Versione 15 set. 2020

Giambattista Marini

Algebra Lineare

e

Geometria Euclidea

Modulo da 12 crediti

Questo testo è rivolto a studenti iscritti a corsi di laurea in materie scientifiche, vengono trattati gli argomenti che normalmente si svolgono nel corso di geometria.

"non entri nessuno che non conosca la geometria"

(epigrafe all'ingresso dell'accademia di Platone)

Indice

Altro materiale didattico si trova nella sezione

“**Area Esami**”

della mia pagina web

www.mat.uniroma2.it/˜marini

INTRODUZIONE

I prerequisiti sono minimi. Si assume che lo studente abbia un minimo di dimestichezza con l'insiemistica e l'algebra elementare che si studiano nella scuola secondaria. Nel capitolo zero vengono richiamate le nozioni di insiemistica, comprese quelle riguardanti le funzioni tra insiemi, utili nel resto del testo.

La trattazione viene mantenuta ad un livello molto elementare, solo passando al paragrafo dedicato agli approfondimenti di algebra lineare inevitabilmente c'è un piccolo salto di qualità; a quel punto della trattazione è giusto assumere che lo studente sia matematicamente un po' più maturo, quindi in grado di recepire insegnamenti a un livello più avanzato.

Si dà particolare enfasi alle definizioni. La matematica è fatta al 90% di definizioni! È solo chiarendo in modo formale ed inequivocabile di cosa si sta parlando che è possibile svolgere un lavoro rigoroso e gettare le basi necessarie agli eventuali sviluppi. I concetti che ci sembrano familiari spesso nascondono delle insidie. Per contro, il rigore necessita di astrazione, ma quello dell'astrazione non è un terreno dove mancano punti fermi e certezze, il rigore e l'astrazione conducono a semplificazioni e chiarificazioni che permettono di risolvere problemi altrimenti inattaccabili. Perché la strada sia in discesa si deve solo comprendere che non c'è nulla di mistico o filosofico o immaginario nelle astrazioni, queste sono solo scelte "concrete" dei matematici: ad esempio, due rette parallele si incontrano all'infinito semplicemente perché qualcuno ha deciso di aggiungere ad entrambe uno stesso punto, che sarà il loro punto di intersezione, ed ha deciso che il punto aggiunto venga chiamato punto all'infinito (citiamo quest'esempio nonostante in questo testo non vi sia neanche un cenno di geometria proiettiva, perché emblematico). Naturalmente quanto appena detto è tutt'altro che fine a se stesso, come ogni altra astrazione si inserisce in una costruzione elegante e ricca di proprietà nonché portatrice di indubbi vantaggi.

Gli spazi vettoriali, e questo testo è un libro sugli spazi vettoriali, sono oggetti astratti. Eppure, a dispetto dell'apologia dell'astrazione di cui sopra, evitiamo astrazioni gratuite e cerchiamo di accompagnare i concetti discussi con molti esempi concreti.

Gli esercizi che si incontrano nel testo sono parte integrante della teoria, possono essere funzionali a scopi diversi, come quello di fissare le nozioni viste o quello di acquisire quella sensibilità utile, se non indispensabile, per poter andare avanti. In ogni caso, non devono essere saltati ma svolti immediatamente dallo studente. Nella quasi totalità dei casi si tratta di esercizi che sono applicazioni dirette delle definizioni o dei teoremi visti, lo studente che non riuscisse a risolverli è invitato a rileggere il paragrafo che sta studiando, solo come ultima spiaggia può andare a vedere le soluzioni!

L'ultimo capitolo è un capitolo di esercizi di riepilogo e testi d'esame. Questi esercizi servono a familiarizzare con la materia e a confrontarsi con essa, le loro soluzioni come strumento di verifica ed autovalutazione e non come mezzo per l'apprendimento. Lo studente che non riuscisse a svolgerli non deve "imparare" a svolgerli ma deve tornare indietro allo studio della teoria. Imparare "come" si fa una certa cosa non serve a nulla se non si comprende quello che si sta facendo. Sapete qual è la differenza tra uno studente che ha capito la teoria e uno che non l'ha capita? ...quello che l'ha capita dice che gli esercizi (i testi d'esame) sono tutti uguali, l'altro dice che sono tutti diversi!

Infine, quando introduciamo un nuovo termine (quasi sempre all'interno di una definizione) lo indichiamo in corsivo, ad esempio scriveremo "la *traccia* di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale".

0

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

In questo breve capitolo raccogliamo alcune nozioni di base che chiunque faccia uso della matematica deve conoscere, nonché introduciamo alcuni simboli del linguaggio matematico di uso comune.

§1. Insiemistica di base.

In matematica il concetto di insieme è fondamentale. Secondo il nostro vocabolario, un insieme è una "collezione, classe, aggregato di elementi che solitamente si individuano o elencandoli o assegnando una proprietà che li caratterizza". Naturalmente a questo punto viene da chiedersi cosa sia una collezione, un elemento, un elenco e/o una proprietà! L'impossibilità di rispondere a questa domanda senza ricorrere a sinonimi o ad altri concetti che a loro volta hanno bisogno di essere definiti, cadendo così in un circolo vizioso senza vie d'uscita, è il motivo per il quale il concetto di insieme viene considerato come primitivo, non definibile. Premesso che un discorso più approfondito apparterrebbe all'area della logica matematica e non è assolutamente tra gli scopi di questo testo, funzionalmente ad alcune esigenze concrete di questo testo e comuni ai corsi di geometria ed analisi (per le lauree in matematica, fisica, chimica, ingegneria, scienze dei media eccetera) illustriamo esempi di insiemi e le costruzioni che si fanno a partire da uno o più insiemi.

Gli elementi di un insieme possono essere oggetti astratti. In particolare, ad esempio, è lecito considerare insiemi i cui elementi sono essi stessi insiemi; ma non si deve esagerare: parlare dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stesso come elemento conduce ad una antinomia[1], questo è il famoso paradosso di Russell. Può accadere di essere interessati ad una collezione di insiemi ma per una qualche ragione, anche solo linguistica, non si è interessati a vedere la collezione stessa come insieme, in questo caso si parla di *famiglia* di insiemi. Si considera insieme, anche l'"insieme" privo di elementi. Questo viene chiamato *insieme vuoto* e viene denotato col simbolo $\emptyset$. Gli insiemi vengono denotati tra parentesi graffe, così, ad esempio, l'insieme costituito dalle prime tre lettere del nostro alfabeto è l'insieme $\{a, b, c\}$. Nel linguaggio matematico si usano i simboli

$$\underset{\text{(esiste)}}{\exists}\ ,\quad \underset{\text{(esiste un unico)}}{\exists!}\ ,\quad \underset{\text{(per ogni)}}{\forall}\ ,\quad \underset{\text{(tale che)}}{|}\ ,\quad \underset{\text{(uguale, per definizione)}}{:=}\ ,$$

$$\underset{\text{(implica)}}{\Longrightarrow}\ ,\quad \underset{\text{(è implicato da)}}{\Longleftarrow}\ ,\quad \underset{\text{(se e solo se)}}{\Longleftrightarrow}\ ,$$

