Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta settembre 2022 – I appello

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}}\right)(n+a\log^3 n)^2.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento:
Notiamo che

$$(n+a\log^3 n)^2 = n^2\left(1+\frac{a\log^3 n}{n}\right)^2 = n^2(1+o(1)) \qquad \text{per } n\to\infty,$$

pertanto sarà sufficiente sviluppare l'altro fattore fino all'ordine 2. Ora

$$\cos\sqrt{\frac{a}{n}} = 1-\frac{a}{2n}+\frac{a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}} &= \frac{1}{\sqrt{1+a/n+1/n^2}}\\ &= \left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{1}{2}(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{3}{8}(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2})^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1-\frac{a}{2n}+\left(\frac{3a^2}{8}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}} = \left(\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e, in conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}}\right)(n+a\log^3 n)^2 = \frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln|ax| - 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:
Dominio: La funzione è pari. Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm e/a\}$.
Limiti di frontiera:

$$\begin{aligned} f(x) &\to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty \\ f(x) &\to +\infty \quad \text{per } x \to \left(\frac{e}{a}\right)^+ \\ f(x) &\to -\infty \quad \text{per } x \to \left(\frac{e}{a}\right)^- \\ f(x) &\to 0 \quad \text{per } x \to 0^+. \end{aligned}$$

Pertanto f ha un asintoto verticale in $\frac{e}{a}$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

la funzione non ha asintoti obliqui. Il punto 0 è una discontinuità eliminabile.
Derivata: La funzione è derivabile per ogni $x \in D$ e

$$f'(x) = \frac{x(2\ln|ax| - 3)}{(\ln|ax| - 1)^2}.$$

Consideriamo il caso $x > 0$. Abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}.$$

Nel caso $x < 0$ invece

$$f'(x) > 0 \iff 0 > x > -\frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}.$$

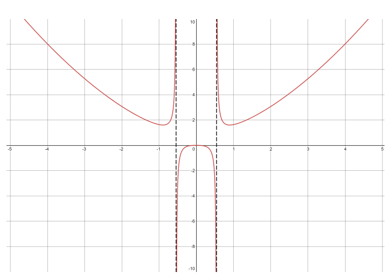
Quindi

$$\pm\frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}$$

sono punti di minimo locale.
Osserviamo che, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x),$$

la funzione si può estendere per continuità ad una funzione derivabile in $x = 0$.



Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + a}{e^{2x} + 1}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: La funzione integranda è continua per ogni $x \geq 0$, l'integrale è improprio a causa dell' estremo a $+\infty$. L' integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.
Per calcolare l' integrale consideriamo il cambio di variabile $y = e^x$, che da $dx = dy/y$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^x + a}{e^{2x} + 1}\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{y + a}{y(y^2 + 1)}\, dy \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1 - ay}{y^2 + 1)}\, dy + \int_1^{+\infty} \frac{a}{y}\, dy \\
&= \Big[\arctan(y) - \frac{a}{2} \ln(1 + y^2) + a \ln(y)\Big]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4} + a \lim_{X \to +\infty} \ln\left(\frac{X}{\sqrt{1 + X^2}}\right) + \frac{a}{2} \ln(2) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \ln(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' \sin x + y \cos x = e^x \\ y(a) = 0 \end{cases} .$$

$[a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi]$

Svolgimento:
Si noti che $\sin(a) \neq 0$. Consideriamo l' equazione omogenea associata

$$y' \sin x + y \cos x = 0,$$

la cui soluzione generale soddisfa

$$\begin{aligned} y' \sin x + y \cos x = 0 &\iff \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &\iff \ln(y(x)) = -\ln(\sin(x)) + \text{cost} \\ &\iff y(x) = \frac{C}{\sin(x)}, \end{aligned}$$

per $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$. Utilizziamo il metodo di variazione delle costanti per determinare la soluzione generale. Cerchiamo una soluzione della forma

$$y(x) = \frac{C(x)}{\sin(x)},$$

per una funzione $C(x)$ da determinare. Allora

$$\begin{aligned} y' \sin x + y \cos x = e^x &\iff \frac{C'(x) \sin x - C(x) \cos x}{\sin^2 x} \sin x + \frac{C(x)}{\sin x} \cos x = e^x \\ &\iff C'(x) = e^x. \end{aligned}$$

La soluzione generale è

$$y(x) = \frac{e^x + K}{\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo che l' unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{e^x - e^a}{\sin(x)}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \quad \left[1 - 2z - z|z| = 0, \quad z|z| - 2z - 2 = 0, \quad z|z| - 2 + 2z = 0 \right].$$

Svolgimento:
Sia $z = x + iy$, allora

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \iff (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} - 2(x+iy) - 1 = 0 \iff \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 1 & = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y & = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema, per la parte immaginaria y, è verificata solo se

$$y = 0, \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2.$$

Notiamo che $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ non è ammissibile perché in contraddizione con la prima equazione, quella della parte reale x. Pertanto $y = 0$. La prima equazione diventa $x|x| - 2x - 1 = 0$.
Consideriamo il caso $x < 0$. La parte reale x verifica

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1.$$

Nel caso $x > 0$ abbiamo

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Notiamo che $1 - \sqrt{2} < 0$ e, pertanto, non può essere soluzione.
Le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z|z| - 2z - 1 = 0$ sono

$$z = -1 \quad \text{e} \quad z = 1 + \sqrt{2}.$$