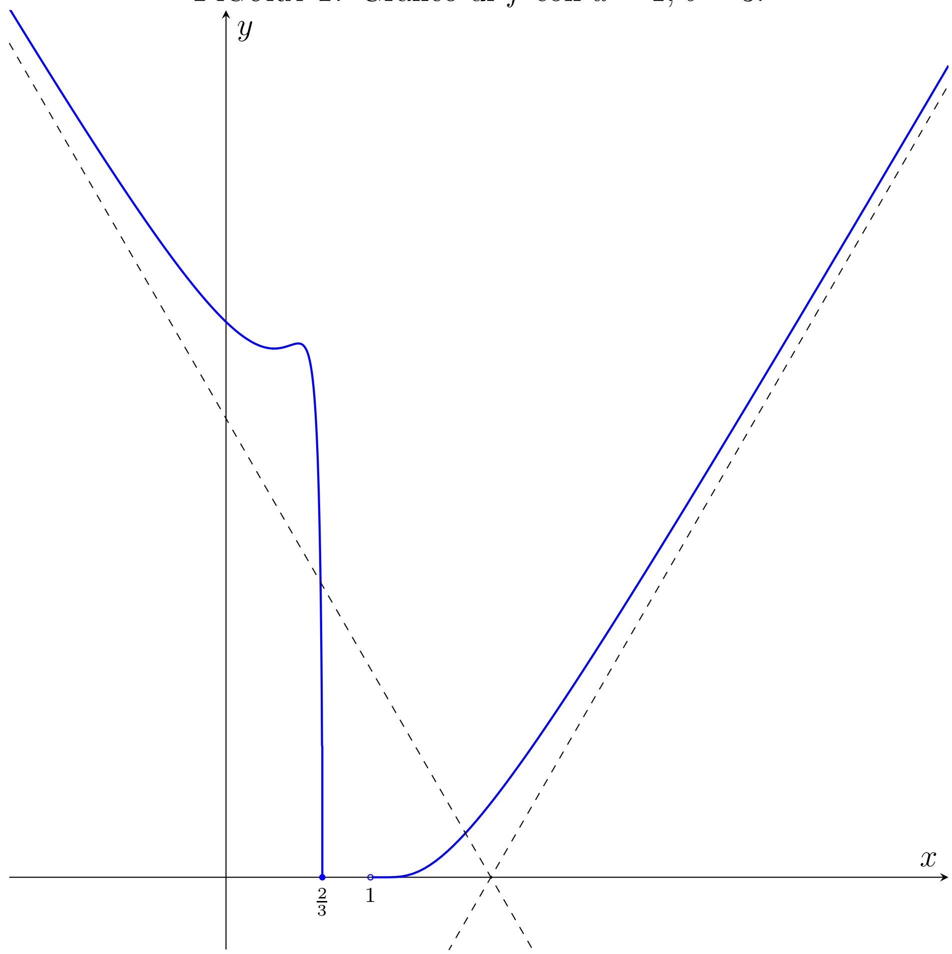
$$x = a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \quad x = a - \frac{1}{b}, \quad \text{(e } x = a \text{ per la funzione estesa)},$$

sono punti di minimo relativo e assoluto rispettivamente, mentre il punto

$$x = a + \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}$$

è di massimo relativo (ma non assoluto in quanto $\sup_D f = +\infty$).

Figura 1. Grafico di f con $a = 1$, $b = 3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [7 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_a^{\infty} \frac{(x-a)^{3-\alpha^{2b}}}{e^{\alpha x^3+(x-a)^2}}\, dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a, b) = (2, 3), (3, 2), (-1, 3), (-1, 2)]$

Svolgimento: Svolgeremo il caso $(a, b) = (2, 3)$ e chiameremo f_α la funzione integranda.

CONVERGENZA:

- Convergenza all'infinito:
  - se $\alpha < 0$ allora $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$, quindi l'integrale diverge;
  - se $\alpha \geq 0$ allora
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{e^{(\frac{x}{2})^2}}} = 0.$$
  Poiché $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{(\frac{x}{2})^2}}\, dx < +\infty$, possiamo concludere che l'integrale converge all'infinito per il criterio del confronto asintotico.
- Convergenza nell'eventuale polo 2:
  Osserviamo che
  $$\lim_{x\to2^+} \frac{f_\alpha(x)}{(x-2)^{3-\alpha^6}} = c_\alpha \in (0, +\infty) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
  Quindi per il criterio del confronto asintotico si ha convergenza se e solo se converge l'integrale $\int_2^3 (x-2)^{3-\alpha^6} dx$, ovvero
  $$3 - \alpha^6 > -1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^6 < 4 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[3]{2} < \alpha < \sqrt[3]{2}.$$

Riassumendo:

$$\text{l'integrale converge} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \alpha < \sqrt[3]{2}.$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE PER $\alpha = 0$:

Eseguendo i cambiamenti di variabile $x - 2 = t$ e $t^2 = s$, si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x-2)^3}{e^{(x-2)^2}}\, dx = \int_0^{+\infty} t^3 \cdot e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} se^{-s} ds = \frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty} \left[-(s+1)e^{-s}\right]_0^c = \frac{1}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ax(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza di y.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento:

$$y' = ax(1+y^2) \iff \frac{y'}{1+y^2} = ax \iff \arctan y = \frac{a}{2}x^2 + C.$$

$y(0) = 0$ implica che $C = 0$, quindi $\arctan y = \frac{a}{2}x^2$. Perciò $y(x) = \tan(\frac{a}{2}x^2)$. L'intervallo massimale di esistenza contenente $x = 0$ è determinato da $-\frac{1}{2}\pi < \frac{a}{2}x^2 < \frac{1}{2}\pi$, ovvero l'intervallo è $(-\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \sqrt{\frac{\pi}{a}})$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z^3 + 2z^2 + iz = 0 \ \left[z^3 + 2z^2 \pm iz = 0, \quad z^3 - 2z^2 \pm iz = 0\right].$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

<u>*Svolgimento*</u>*:* $z^3 + 2z^2 + iz = z(z^2 + 2z + i) = 0$ ovvero $z = 0$ o $z^2 + 2z + i = 0$:

$$z^2 + 2z + i = 0 \ \Leftrightarrow \ z = -1 \pm w \text{ dove } w \text{ è una soluzione di } w^2 = 1 - i.$$

Per esempio: $w = \sqrt[4]{2}(\cos(\pi/8) - \sin(\pi/8)))$.