("tale che" viene anche indicato coi due punti). I simboli "esiste" e "per ogni" vengono chiamati *quantificatori*. Quanto agli insiemi numerici, gli insiemi dei numeri *naturali*, *interi*, *razionali*, *reali*, *complessi* si denotano rispettivamente coi simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:

$$\underset{\text{(naturali)}}{\mathbb{N}}\ ,\quad \underset{\text{(interi)}}{\mathbb{Z}}\ ,\quad \underset{\text{(razionali)}}{\mathbb{Q}}\ ,\quad \underset{\text{(reali)}}{\mathbb{R}}\ ,\quad \underset{\text{(complessi)}}{\mathbb{C}}\ ,$$

(la costruzione di questi insiemi non la discutiamo, affinché la notazione sia chiara almeno in termini naïves, ricordiamo che i naturali sono gli interi non negativi, i razionali sono le frazioni aventi numeratore e denominatore intero, i reali sono i numeri che scritti in forma decimale possono anche avere infinite cifre dopo la virgola, i numeri complessi li introduciamo

[1] È possibile dimostrare che se non contiene se stesso allora deve contenere se stesso e, viceversa, che se contiene se stesso allora non può contenere se stesso!

in Appendice). Tornando ai quantificatori e agli altri simboli introdotti, ad esempio,

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{sen} x \geq 0 \,\} \qquad \text{è} \qquad \text{“l'insieme dei numeri reali } x \text{ tali che } \mathrm{sen} x \geq 0\text{”}.$$

Un sottoinsieme B di un insieme A è un insieme i cui elementi (tutti) appartengono anche ad A, in questo caso diremo che B è *incluso* in A o, equivalentemente, che A contiene B. Quanto all'appartenenza di un elemento ad un insieme e all'inclusione tra insiemi si usa la simbologia che segue:

$a \in A$	$A \ni a$	$B \subseteq A$	$A \supseteq B$
(a appartiene ad A)	(A contiene l'elemento a)	(B è incluso in A)	(A contiene B)

(usiamo lettere minuscole per indicare elementi, maiuscole per indicare insiemi). Un simbolo, se barrato, assume il significato opposto: “$\notin$” significa “non appartiene”, “$\neq$” significa “diverso”, “$\nexists$” significa “non esiste”, eccetera. Dati due insiemi A e B si definiscono la loro *intersezione* $A \cap B$ e la loro *unione* $A \cup B$ rispettivamente come l'insieme degli elementi comuni ad entrambi e l'insieme degli elementi in uno dei due insiemi in questione, in simboli:

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{\, x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \in B \,\} \\ A \cup B &:= \{\, x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \,\} \end{aligned}$$

Gli insiemi A e B si dicono *disgiunti* se hanno intersezione vuota, cioè se $A \cap B = \emptyset$. Si definisce inoltre la differenza insiemistica $A \smallsetminus B$ come l'insieme degli elementi appartenenti ad A ma non appartenenti a B. In simboli

$$A \smallsetminus B \quad := \quad \{\, x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \notin B \,\}\,.$$

Qualora si abbia B incluso in A, la differenza insiemistica $A \smallsetminus B$ si definisce *complementare di* B *in* A e si denota con B^c (con A sottinteso).

Naturalmente, intersezione ed unione si definiscono più in generale per famiglie arbitrarie di insiemi: l'intersezione è l'insieme degli elementi comuni a tutti gli insiemi considerati; l'unione è l'insieme degli elementi in uno degli insiemi in questione. In simboli, data una famiglia $\{A_i\}$ di insiemi, si pone quanto segue:

$$\begin{aligned} \bigcap A_i &:= \{\, x \mid x \in A_i\,,\ \forall\, A_i \,\} \\ \bigcup A_i &:= \{\, x \mid \exists\, A_i \ \text{ con } \ x \in A_i \,\} \end{aligned}$$

Nota. In matematica, “uno” significa sempre “almeno uno”, così come “esiste un” significa sempre “esiste almeno un”, cioè uno o più (ovviamente a meno che l'unicità non venga dichiarata esplicitamente). Ad esempio, con frasi del tipo “quel sistema ammette una soluzione” oppure “esiste un elemento che soddisfa la tale proprietà” non si esclude che di soluzioni del sistema ce ne possano essere più d'una o che di tali elementi ce ne possano essere più d'uno.

Vediamo alcuni insiemi notevoli.

Definizione 1.1. Sia A un insieme. L'*insieme delle parti* di A, denotato con $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. In simboli

$$\mathcal{P}(A) \quad := \quad \{\, B \mid B \subseteq A \,\}$$

Nel caso dell'esempio dell'insieme delle prime tre lettere dell'alfabeto si ha

$$\mathcal{P}(\{a,\, b,\, c\}) \quad = \quad \big\{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\, b\},\ \{a,\, c\},\ \{b,\, c\},\ \{a,\, b,\, c\} \,\big\}$$

Esercizio 1.2. Sia A un insieme costituito da n elementi, determinare il numero di elementi di $\mathcal{P}(A)$.

Definizione 1.3. Siano A e B due insiemi. Il *prodotto cartesiano* di A con B, denotato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie (a, b) al variare di a in A e b in B, dove, naturalmente, due coppie (a, b) e (a', b') sono uguali se e solo se $a = a'$ e $b = b'$. In simboli

$$A \times B \quad := \quad \{\, (a, b) \mid a \in A \,,\ b \in B \,\}$$

Esercizio 1.4. Siano A e B due insiemi, rispettivamente di n ed m elementi. Determinare il numero di elementi di $A \times B$.

Definizione 1.5. Sia A un insieme. Un *ricoprimento* di A è una famiglia di sottoinsiemi di A la cui unione è uguale ad A. Una *partizione* di A è un ricoprimento di A costituito da insiemi non vuoti a due a due disgiunti.

Un concetto equivalente al concetto di partizione è quello di relazione d'equivalenza.

