

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 12 settembre 2022

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{ax^2}} \log |x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{ax^4} - 1}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento. Visto che in tutti i casi $a > 0$ allora, per $n \in \mathbb{N}$ si ha (ponendo $t = \frac{1}{|x|}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^{-\frac{1}{ax^2}} \log |x|}{x^n} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{a}} \log |t| = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, $e^{-\frac{1}{ax^2}} \log |x| = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizzando gli sviluppi

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

per il numeratore si trova

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{ax^2}} \log |x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2 &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + o(x^5) \\ &= \frac{2}{3}x^4 + o(x^5), \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Utilizzando lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + o(t), \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

per il denominatore si trova

$$e^{ax^4} - 1 = ax^4 + o(x^4), \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{ax^2}} \log |x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{ax^4} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^5)}{ax^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{2}{3a} = \begin{cases} \frac{2}{15} & \text{per } a = 5 \\ \frac{1}{6} & \text{per } a = 4 \\ \frac{2}{9} & \text{per } a = 3 \\ \frac{1}{3} & \text{per } a = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{cx} \sqrt{|x-a| - b}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[(a, b, c) = (3, 1, 2), (3, 2, 3), (-3, 2, 1), (-2, 3, 1)]$$

Svolgimento. In tutti i casi si ha $b > 0$ e $c > 0$. L'espressione $\sqrt{|x-a| - b}$ è definita per $|x-a| \geq b \Leftrightarrow x \in (-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty)$. Quindi il dominio di f è $\text{dom} f = (-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty)$. La funzione è continua in ogni punto del suo dominio. In tutti i casi tranne che nel quarto si ha $0 \in \text{dom} f$ e $f(0) = \sqrt{|a| - b} > 0$. Inoltre, in tutti i casi si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{dom} f$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \pm b$.

Ricordando che si ha sempre $c > 0$ si trova

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \rightarrow -\infty$ mentre f non ha un asintoto (né orizzontale né obliquo) per $x \rightarrow +\infty$. Infine, visto che $\text{dom} f$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ e f è continua possiamo concludere che non ha asintoti verticali.

f è derivabile in tutti i punti interni del dominio. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb + 1), & \text{per } x \in (a+b, +\infty) \\ \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb - 1), & \text{per } x \in (-\infty, a-b) \end{cases}$$

Per $x \in (a+b, +\infty)$ il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2c(x-a) - 2cb + 1 > 1$.

Per $x \in (-\infty, a-b)$ il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2c(a-x) - 2cb - 1$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, a-b - \frac{1}{2c})$, $f'(x) < 0$ per $x \in (a-b - \frac{1}{2c}, a-b)$ e $f'(a-b - \frac{1}{2c}) = 0$. Possiamo quindi concludere che f è strettamente crescente in $(-\infty, a-b - \frac{1}{2c})$ e in $(a+b, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(a-b - \frac{1}{2c}, a-b)$. $a-b - \frac{1}{2c}$ è un punto di massimo locale mentre $a \pm b$ sono punti di minimo globale.

Resta da discutere la derivabilità nei punti di frontiera $a \pm b$. Utilizzando il teorema di de l'Hôpital si trova

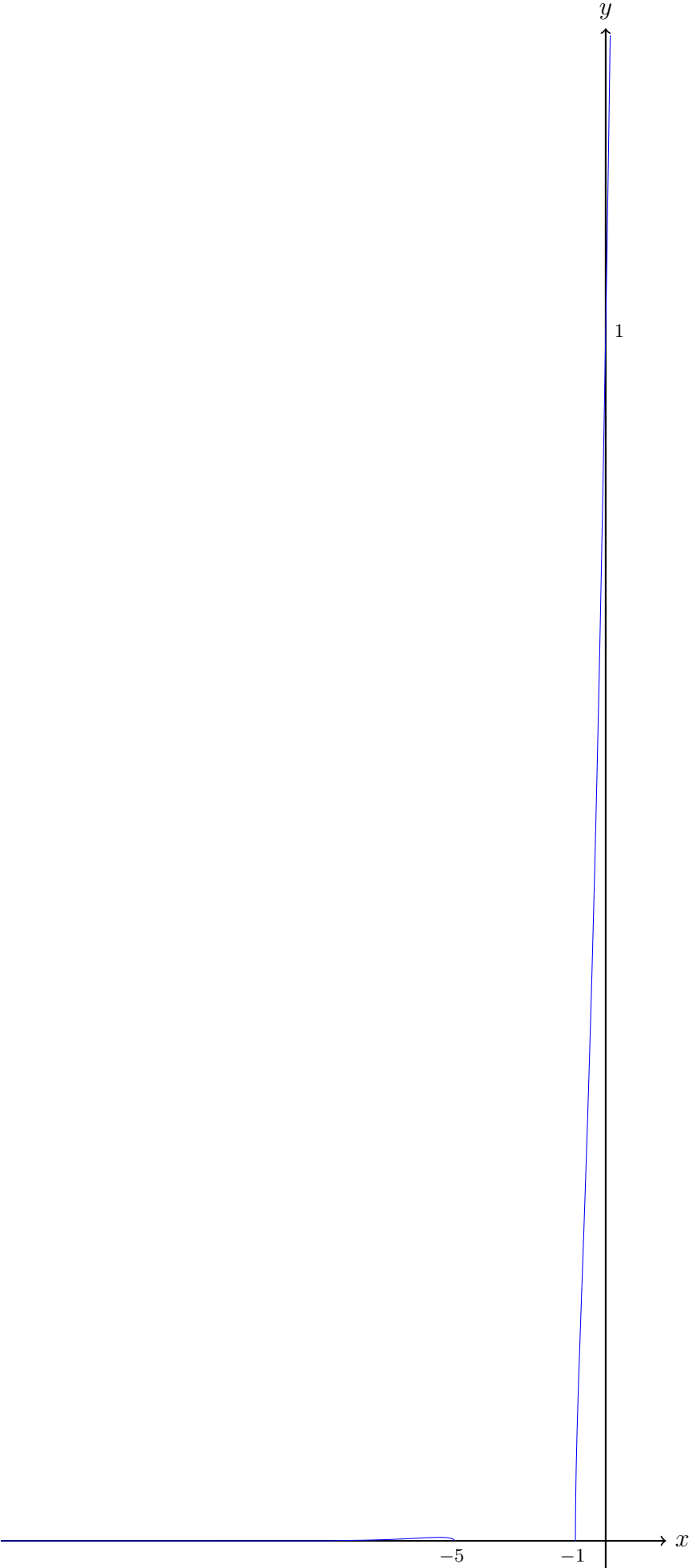
$$\lim_{x \rightarrow (a+b)^+} \frac{f(x) - f(a+b)}{x - (a+b)} = \lim_{x \rightarrow (a+b)^+} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb + 1) = \frac{e^{c(a+b)}}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (a-b)^-} \frac{f(x) - f(a-b)}{x - (a-b)} = \lim_{x \rightarrow (a-b)^-} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb - 1) = -\frac{e^{c(a+b)}}{0^+} = -\infty$$

