Università di Roma "Tor Vergata – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x - \cos x} - \sin x - \log\left(\sqrt[6]{1+x^3}\right)}{(\operatorname{senh} x - \sin x)^a}$$

$[a = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

Svolgimento:

Analizziamo gli addendi al numeratore:

- $\cosh x - \cos x = x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6)$

  $\implies \quad (\cosh x - \cos x)^{1/2} = x\left(1 + \frac{x^4}{360} + o(x^4)\right)^{1/2} = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{360} + o(x^4)\right),$
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$
- $\log(\sqrt[6]{1+x^3}) = \frac{1}{6}\log(1+x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^5).$

Quindi risulta

$$\text{Numeratore } = x + \frac{x^5}{720} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + o(x^5) = -\frac{1}{144}x^5 + o(x^5).$$

Per quanto riguarda il denominatore, poiché $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, risulta

$$\text{Denominatore } = (\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)^a = \frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a}).$$

Quindi il imite proposto risulta uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{144}x^5 + o(x^5)}{\frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a})} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a = \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \\ 0 & \text{se } a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

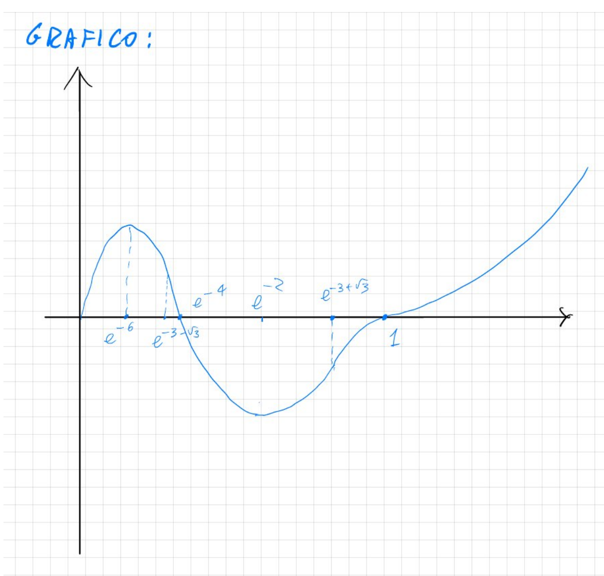
$$f(x) = \pm\big(\log x + a\big)x\log^3 x$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.
Facoltativo: studiare la derivata seconda e determinare gli intervalli di concavità/convessità e eventuali punti di flesso.

$[a = 4, -4]$.

Svolgimento: La funzione sotto studiata è $f(x) = (\log x + 4)x\log^3 x$.

- Non vi sono simmetrie né periodicità.
- $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$.
- $f \in C^\infty(\mathcal{D})$.
- $f(x) \geq 0 \iff x \in (0, e^{-4}] \cup [1, +\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = (\log^2 x)(\log^2 x + 8\log x + 12)$.
  Osserviamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, quindi non possono esserci asintoti obliqui.
- $f'(x) \geq 0 \iff x \in (0, e^{-6}] \cup [e^{-2}, +\infty)$.
  e^{-6} risulta essere punto di massimo relativo, con $f(e^{-6}) = \frac{2\cdot 6^3}{e^6}$.
  e^{-2} risulta essere punto di minimo assoluto, con $f(e^{-2}) = -\frac{16}{e^2}$.
- Calcoliamo $f''(x) = \frac{4}{x}[(\log x)(\log^2 x + 6\log x + 6)]$.
  Risulta $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$,
- $f''(x) \geq 0 \iff x \in [e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}] \cup [1, +\infty)$.
  Abbiamo quindi i seguenti tre punti di flesso: $e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}, 1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}) \sinh^\alpha x}{x^{2\alpha}(A + e^{-x})} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[A = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: (i) Per $x \to 0$ la funzione integranda si comporta come $\frac{2}{A} x^{-\alpha}$, quindi l'integrale converge nell'intervallo $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Per $x \to +\infty$ la funzione integranda si comporta come $\frac{e^{(\alpha - \frac{1}{2})x}}{Ax^{2\alpha}}$, quindi l'integrale converge nell'intervallo $(1, +\infty)$ se $\alpha < \frac{1}{2}$ e diverge se $\alpha > \frac{1}{2}$. Se $\alpha = \frac{1}{2}$, l'integranda si comporta al $+\infty$ come $\frac{1}{Ax}$ e l'integrale diverge in $(1, +\infty)$.
Perciò l'integrale converge in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
(ii) $\alpha = 0$: ponendo $y = e^{-\frac{1}{2}x}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}}{A + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2 + 2y}{A + y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{A}} \arctan(1/\sqrt{A}) + \log\left(\frac{A+1}{A}\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^6+(7-\mathrm{i})z^3-8-8\mathrm{i}=0 \qquad \left[z^6-(7-\mathrm{i})z^3-8-8\mathrm{i}=0,\quad z^6\pm(9+\mathrm{i})z^3+8+8\mathrm{i}=0\right].$$

<u>*Svolgimento:*</u> Sostituiamo $\zeta = z^3$ e consideriamo l'equazione di secondo grado

$$\zeta^2+(7-i)\zeta-8-8i=0. \tag{1}$$

Il discriminante di tale equazione è

$$(7-i)^2+4(8+8i)=49-14i+i^2+32+32i=81+18i+i^2=(9+i)^2.$$

(Si noti che nei quattro compiti il discriminante è sempre un quadrato perfetto della forma $a^2-1+2ai=(a+i)^2$.) Pertanto le radici di (**??**) sono $\zeta=-8(=8e^{\mathrm{i}\pi})$ e $\zeta=1+i(=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4})$. Si conclude trovando le radici terze di questi due numeri complessi. Ovvero, le sei soluzioni sono:

$$-2,\quad 2e^{\mathrm{i}\pi/3},\quad 2e^{\mathrm{i}5\pi/3},\quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}\pi/12},\quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}3\pi/4},\quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}17\pi/12}.$$

Le varianti si risolvono in maniera analoga, basterà notare che (**??**) è sempre della forma $(\zeta\pm8)(\zeta\pm(1+i))$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell' ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{a}{\cos(ax)} \qquad \left[f(x) = \frac{a^2}{\cos(ax)} \right].$$

$[a = (\sqrt{2}, \sqrt{3})]$

Svolgimento: Si ha:

$$\cos(ax) = 1 - \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ponendo $y = \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \to 0$ per $x \to 0$ si ha che, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(ax)} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)\\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^2 + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3\\ &\quad + o((\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3)\\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + \tfrac{a^4}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^4x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Infine, per $x \to 0$,

$$\frac{a}{\cos(ax)} = a + \tfrac{a^3}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^5x^4 + o(x^5),$$
$$\frac{a^2}{\cos(ax)} = a^2 + \tfrac{a^4}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^6x^4 + o(x^5).$$