Definizione 1.6. Sia A un insieme. Una *relazione d'equivalenza* su A è un sottoinsieme $\Omega \subseteq A \times A$ tale che

$$\underset{\text{(proprietà riflessiva)}}{(a,\, a) \in \Omega\,,\ \forall\, a \in A} \qquad \underset{\text{(proprietà simmetrica)}}{(a,\, b) \in \Omega \ \Rightarrow\ (b,\, a) \in \Omega} \qquad \underset{\text{(proprietà transitiva)}}{(a,\, b),\, (b,\, c)\, \in \Omega \ \Rightarrow\ (a,\, c) \in \Omega}$$

Solitamente, una relazione d'equivalenza viene denotata col simbolo $\sim$. Inoltre, per indicare che la coppia (a, b) vi appartiene si usa scrivere $a \sim b$. Si preferisce usare questa notazione perché in termini forse meno formali ma sicuramente più intelligibili una relazione d'equivalenza su A di fatto è una regola (riflessiva simmetrica e transitiva) che consenta di dire quali elementi di A siano "in relazione". Nella nuova notazione le richieste citate sono

$$\underset{\text{(proprietà riflessiva)}}{a \sim a\ \forall\ a \in A} \qquad \underset{\text{(proprietà simmetrica)}}{a \sim b \ \Rightarrow\ b \sim a} \qquad \underset{\text{(proprietà transitiva)}}{a \sim b \text{ e } b \sim c \ \Rightarrow\ a \sim c}$$

Inoltre, dato $a \in A$ si definisce *classe di equivalenza* di a, e si denota con $[a]$, l'insieme degli elementi in relazione con a. In simboli

$$[a] \quad := \quad \{\ b \in A \mid a \sim b\ \}$$

Esercizio 1.7. Provare che dare una partizione è come dare relazione d'equivalenza. Più precisamente, provare quanto segue:

i) data una partizione, mettendo in relazione a con b se e solo se c'è un insieme della partizione al quale appartengono entrambi si ottiene una relazione d'equivalenza;

ii) data una relazione d'equivalenza, considerando l'insieme delle classi d'equivalenza si ottiene una partizione;

iii) le costruzioni *i)* e *ii)* sono l'una l'inversa dell'altra.

§2. Funzioni.

Siano A e B due insiemi. Una *applicazione* o *funzione* da A a B è una legge f che ad ogni elemento di A associa un elemento di B. Una tale legge la denoteremo scrivendo $f : A \to B$. In questo caso A e B si chiamano rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione f. Volendo indicare chi è f, spesso si usa la notazione che segue:

$$\begin{array}{rccc} f\ :\ A & \longrightarrow & B \\ a & \mapsto & \text{“descrizione di } f(a)\text{”} \end{array}$$

Quando è chiaro dal contesto chi sono dominio e codominio si usa denotare una funzione scrivendo $b = f(a)$, ovviamente intendendo che ad a si associa l'elemento $f(a)$. Consideriamo un'applicazione $f : A \longrightarrow B$. Dato $a \in A$, l'elemento $f(a)$ si chiama *immagine di* a. L'immagine di f, che denotiamo scrivendo $\mathrm{Im} f$, è il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi del tipo $f(a)$ (con a che varia tra gli elementi di A). In simboli,

$$\mathrm{Im} f \quad := \quad \big\{ b \in B \ \big|\ \exists\ a \in A \text{ con } f(a) = b \big\}$$

Esempio. La funzione

$$\begin{array}{rccc} f\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sen}\,(x) \end{array}$$

denota la funzione $\mathrm{sen}\,(x)$ incontrata nei corsi di analisi: la funzione che al numero reale x associa il numero reale $\mathrm{sen}\,(x)$. In questo caso, dominio e codominio sono l'insieme dei numeri reali. L'immagine di questa funzione è l'insieme dei “possibili valori $\mathrm{sen}\,(x)$”, cioè l'intervallo $[-1,\ 1]$. L'immagine di una funzione non va confusa con il codominio.

Definizione 2.1. Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione.

i) Se $\mathrm{Im} f = B$ diciamo che f è *suriettiva*;
ii) se elementi distinti di A hanno immagini distinte diciamo che f è *iniettiva*;
iii) se f è sia suriettiva che iniettiva, diciamo che è *biunivoca*;
iv) fissato $b \in B$, l'insieme degli elementi $a \in A$ tali che $f(a) = b$ si chiama *fibra* (o immagine inversa) di b e si denota con $f^{-1}(b)$.

Si osservi che f è iniettiva se e solo se ogni sua fibra è l'insieme vuoto oppure è costituita da un solo elemento, f è suriettiva se e solo se ogni sua fibra è non-vuota. Se f è biunivoca, tutte le fibre sono costituite da un solo elemento, ovvero

per ogni $b \in B$ *esiste un unico elemento* $a \in A$ *tale che* $f(a) = b$.

In questo caso si dà la definizione che segue.

Definizione 2.2. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca. Si definisce l'*inversa* di f, e si denota con f^{-1}, ponendo

$$f^{-1} \ :\ B \longrightarrow A\ , \qquad f^{-1}(b) \ = \ \text{“l'unico } a \text{ tale che } f(a) = b\text{”}\,.$$

Avvertenza. C'è un piccolo abuso di notazione! Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ biunivoca, fissato $a \in A$ e posto $b = f(a)$, l'espressione $f^{-1}(b)$ può avere due significati:

$$f^{-1}(b) \ = \ a \qquad\qquad f^{-1}(b) \ = \ \{a\}$$

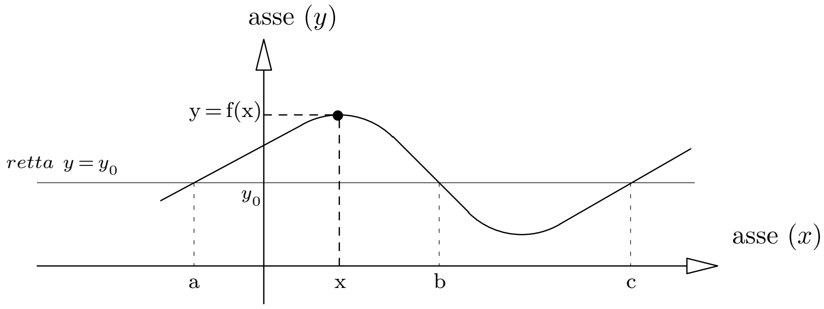
(Definizione 2.2) (Definizione 2.1, *iv*)

nel primo caso abbiamo un elemento di A, nel secondo abbiamo un sottoinsieme di A (che ha senso anche se f non è biunivoca e può essere vuoto come avere più di un elemento).

Definizione 2.3. Il grafico Γ_f di una funzione $f : A \to B$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ delle coppie del tipo $\big(a,\, f(a)\big)$. In simboli

$$\Gamma_f \quad := \quad \big\{ \big(a,\, f(a)\big) \,\big|\, a \in A \big\} \quad \subseteq \quad A \times B$$

Esempio. Quando $y = f(x)$ è una funzione reale di variabile reale (di quelle che si incontrano nel corso di analisi), il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene rappresentato come in figura, dove l'asse (x) denota il dominio $\mathbb{R}$ e l'asse (y) denota il codominio (sempre $\mathbb{R}$). Da notare che la fibra di un elemento y_0 si ottiene intersecando il grafico della funzione con la retta (orizzontale) $y = y_0$.



