

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria  
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – I turno

|                                     |
|-------------------------------------|
| <b>Cognome:</b><br>(in STAMPATELLO) |
| <b>Nome:</b><br>(in STAMPATELLO)    |
| <b>Matricola:</b>                   |
| <b>Titolare del corso:</b>          |
| <b>Esame orale:</b>                 |

| Esercizio     | Punteggio |
|---------------|-----------|
| 1             |           |
| 2             |           |
| 3             |           |
| 4             |           |
| 5             |           |
| <b>Totale</b> |           |

A/B/C/D

**Esercizio 1. [6 punti]** Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+a} \right)^n - e \cos \left( \sqrt{\frac{2a+1}{n}} \right) \right]$$

$$[a = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned} \log \left( 1 + \frac{1}{n+a} \right) &= \log \left( 1 + \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{a}{n}} \right) = \log \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{2a}{n^3} \right) + \frac{1}{3n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{a + \frac{1}{2}}{n^2} + \frac{a^2 + a + \frac{1}{3}}{n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\left( 1 + \frac{1}{n+a} \right)^n = e^{n \log(1+\frac{1}{n+a})} = e^{1 - \frac{a+\frac{1}{2}}{n} + \frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = e \left( 1 - \frac{a + \frac{1}{2}}{n} + \frac{36a^2 + 36a + 11}{24n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

Essendo infine  $\cos \left( \sqrt{\frac{2a+1}{n}} \right) = 1 - \frac{2a+1}{2n} + \frac{(2a+1)^2}{24n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} en^2 \left( \frac{36a^2 + 36a + 11}{24n^2} - \frac{(2a+1)^2}{24n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{16a^2 + 16a + 5}{12} e.$$

**Esercizio 2. [8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log^2 x - a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso.

**È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}]$$

Svolgimento: Dominio:  $\{x > 0\}$ . Risulta

$$f(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{-a} \text{ e } x \geq e^a, \quad f(x) = 0 \iff x = e^{-a}, e^a.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x - a^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Per  $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + 4 \log x - a^2}{2\sqrt{x}},$$

pertanto  $f$  è crescente per  $0 < x \leq e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$  e  $x \geq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$ , e  $f$  è decrescente per  $e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \leq x \leq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$ .

$$x = e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di massimo relativo, } x = e^{-2+\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di minimo relativo.}$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

Se si estende la funzione col valore 0 in  $x = 0$ , esso diventa un punto a tangente verticale.

Per  $x > 0$ :

$$f''(x) = \frac{8 + a^2 - \log^2 x}{4x\sqrt{x}},$$

pertanto  $f$  è concava per  $0 < x \leq e^{-\sqrt{8+a^2}}$  e  $x \geq e^{\sqrt{8+a^2}}$  e  $f$  è convessa per  $e^{-\sqrt{8+a^2}} \leq x \leq e^{\sqrt{8+a^2}}$ .

$$x = e^{-\sqrt{8+a^2}}, x = e^{\sqrt{8+a^2}} \text{ punti di flesso.}$$

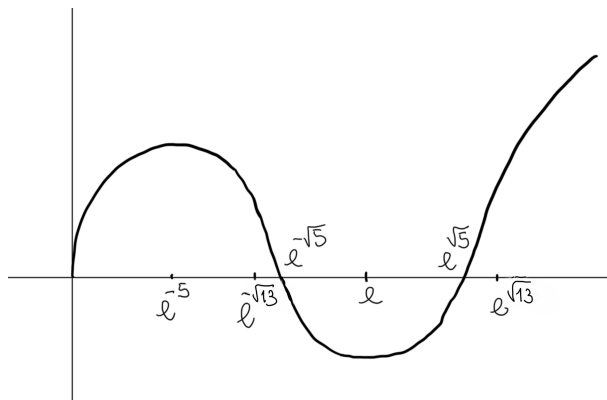


FIGURE 1. Grafico per  $a = \sqrt{5}$

**Esercizio 3.** [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha-1}(1+x)^2} dx.$$

Calcolarlo per  $\alpha = 2$ .

