

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Esame orale:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}}}{3b(x - \sin x)}.$$

$[(a, b) = (2, 3), (-2, 3), (3, 2), (-3, 2)]$

Svolgimento: Si ha

$$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} 4 \cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \frac{ax}{2}}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^3x^3}{8} + o(x^3)\right)\right) \\ &= 4 \sin\left(\frac{\pi ax}{4} - \frac{\pi a^2x^2}{8} + \frac{\pi a^3x^3}{16} + o(x^3)\right) \\ &= \pi ax - \frac{\pi a^2x^2}{2} + \frac{\pi a^3x^3}{4} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3 a^3 x^3}{16} + o(x^3) \\ &= \pi ax - \frac{\pi a^2x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3) \end{aligned}$$

e pertanto il numeratore diventa

$$\begin{aligned} 4 \cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}} &= \pi ax - \frac{\pi a^2x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3) - \pi ax \left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{(12\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3), \end{aligned}$$

e il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{(12\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)}{\frac{b}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{(12\pi - \pi^3)a^3}{48b}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-a} e^{\frac{1}{x-a}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$$[a = 2, -2, 3, -3]$$

Svolgimento: In questo svolgimento studieremo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{\frac{1}{x}}$, di cui i grafici richiesti sono traslazioni.

- Non vi sono simmetrie (né nelle versioni proposte).
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{\frac{4}{3}}}(x-3)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$ (no asintoti obliqui).

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

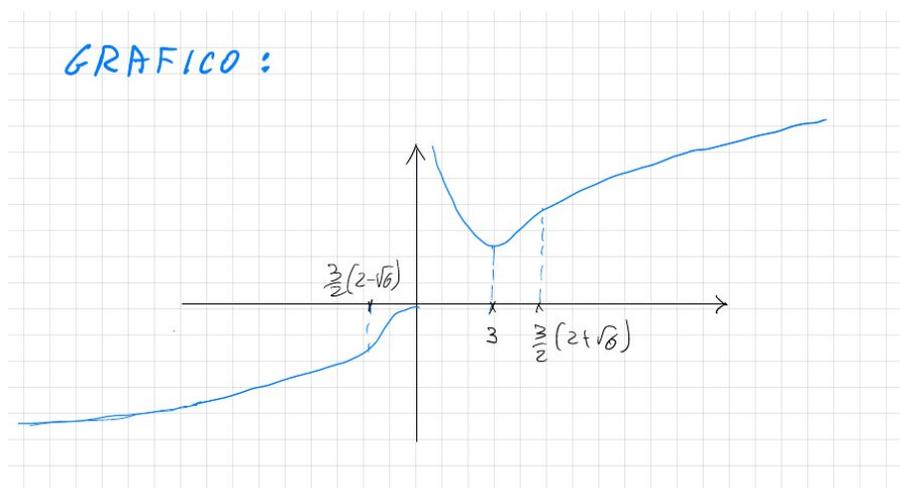
3 è quindi punto di minimo relativo, con $f(3) = (3e)^{\frac{1}{3}}$.

- Calcoliamo $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{9x^{\frac{11}{3}}}(2x^2 - 12x - 9)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Risulta $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 0^-$ (e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = +\infty$).

- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}(2-\sqrt{6})] \cup (0, \frac{3}{2}(2+\sqrt{6})]$.

Abbiamo quindi i seguenti due punti di flesso: $\frac{3}{2}(2 \pm \sqrt{6})$.



Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{ax+1}} \frac{x^{1+\alpha}}{(ax+2)^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

[$a = 5, 4, 3, 2$]

Svolgimento: In tutti i casi si ha $a > 0$. Sia f_α la funzione integranda. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Bisogna quindi verificare l'integrabilità in un intorno destro di 0, in un intorno di 1 e in un intorno di $+\infty$

Risulta

$$f_\alpha(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{4} x^{1+\alpha} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto f_α è integrabile in un intorno destro di 0 se e solo se $\alpha \geq -2$. Inoltre

$$f_\alpha(x) \sim \frac{|x-1|^\alpha}{(a+2)^2 \sqrt{a+1}} \text{ per } x \rightarrow 1$$

e quindi f_α è integrabile in un intorno di 1 se e solo se $\alpha > -1$.

D'altra parte

$$f_\alpha(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{a^2 \sqrt{ax}^{\frac{3}{2}-\alpha}} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Pertanto f_α è integrabile in $[1, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

Segue che f_α è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$: con la sostituzione $\sqrt{ax+1} = y$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = - \int \frac{1}{y^2+1} dy + 2 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy.$$

Integrando per parti

$$\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{1}{2} \int y \left(\frac{1}{y^2+1} \right)' dy = -\frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy$$

da cui segue

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{y}{y^2+1}.$$

Si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{y}{y^2+1} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto si conclude

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \frac{1}{a^2}.$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 + a^2}{xy}, \\ y(1) = -a, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: Equazione a variabili separabili senza soluzioni stazionarie, secondo membro definito per $x \neq 0, y \neq 0$. Poiché $y(1) < 0$ deve essere $y(x) < 0$ per ogni x . Separando le variabili si ottiene

$$\frac{1}{2} \log(y^2 + a^2) = \log |x| + c$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $c = \log(\sqrt{2}a)$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = -a\sqrt{2x^2 - 1}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = (\cos x)^{a \sin x}.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: Si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pertanto sarà sufficiente sviluppare $\cos(x)$ fino all'ordine 4 così come $\ln(\cos(x))$. Pertanto

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

e

$$\log(\cos(x)) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Ora

$$\begin{aligned} (\cos x)^{a \sin x} &= \exp(a \sin(x) \log(\cos(x))) \\ &= \exp\left(a\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\right) \\ &= \exp\left(-a \frac{x^3}{2} + o(x^5)\right) \\ &= 1 - a \frac{x^3}{2} + o(x^5). \end{aligned}$$