Nel caso della funzione disegnata abbiamo $f^{-1}(y_0) = \{a,\, b,\, c\}$.

Nota. Suriettività e iniettività di f si traducono in termini di proprietà del grafico:

i) f è suriettiva se e solo se Γ_f incontra ogni retta orizzontale in almeno un punto;

ii) f è iniettiva se e solo se Γ_f incontra ogni retta orizzontale in al più un punto.

Esempio. Di seguito consideriamo funzioni reali (dominio $= \mathbb{R}$, codominio $= \mathbb{R}$):

- la funzione $y = x^3$ è sia iniettiva che suriettiva (ovvero è biunivoca);
- la funzione $y = e^x$ è iniettiva ma non è suriettiva;
- la funzione $y = x^3 - x$ è suriettiva ma non è iniettiva (la retta $y = 0$ ne incontra il grafico in 3 punti);
- la funzione $y = x^2$ non è né iniettiva né suriettiva.

Attenzione. Nell'esempio precedente abbiamo fissato *dominio* $= \mathbb{R}$, *codominio* $= \mathbb{R}$. Cambiando il dominio e/o il codominio la funzione cambia (e ne cambiano le proprietà): la funzione $y = x^2$, come funzione da $\mathbb{R}^+$ (l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a zero) a $\mathbb{R}$ è iniettiva ma non è suriettiva, come funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ è suriettiva ma non è iniettiva, come funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^+$ è sia iniettiva che suriettiva (il che consente di definirne l'inversa $y = \sqrt{x}$, naturalmente come funzione definita su $\mathbb{R}^+$).
Analogamente, la funzione logaritmo $y = \log(x)$ è la funzione (definita sui reali strettamente positivi nonché a valori reali) inversa della funzione esponenziale $y = e^x$ intesa come funzione definita sui reali e a valori reali strettamente positivi (vista così è biunivoca).

§3. Due tecniche di dimostrazione.

Concludiamo con un cenno sulla dimostrazione per assurdo e la dimostrazione per induzione. Avvertiamo lo studente che ci limitiamo a poche, e soprattutto superficiali, parole. Una trattazione seria è oggetto di studio della logica matematica.

La dimostrazione per assurdo. Supponiamo di dover dimostrare un Teorema $\mathcal{P}$. L'idea geniale di Zenone di Elea (500 a.c.), conseguente all'intuizione secondo la quale "una cosa o è oppure non è" del suo maestro Parmenide, è quella di "aumentare" le ipotesi: assumere, insieme alle eventuali ipotesi già in $\mathcal{P}$, l'ipotesi che $\mathcal{P}$ sia falso. Se, sotto queste ipotesi più ricche si riesce a trovare una contraddizione, allora $\mathcal{P}$ è necessariamente vero. Da notare che anche solo dimostrando $\mathcal{P}$ si ottiene una contraddizione (questo perché si sta assumendo che $\mathcal{P}$ sia falso), quindi non solo si hanno a disposizione più ipotesi, ma sarà sufficiente dimostrare una tesi a priori più debole!

Esempio. Proviamo, effetuando una dimostrazione per assurdo, la seguente affermazione:

esistono infiniti numeri primi

(ricordiamo che un numero è primo se e solo se è un intero positivo, diverso da uno, divisibile solamente per 1 e per se stesso).

Dimostrazione. Assumendo per assurdo che i numeri primi siano in numero finito, ovvero che i numeri primi siano

$$p_1, \ \ldots, \ p_k ,$$

possiamo considerare il numero $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ (il prodotto dei nostri primi più uno). Per come è definito n, la divisione $n : p_i$ dà resto 1 per ogni valore dell'indice i. Di conseguenza n non è divisibile per nessun primo (n.b.: i p_i sono <u>tutti</u> i primi).
Questo è assurdo perché

(♣) *ogni numero è divisibile per almeno un primo*! □

Nota. Quanto all'affermazione (♣), ci sono due possibilità: un numero m è primo oppure non è primo. Se m è primo, è divisibile per un primo (se stesso), se non è primo allora si decompone come prodotto di primi ed è divisibile per ognuno di essi. Chi non fosse soddisfatto da questa spiegazione (perché usa un'affermazione che va giustificata, l'affermazione "ogni numero si decompone come prodotto di primi"), può dimostrare (♣) direttamente (a tal fine suggeriamo di ragionare di nuovo per assurdo, assumendo non vuoto l'insieme dei numeri non divisibili per alcun primo, si prenda il più piccolo di tali numeri...).

La dimostrazione per induzione. Supponiamo di avere affermazioni $\mathcal{P}_n$ che dipendono da un indice n (un intero strettamente positivo), allora queste saranno tutte vere qualora risulti verificata $\mathcal{P}_1$ e si possa stabilire che ogni affermazione implica la successiva. In simboli

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \ \text{vera;} \\ (\mathcal{P}_i \ \text{vera} \implies \mathcal{P}_{i+1} \ \text{vera}), \ \forall\, i \end{pmatrix} \qquad \implies \qquad (\, \mathcal{P}_i \ \text{vera}, \ \forall\, i \,)$$

La giustificazione di quanto affermato sta nel fatto che $\mathcal{P}_1$ è vera, quindi $\mathcal{P}_2$ è vera, quindi $\mathcal{P}_3$ è vera, quindi $\mathcal{P}_4$ è vera, e così via. Più formalmente possiamo ragionare per assurdo: se esiste un indice j per il quale $\mathcal{P}_j$ è falsa, allora posto $j_0 = \min\{\, j \mid \mathcal{P}_j \text{ è falsa} \,\}$ si ha la contraddizione "$\mathcal{P}_{j_0 - 1}$ è vera e $\mathcal{P}_{j_0}$ (la successiva) è falsa".

In inciso, esistono versioni più sofisticate di induzione (che in questo testo non utilizzeremo mai) dove gli indici dai quali dipendono le affermazioni che si vogliono dimostrare appartengono a insiemi molto più complicati di quello considerato sopra.

§4. Soluzione degli esercizi.

1.2. 2^n. Infatti, nello scegliere un sottoinsieme di A, abbiamo due possibile scelte per ogni elemento di A, quindi, in totale, 2^n possibili scelte.

1.4. $n \cdot m$. Infatti, abbiamo n elementi in A e, per ogni elemento $a \in A$, abbiamo m possibili coppie del tipo (a, b).