$[a = 2, 3]$

—

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha+1}(1+x)^2} dx$$

Calcolarlo per  $\alpha = 0$ .

$[a = 4, 5]$

Svolgimento: Consideriamo il primo testo, con  $a = 2$ . Chiamiamo  $f_\alpha$  la funzione integranda.

Studio della convergenza dell'integrale improprio

- Nell'eventuale polo 0 abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}} = -2,$$

quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se  $\alpha - \frac{3}{2} < 1$ , ovvero  $\alpha < \frac{5}{2}$ .

- A  $+\infty$  abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-1+2-\frac{3}{2}}}} = c \in (0, +\infty),$$

quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se  $\alpha - \frac{1}{2} > 1$ , ovvero  $\alpha > \frac{3}{2}$ .

Riassumendo, c'è convergenza se e solo se  $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$ .

Calcolo dell'integrale per  $\alpha = 2$

Con il cambio di variabile  $x^{1/2} = t$  si ha

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^3 - 2t}{t^2(1+t^2)^2} 2t dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Utilizzando il metodo di Hermite, cerchiamo le costanti  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2} = \frac{At + B}{1+t^2} + \frac{d}{dt} \frac{Ct + D}{1+t^2}.$$

Eseguendo i conti al lato destra dell'uguaglianza, siamo condotti a verificare

$$t^2 - 2 = At^3 + (B - C)t^2 + (A - 2D)t + B + C,$$

ed eguagliando i coefficienti troviamo  $A = D = 0$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = -\frac{3}{2}$ .

Quindi l'integrale proposto diventa:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ 2 \int_0^c -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt + \left[ 2 \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{t}{1+t^2} \right]_0^c \right\} \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ -\operatorname{arctg} t - 3 \frac{t}{1+t^2} \right]_0^c \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ -\operatorname{arctg} c - 3 \frac{c}{1+c^2} \right] \\
 &= -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Osserviamo che in alternativa al metodo di Hermite, si può calcolare l'integrale proposto nel seguente modo:

$$\int \frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2} dx = \int \left[ -2 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + 3 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right] dt = -2 \operatorname{arctg} t + 3 \left( -\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) + c,$$

dove abbiamo utilizzato la nota soluzione per parti

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(1+t^2)^2} t dt = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{1+t^2} t + \int \frac{1}{1+t^2} dt \right).$$

**Esercizio 4. [5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y \sin x = b \cos^2 x \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 2)]$$

Svolgimento: La soluzione  $y_h$  dell'equazione omogenea associata è:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin(x) dx \iff \ln |y| = -\cos(x) + k \iff y_h(x) = c \exp(-\cos(x)).$$

Per determinare la soluzione generale  $y(x)$  useremo il metodo della variazione delle costanti per avere

$$y(x) = c(x) \exp(-\cos(x)),$$

con

$$c'(x) = b \cos^2(x) \sin(x) \exp(\cos(x)).$$

Con una doppia integrazione per parti otteniamo quindi

$$y(x) = c \exp(-\cos(x)) - b(\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2) \quad x \in \mathbb{R},$$

con costante  $c = a + 2b$ .

**Esercizio 5. [5 punti]** Risolvere il seguente sistema in  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} w - z = \bar{z} \\ wz^2 = a\bar{w} \end{cases}.$$

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento:

Dalla prima equazione risulta  $w = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ , per cui deduciamo che  $w$  è un numero reale.

Quindi la seconda equazione è soddisfatta da:

- $w = 0$ , che inserito nella prima equazione dice  $\operatorname{Re} z = 0$  ed abbiamo le soluzioni

$$\begin{cases} z = y i \\ w = 0. \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}$$

- $w \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$ , che inserito nella prima equazione dà  $w = \pm 2\sqrt{a}$ . Abbiamo allora le ulteriori soluzioni

$$\begin{cases} z = \sqrt{a} \\ w = 2\sqrt{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\sqrt{a} \\ w = -2\sqrt{a}. \end{cases}$$