Quindi f non è derivabile in $a \pm b$ (punti a tangente verticale).

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $(a, b, c) = (-3, 2, 1)$.



Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento. In tutti i casi si ha $a \geq 2 > 0$. Inoltre la funzione integranda è non negativa nell'intervallo di integrazione per ogni valore reale del parametro α . Studiamo prima la convergenza a $+\infty$. Si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq \frac{e^{-|\alpha|x}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq \frac{x^{a|\alpha|} e^{-|\alpha|x}}{(x+1)(x^2+a^2)}$$

per ogni $x \geq 1$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \neq 0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a|\alpha|} e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}}{(x+1)(x^2+a^2)} = 0.$$

Di conseguenza

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}$$

definitivamente per $x \rightarrow +\infty$ e si ha quindi convergenza a $+\infty$ per il criterio del confronto. Se $\alpha = 0$ si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} \sim \frac{1}{x^3}$$

per $x \rightarrow +\infty$ e si ha nuovamente convergenza a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotico. In conclusione si ha convergenza a $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza in (un intorno destro di) 0. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \sim \frac{1}{a^2|x|^{a\alpha-\alpha^2}}$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha integrabilità in 0 se e solo se $a\alpha - \alpha^2 < 1$ ossia, ricordando che $a \geq 2$, se e solo

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right).$$

Riassumendo l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha|x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} dx.$$

è convergente se e solo se

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right).$$

. Passiamo ora al calcolo per $\alpha = 0$. In questo caso l'integrale è convergente perché, essendo $a \geq 2$, si ha $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0$. Siamo portati a calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} dx.$$

Dalla teoria sappiamo che

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2+a^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D . Visto che

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2+a^2} = \frac{(A+B)x^2 + (B+D)x + a^2A + D}{(x+1)(x^2+a^2)}$$

si deve avere $A+B=D+B=0$ e $a^2A+D=1$. Quindi $A=D=\frac{1}{a^2+1}$ e $B=-\frac{1}{a^2+1}$ da cui si trova

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2+1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+a^2} \right).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} dx &= \frac{1}{a^2+1} \left(\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x^2+a^2} dx - \int \frac{x}{x^2+a^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{a^2+1} \left(\log|x+1| + \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} \log(x^2+a^2) \right) + C \\ &= \frac{1}{a^2+1} \log\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + \frac{1}{a^3+a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2+1} \left(\log\left(\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2+a^2}}\right) + \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) - \log\left(\frac{1}{a}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2a^3+2a} + \frac{\log a}{a^2+1}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (ax + b)\sqrt{\frac{y}{1-x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

$$[(a, b) = (5, 3), (4, 2), (6, 4), (7, 5)]$$

Svolgimento. Si tratta di una EDO del primo ordine a variabili separabili. La soluzione cercata non è stazionaria e può essere determinata ponendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{ax + b}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y} + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx}(1-x^2) dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

e

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Abbiamo quindi

$$\sqrt{y} = -\frac{a}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{b}{2}\arcsin x + C.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si trova $C = 1 + \frac{a}{2}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y = \left(\frac{a}{2}(1 - \sqrt{1-x^2}) + \frac{b}{2}\arcsin x + 1 \right)^2.$$

Esercizio 5 [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\arctan x}{1 + e^{ax^2}}.$$

$$[a = 3, -3, 2, -2]$$

Svolgimento. Per $t \rightarrow 0$ abbiamo

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^6)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$$

Di conseguenza, per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\arctan x}{1 + e^{ax^2}} &= \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{2 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 + o(x^5)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{1 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x^4 + o(x^5)} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \right) \left(1 - \frac{a}{2}x^2 - \frac{a^2}{4}x^4 + \frac{a^2}{4}x^4 + o(x^5) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \right) \left(1 - \frac{a}{2}x^2 + o(x^5) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{6}x^5 + o(x^6) \right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{2+3a}{12}x^3 + \frac{6+5a}{60}x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

che è lo sviluppo richiesto.