1.7. $i)$ la riflessività segue dal fatto che, per definizione, una partizione è un ricoprimento; la simmetria è ovvia; la transitività $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ segue dal fatto che esiste un unico insieme della partizione cui b appartiene, e pertanto questo deve essere lo stesso insieme cui appartengono a e c. $ii)$ ogni elemento appartiene alla propria classe di equivalenza, in particolare si ottiene un ricoprimento; se $[a] \cap [c] \neq \emptyset$, preso $b \in [a] \cap [c]$ si ottiene $[a] = [b] = [c]$ (quindi, per assurdo, due classi distinte $[a] \neq [c]$ non possono avere intersezione non vuota, ovvero sono disgiunte). $iii)$ è palesemente tautologica.

I

ALGEBRA LINEARE

§1. Introduzione ai sistemi lineari.

Cominciamo con alcuni esempi. Una definizione formale di sistema lineare la daremo alla fine del paragrafo, per ora lo studente può tranquillamente pensare al concetto di "equazione, ovvero sistema di equazioni" visto al liceo.

L'esempio più elementare di sistema lineare è il sistema di una equazione in una incognita

$$a \cdot x \quad = \quad b\,, \qquad a\,,\, b\, \in\, \mathbb{R}\,.$$

In questo caso la discussione delle soluzioni è molto semplice: ci sono tre possibilità

i) se $a \neq 0$ esiste una unica soluzione: $x = \frac{b}{a}$;
ii) se $a = b = 0$ ogni valore di x è una soluzione del sistema;
iii) se $a = 0$ e $b \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

Esempio. Discutiamo le soluzioni del sistema lineare di una equazione in due incognite

$$a \cdot x \,+\, b \cdot y \quad = \quad c\,, \qquad a\,,\, b\,,\, c\, \in\, \mathbb{R}\,. \tag{1.1}$$

Anche in questo caso l'esistenza di soluzioni dipende dai valori dei coefficienti a, b, c. Assumendo $a \neq 0$ (lasciamo allo studente il problema di discutere gli altri casi possibili), dividendo per a si ottiene

$$x \quad = \quad \big(c - by\big)/a\,.$$

Pertanto, se $a \neq 0$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare (1.1) è

$$\big\{\, x,\, y \;\big|\; x \,=\, (c - by)/a \,\big\}\,. \tag{1.2}$$

La notazione usata è quella introdotta nel Capitolo 0, la ricordiamo per comodità: "$\{\,...\,\}$" significa "l'insieme ..." e la barra verticale "$|$" significa "tale che". In definitiva, la (1.2) si legge dicendo "l'insieme degli x, y tali che $x = (c-by)/a$". Si osservi che y può assumere qualsiasi valore. Per questo motivo, diciamo che y è un *parametro libero* (relativamente alla descrizione data dello spazio delle soluzioni del sistema (1.1)).

Esempio. Studiamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a \cdot x \,+\, b \cdot y \quad = \quad \lambda \\ c \cdot x \,+\, d \cdot y \quad = \quad \mu \end{cases}, \qquad a\,,\, b\,,\, c\,,\, d\,,\, \lambda\,,\, \mu\, \in\, \mathbb{R}\,. \tag{1.3}$$

Se moltiplichiamo la seconda equazione per a e vi sostituiamo $ax = \lambda - by$ (ottenuta dalla prima equazione del sistema) troviamo

$$(ad - bc) \cdot y \quad = \quad a\mu - c\lambda\,. \tag{1.4}$$

Si potrebbe obiettare che potremmo aver moltiplicato per zero (se $a = 0$). Vero, comunque l'uguaglianza scritta resta valida. Un calcolo simile mostra che

$$(ad - bc) \cdot x \quad = \quad d\lambda - b\mu\,. \tag{1.5}$$

Dalle formule (1.4) e (1.5) deduciamo quanto segue.

Proposizione. *Se* $ad - bc \neq 0$, *esiste una unica soluzione del sistema lineare* (1.3), *si ha*

$$x \;=\; \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc}\,, \qquad\qquad y \;=\; \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc} \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Dividendo sia la (1.4) che la (1.5) per $ad - bc$ troviamo le espressioni di x ed y che abbiamo scritto. Questo dimostra che c'è al più una soluzione, quella indicata. L'esistenza è un facile conto: basta sostituire le espressioni (1.6) nel sistema (1.3). □

Resta da studiare il caso $ad - bc = 0$ (poniamo $\Delta := ad - bc$). A tal fine osserviamo che se $\Delta = 0$, cioè $ad = bc$, le due funzioni

$$f(x, y) \;:=\; ax \,+\, by \qquad \text{e} \qquad g(x, y) \;:=\; cx \,+\, dy$$

sono proporzionali: una delle due funzioni è un multiplo dell'altra. Infatti, se assumiamo $ab \neq 0$ (lasciamo allo studente l'esercizio di studiare i rimanenti casi possibili), dividendo la relazione $ad = bc$ per ab troviamo $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Posto $k := \frac{d}{b}$, abbiamo

$$cx + dy \;=\; k\,(ax + by)\;.$$

Ne segue che ci sono due possibilità:

i) $\mu = k\lambda$, in questo caso le due equazioni di (1.3) si riducono ad una ed abbiamo infinite soluzioni (cfr. Esempio 1.1);

ii) $\mu \neq k\lambda$, in questo caso il sistema (1.3) non ammette soluzioni in quanto del tipo

$$\begin{cases} ax \,+\, by & = \;\; \lambda \\ k\,(ax \,+\, by) & = \;\; \mu \;\neq\; k\lambda \end{cases}$$

Anche nel caso che abbiamo lasciato per esercizio "$ab = 0$" si presenta lo stesso fenomeno: il sistema (1.3) non ammette soluzioni oppure ne ammette infinite. In definitiva vale la proposizione che segue.

Proposizione 1.7. *Se* $ad - bc = 0$ *possono verificarsi solo due possibilità*:

i) *esistono infinite soluzioni del sistema* (1.3);

ii) *il sistema* (1.3) *non ammette soluzioni.*

A questo punto ci domandiamo, cosa accade con i sistemi di n equazioni in n incognite, è possibile trovare delle formule che generalizzano la (1.6) e caratterizzare il caso in cui esiste una unica soluzione? Inoltre, come si affronta lo studio dei sistemi lineari in cui il numero delle equazioni è diverso da quello delle incognite?

Risponderemo a queste domande nei prossimi paragrafi. Ora, come promesso, definiamo in modo formale i concetti di "sistema lineare" e di "soluzione di un sistema lineare".

