Esistenza dell'estremo superiore

Definizione 1. *La coppia di insiemi* (A, B) *è una sezione di* $\mathbb{R}$ *se* $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$

$$a \leq b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Assioma di Dedekind (o di continuità). *Per ogni sezione* (A, B) *di* $\mathbb{R}$ *esiste* $S \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$a \leq S \leq b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$

tale elemento si dice di separazione.

Osservazione 2. L'elemento di separazione è unico.

Se infatti esistessero due elementi di separazione distinti, detti L_1, L_2 con $L_1 < L_2$, allora considerando che

$$L_1 < \frac{L_1 + L_2}{2} < L_2$$

potremmo dedurre sia che $\frac{L_1+L_2}{2} \in B$, dalla prima disuguaglianza, sia che $\frac{L_1+L_2}{2} \in A$, dalla seconda disuguaglianza. Ma allora $\frac{L_1+L_2}{2} \in A \cap B$, contro l'ipotesi che $A \cap B = \emptyset$.

Proposizione 3. *Il massimo di un insieme è unico ed è il minimo dei maggioranti.*

Dim. Sia $X \subset \mathbb{R}$. Se

$$M_1 = \max X \quad \text{e} \quad M_2 = \max X$$

allora

$$M_1 \leq M_2 \leq M_1$$

ove la prima disuguaglianza segue dal fatto che M_2 è massimo ed $M_1 \in X$ e la seconda segue dal fatto che M_1 è massimo ed $M_2 \in X$. Quindi $M_1 = M_2$, che prova il primo punto.

Sia $M = \max X$, allora

$$x \leq M \qquad \forall x \in X, \tag{1}$$

perché M è il massimo, e

$$M \leq L \qquad \text{per ogni maggiorante } L \text{ di } X, \tag{2}$$

perché $M \in X$. Da (1) segue che M è un maggiorante di X e da (2) segue che è il minimo dei maggioranti di X.

q.e.d.

Ringrazio Michele Cianfriglia per la revisione di questa nota.

Teorema 4. *Se $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed X limitato superiormente allora esiste*

$$S := \min\{k \in \mathbb{R} \ : \ k \text{ è maggiorante di } X\}.$$

Dim. Dalla proposizione precedente segue che la tesi è vera se X ammette massimo. Facciamo quindi la dimostrazione nel caso rimanente in cui non esista il massimo di X.

Poniamo:

$$B := \{k \in \mathbb{R} \ : \ k \text{ è maggiorante di } X\}, \qquad A := \mathbb{R} \setminus B$$

(B è l'insieme dei maggioranti). Allora

$$A \neq \emptyset, \ \text{ infatti } x \in X \ \Rightarrow \ x \in A \ \text{ perché } X \text{ non ha massimo,}$$

$$B \neq \emptyset \text{ perché } X \ \text{ supposto limitato.}$$

Inoltre

$$a < b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

poiché se b è un maggiorante e $a \geq b$ allora anche a è un maggiorante quindi non può appartenere ad A.

Abbiamo allora che (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$ e, per l'assioma di Dedekind esiste uno (ed un solo) elemento separatore S, ovvero un valore S che verifica

$$a \leq S \leq b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B. \tag{3}$$

Siccome $X \subseteq A$, da (3) deduciamo in particolare che

$$x \leq S \leq b \qquad \forall x \in X, \quad \forall b \in B. \tag{4}$$

La prima disuguaglianza in (4) ci dice che S è un maggiorante e la seconda che è il minimo dei maggioranti.

q.e.d.