Definizione 1.8. Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite è una scrittura formale del tipo

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 \,+\, \ldots \,+\, a_{1,n}x_n \;=\; b_1 \\ a_{2,1}x_1 \,+\, \ldots \,+\, a_{2,n}x_n \;=\; b_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\;\; \vdots \\ a_{m,1}x_1 \,+\, \ldots \,+\, a_{m,n}x_n \;=\; b_m \end{cases}$$

dove gli $a_{i,j}$ ed i b_i sono numeri reali (detti *coefficienti* del sistema), mentre $x_1, \ldots, x_n$ sono dei simboli detti *incognite* del sistema.

Nota. Ci preme sottolineare che un sistema lineare (s.l.) non è un insieme di uguaglianze bensì un oggetto formale: anche "$\{0x = 2$" è un s.l..

Definizione 1.9. Una *soluzione* del sistema è una n^{-pla} di numeri $x'_1, ..., x'_n$ che, sostituiti in $(\star)$ al posto delle incognite, soddisfano tutte le equazioni.

Definizione 1.10. Se i coefficienti $b_1, ..., b_m$ (detti anche *termini noti*) sono tutti nulli diciamo che il sistema è *omogeneo*.

Definizione 1.11. Il *sistema omogeneo associato* al sistema lineare $(\star)$ è il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & ... & + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + & ... & + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

(ottenuto sostituendo i termini noti con degli zeri).

Definizione 1.12. Un sistema lineare si dice *compatibile* se ammette soluzioni (una o più), se non ammette soluzioni si dice *incompatibile*.

Definizione 1.13. Due sistemi lineari, nelle stesse incognite, si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

L'equivalenza di sistemi lineari è una relazione di equivalenza per l'insieme di tutti i sistemi lineari, in particolare è definita la nozione di classe di equivalenza di sistemi lineari. Questo concetto si incontra studiando l'insiemistica di base (cfr. Cap. 0, Def. 1.6), per chi non avesse confidenza con esso diamo la definizione che segue.

Definizione 1.14. La *classe di equivalenza* di un sistema lineare $\mathcal{S}$ è l'insieme di tutti i sistemi lineari equivalenti ad $\mathcal{S}$.

Per quel che ci riguarda è solo una questione di linguaggio: dire che due sistemi lineari sono equivalenti e dire che appartengono alla stessa classe di equivalenza è dire la stessa cosa. Di fatto la Definizione 1.14 ci serve solo per dare un nome all'insieme di tutti i sistemi lineari equivalenti ad un sistema lineare dato (si veda, ad esempio, l'osservazione 1.18).

Esempio 1.15. I sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y & = & 7 \\ 2x + 5y & = & 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 6y & = & 17 \\ 8x + 3y & = & 14 \end{cases}$$

sono equivalenti. Infatti, hanno entrambi $x = 1$, $y = 2$ come unica soluzione.

Esercizio. Risolvere i sistemi dell'esempio precedente.

Esempio 1.16. I sistemi lineari

$$\mathcal{S}_1 := \begin{cases} 3x + 2y + 2z & = & 7 \\ 2x + 5y + 2z & = & 1 \\ 2x + 2y + 3z & = & 8 \end{cases}, \qquad \mathcal{S}_2 := \begin{cases} 3x + 2y + 2z & = & 7 \\ 2x + 5y + 2z & = & 1 \\ 9x + 14y + 9z & = & 17 \end{cases}$$

sono equivalenti. Ma non è necessario risolverli per rendersi conto che sono equivalenti: le equazioni di $\mathcal{S}_2$ le abbiamo ricavate da quelle di $\mathcal{S}_1$ (ricopiando le prime due equazioni e sommando, alla terza equazione, la prima equazione più il doppio della seconda), quindi se x', y', z' è una soluzione di $\mathcal{S}_1$, soddisfa anche $\mathcal{S}_2$; viceversa, le soluzioni di $\mathcal{S}_2$ sono soluzioni anche di $\mathcal{S}_1$ perché è possibile ricavare le equazioni di $\mathcal{S}_1$ da quelle di $\mathcal{S}_2$ (basta ricopiare le prime due equazioni e sottrarre, alla terza equazione, la prima equazione più il doppio della seconda).

Passiamo dall'esempio al caso generale.

Definizione 1.17. Una *combinazione lineare* delle equazioni $f_1(...) = \lambda_1$, ..., $f_k(...) = \lambda_k$ è un'equazione del tipo $\sigma_1 f_1(...) + ... + \sigma_k f_k(...) = \sigma_1\lambda_1 + ... + \sigma_k\lambda_k$. I numeri σ_1, ..., σ_k si chiamano *coefficienti* della combinazione lineare.

Esempio. La combinazione lineare di coefficienti 2 e 3 delle equazioni

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 5z &= 7 \\ 2x + 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

è l'equazione

$$14x + 18y + 16z = 23 ,$$

ottenuta sommando il doppio della prima equazione al triplo della seconda equazione.

Generalizzando quanto visto nell'esempio 1.16, se modifichiamo un sistema lineare sommando ad una sua equazione una combinazione lineare delle altre, otteniamo un sistema lineare equivalente a quello da cui siamo partiti. Naturalmente, anche l'operazione di moltiplicare un'equazione per una costante non nulla non cambia la classe di equivalenza di un sistema lineare. In definitiva, abbiamo "l'osservazione fondamentale sulla quale si basano i metodi per risolvere un sistema lineare":

Osservazione 1.18. La classe di equivalenza di un sistema lineare non cambia se

i) si moltiplica un'equazione per una costante non nulla;
ii) ad un'equazione si somma una combinazione lineare delle altre;
iii) si scambiano due equazioni tra loro .

Torniamo al sistema $(\star)$ della Definizione 1.8. Le informazioni che lo identificano sono racchiuse nei numeri $a_{i,j}$ e b_i, numeri che raccoglieremo in delle tabelle ponendo

$$A := \left(a_{i,j}\right) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Tabelle di questo tipo si chiamano *matrici* (cfr. Definizione 1.21).

Definizione 1.19 Le matrici A ed $\widetilde{A}$ si chiamano rispettivamente *matrice incompleta* e *matrice completa* associata al sistema lineare $(\star)$ della Definizione 1.8.

Esercizio 1.20. Indicare quali dei seguenti sistemi di equazioni sono sistemi lineari e, di quelli lineari, indicarne le matrici incompleta e completa:

a) il sistema, nelle incognite x, y, di equazioni $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$;

b) il sistema, nelle incognite x, y, z, di equazioni $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ x - \operatorname{sen} t \cdot y = 3 \end{cases}$;

c) il sistema di equazioni $\begin{cases} x \cdot y = z \\ x^{|t|+1} = z \cdot y \end{cases}$.

Useremo le matrici in maniera sistematica, e non solo come oggetti associati ai sistemi lineari. È bene iniziare a familiarizzare fin d'ora con alcune notazioni di uso frequente concernenti le matrici.

Definizione 1.21. Una *matrice* $m \times n$ è una tabella di numeri costituita da m righe ed n colonne. L'insieme delle matrici $m \times n$ lo indichiamo con $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, useremo la notazione "$A = (a_{i,j})$" per indicare che il numero $a_{i,j}$ è l'elemento che si trova sulla riga i e colonna j (detto anche "di posto i, j").

Definizione 1.22. Se $A \in M_{n,n}$ diciamo che è una matrice "quadrata". In questo caso la sequenza degli elementi $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ..., $a_{n,n}$ si chiama *diagonale principale*:

$$A \;=\; \left(a_{i,j}\right) \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.23. Sia $A \in M_{n,n}$ una matrice quadrata. Se risulta $a_{i,j} = 0$ per ogni $i > j$ diciamo che A è una matrice *triangolare superiore* (la definizione ci dice che una matrice triangolare superiore è una matrice dove gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono tutti nulli).

Definizione 1.24. Sia $A \in M_{n,n}$ una matrice quadrata. Se risulta $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$ diciamo che A è una matrice *diagonale*.

Definizione 1.25. La matrice diagonale $A \in M_{n,n}$ soddisfacente $a_{i,i} = 1$ per ogni i si chiama matrice *identica* e si indica con I_n.

Esempi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice triangolare superiore) (matrice diagonale) (matrice identica I_5)

Nel prossimo paragrafo spieghiamo un procedimento, l'*algoritmo di Gauss*, che consente di ridurre un qualsiasi sistema lineare dato ad un sistema "a scala", e quindi di risolverlo.

§2. L'eliminazione di Gauss (E.G.).

L'algoritmo di eliminazione di Gauss (E.G.), è un procedimento che consente di risolvere qualsiasi sistema lineare. L'idea alla base di questo procedimento è molto semplice: dato un sistema lineare, si considera la matrice completa associata, si opera su questa matrice effettuando delle "operazioni elementari" (cfr. Definizione 2.1), ottenendo così una nuova matrice il cui sistema lineare associato, che risulta essere equivalente a quello di partenza, è di un tipo molto particolare che si risolve facilmente.

Definizione 2.1. Sia A una matrice. Le operazioni che seguono si definiscono *operazioni elementari*:

i) la moltiplicazione di una riga per una costante non nulla;

ii) l'operazione di sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre;

iii) lo scambio di due righe tra loro.

Diremo inoltre che due matrici A e B sono E.G.-*equivalenti*, ovvero diremo che l'una si ottiene dall'altra tramite l'E.G., e scriveremo

$$A \sim B ,$$

se è possibile passare da A a B utilizzando le operazioni elementari di cui sopra.

Inciso 2.2. La definizione di *combinazione lineare* di righe di una matrice è analoga a quella di combinazione lineare di equazioni di un sistema: la combinazione lineare di coefficienti $\sigma_1, ..., \sigma_r$ delle righe $(c_{1,1} \; ... \; c_{1,n})$, ..., $(c_{r,1} \; ... \; c_{r,n})$ è la riga $\left(\sum_{t=1}^{r} \sigma_t c_{t,1} \; ... \; \sum_{t=1}^{r} \sigma_t c_{t,n}\right)$.

Enunciamo ora un risultato fondamentale che bisogna tenere sempre presente.

Lemma 2.3. Sia $\widetilde{A}$ una matrice, sia $\widetilde{B}$ la matrice ottenuta eseguendo operazioni elementari su $\widetilde{A}$. Si ha che i sistemi lineari le cui matrici complete sono le matrici $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ sono equivalenti. In sintesi:

$$\widetilde{A} \sim \widetilde{B} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{“i rispettivi sistemi associati sono equivalenti”}.$$

Dimostrazione. Scrivere una matrice non è altro che un modo compatto di scrivere le informazioni che individuano un sistema lineare e le operazioni descritte nella Definizione 2.1 non sono altro che la traduzione in termini di questa nuova notazione delle operazioni (dette anch'esse elementari) indicate nella Osservazione 1.18. $\square$

Come corollario del Lemma 2.3, possiamo risolvere un sistema lineare applicando il metodo che segue: scriviamo la matrice completa associata al sistema lineare, la "semplifichiamo" utilizzando le "mosse" previste in nella Deifnizione 2.1, risolviamo il sistema lineare la cui matrice completa associata è quella ottenuta mediante la "semplificazione" effettuata. Più avanti vedremo i dettagli di questa procedura, intanto illustriamo qualche esempio concreto.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 4x + 9y + 3z = 8 \\ 3x + 5y + 2z = 7 \end{cases} .$$

Per risolverlo, il primo passo da fare consiste nello scrivere la matrice completa associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} .$$

A questo punto operiamo sulla matrice:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2\\4&9&3&8\\3&5&2&7\end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-3&-1&0\\0&-4&-1&1\end{pmatrix} \sim^{(2)} \begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-3&-1&0\\0&0&1/3&1\end{pmatrix} \sim^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-3&0&3\\0&0&1/3&1\end{pmatrix} \sim^{(4)} \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&-3&0&3\\0&0&1/3&1\end{pmatrix} \sim^{(5)} \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix},$$

dove i passaggi effettuati sono: 1) alla seconda riga abbiamo sottratto il quadruplo della prima ed alla terza abbiamo sottratto il triplo della prima, 2) alla terza riga abbiamo sottratto i quattro terzi della seconda, 3) alla seconda riga abbiamo sommato il triplo della terza, 4) alla prima riga abbiamo sommato la seconda e sottratto il triplo della terza, 5) abbiamo diviso la seconda riga per -3 ed abbiamo moltiplicato la terza riga per tre. Il sistema associato all'ultima matrice che abbiamo scritto è il sistema

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + 1y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + 1z = 3 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

In virtù del Lemma 2.3 quest'ultimo sistema è equivalente a quello da cui siamo partiti, pertanto il sistema considerato è compatibile ed ammette un'unica soluzione, questa è la terna $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$.

Le cose non vanno sempre così bene, se non altro perché potremmo partire da un sistema che ammette infinite soluzioni o che non ne ammette affatto.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$x + 3y - 7z = 2 .$$

La matrice completa associata è la matrice

$$\begin{pmatrix}1&3&-7&2\end{pmatrix}$$

e non c'è modo di "semplificarla". In compenso le soluzioni di questo sistema sono evidenti: possiamo considerare y e z come parametri liberi e porre $x = -3y + 7z + 2$. Vogliamo sottolineare che le soluzioni di questo sistema sono infinite, e sono tutte e sole le terne x, y, z ottenute scegliendo arbitrariamente due valori per y e z e ponendo $x = -3y + 7z + 2$.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 2 \\ 2x + 4y + 10z = 3 \end{cases}$$

La matrice completa associata è la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2&5&2\\2&4&10&3\end{pmatrix}.$$

Sottraendo alla seconda riga il doppio della prima troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

che è la matrice completa associata al sistema ovviamente incompatibile

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Torniamo alla teoria generale.

Definizione 2.4 Una matrice a *scala superiore* è una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ in cui $\nu(i)$, che per definizione è l'indice massimo ν tale che $a_{i,1} = ... = a_{i,\nu} = 0$, è una funzione strettamente crescente dell'indice di riga i, con l'ovvia eccezione che se una riga è tutta nulla ci limiteremo a richiedere che le successive siano anch'esse nulle (...non potrebbero avere più di n zeri, poverine hanno solo n elementi!). Di una matrice a scala, il primo elemento non nullo di una riga non nulla viene chiamato *pivot*.

Questo è un esempio di matrice a scala superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 21 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.5. Provare che in una matrice A a scala superiore gli elementi che si trovano sotto $a_{i,\,i}$ sono tutti nulli, per ogni i. In particolare, una matrice quadrata a scala superiore è necessariamente triangolare superiore (cfr. Definizione 1.23).

Esercizio 2.6. Indicare quali matrici tra quelle che seguono sono a scala superiore.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.7. Dimostrare che una matrice è a scala se e solo se soddisfa quanto segue:

($\clubsuit$) *se a sinistra di un elemento ci sono solo zeri*
allora anche sotto di esso ci sono solo zeri

(L'elemento $a_{1,\,1}$, trovandosi nella prima colonna, non ha nulla alla sua sinistra, ovvero soddisfa automaticamente l'ipotesi di "avere solo zeri alla sua sinistra". Pertanto in una matrice soddisfacente la proprietà ($\clubsuit$), gli elementi $a_{1,\,2}, \ldots, a_{1,\,n}$ sono tutti nulli).

Osservazione 2.8. I sistemi lineari la cui matrice completa associata è a scala superiore, che chiameremo *sistemi a scala*, si risolvono rapidamente per sostituzione partendo dall'ultima equazione e "tornando indietro". Infatti, per questo tipo di sistemi lineari, accade che la prima incognita di ogni equazione **non** compare nelle equazioni successive e dunque può essere ricavata come funzione delle incognite che la seguono. Vediamo un esempio:

Esempio. Il sistema a scala (nelle incognite x, y, z, w, s)

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + w - s = 2 \\ 3z - w + 2s = 3 \\ w + 5s = 10 \end{cases} \tag{2.9}$$

si risolve nel modo che segue: si considera l'ultima equazione e si considerano come parametri liberi tutte le variabili che seguono w, quindi si scrive

$$w = -5s + 10 ;$$

si sostituisce quanto ottenuto nella penultima equazione e si isola la variabile z (la prima variabile che compare in tale equazione), ottenendo così

$$z \;=\; \big(-7s + 13\big)/3$$

(in questo passaggio non sono apparsi altri parametri liberi oltre s, che abbiamo già considerato); si sostituisce quanto ottenuto nella prima equazione e si isola la variabile x (che, come sempre, è la prima variabile dell'equazione che stiamo considerando), quindi si scrive

$$x \;=\; \big(-y - s + 5\big)/2$$

tenendo le eventuali altre[2] variabili, in questo caso solamente la y, come parametri liberi. In definitiva, lo spazio delle soluzioni del sistema (2.9) è l'insieme

$$(2.9') \qquad \left\{ x,\, y,\, z,\, w,\, s \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x & = & \big(-y - s + 5\big)/2 \\ z & = & \big(-7s + 13\big)/3 \\ w & = & -5s + 10 \end{array} \right\},$$

dove, lo ripeto, y ed s sono parametri liberi, ovvero sono variabili che possono assumere qualsiasi valore.

L'esempio esposto non ha nulla di particolare, ogni sistema lineare la cui matrice completa associata è a scala superiore si risolve nello stesso modo. L'unica cosa che potrebbe accadere è ritrovarsi qualcosa del tipo "$0 = 3$" come ultima equazione e, di conseguenza, di fronte ad un sistema lineare palesemente incompatibile.

Il primo coefficiente non nullo di ogni equazione viene chiamato *pivot*. Si osservi che i parametri liberi sono le variabili che non corrispondono ad un pivot. Nell'esempio considerato i pivot sono 2, 3, 1 (coefficienti di x, z, w, rispettivamente della prima, seconda e terza equazione) ed i parametri liberi sono le restanti variabili: y ed s.

Inciso 2.10. Spesso è opportuno usare i simboli $t_1, t_2, \ldots$ per indicare, ed evidenziare, i parametri liberi. In questo modo le soluzioni del sistema dell'esempio vengono scritte nella forma

$$(2.10') \qquad \left\{ x,\, y,\, z,\, w,\, s \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x & = & \big(-t_1 - t_2 + 5\big)/2 \\ y & = & t_1 \\ z & = & \big(-7t_2 + 13\big)/3 \\ w & = & -5t_2 + 10 \\ s & = & t_2 \end{array} \right\},$$

detta anche *rappresentazione parametrica* dell'insieme delle soluzioni del sistema dato.

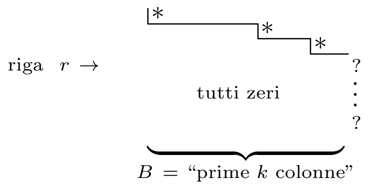
Visto che sappiamo risolvere i sistemi a scala resta da imparare a ridurre un qualsiasi sistema ad un sistema a scala, ed in virtù dell'osservazione 2.8, resta da illustrare l'algoritmo che trasforma una qualsiasi matrice in una matrice a scala. Questo algoritmo viene descritto nella prossima dimostrazione e si chiama *algoritmo di riduzione a scala* (ovvero di Gauss).

Proposizione 2.11. *Sia* $A = \big(a_{i,j}\big) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *una qualsiasi matrice rettangolare. L'E.G. per righe consente sempre di trasformarla in una matrice a scala superiore.*

Dimostrazione. Sia k l'intero più grande tale che la sottomatrice B costituita dalle prime k colonne di A è a scala. Il valore k può anche essere zero (per l'esattezza, $k \neq 0$ se e solo se $a_{2,1} = \ldots = a_{m,1} = 0$). Se B non ha righe identicamente nulle, A è a scala ed

[2] Oltre quelle già considerate.

abbiamo concluso. Altrimenti, assumiamo $k < n$ (se $k = n$ la matrice A è già a scala e non c'è nulla da dimostrare). Posto r uguale all'indice della prima riga identicamente nulla di B (se $k = 0$ scegliamo $r = 1$), consideriamo $a_{r,k+1}$, ..., $a_{m,k+1}$. Questi numeri non sono tutti nulli perché altrimenti la sottomatrice delle prime $k+1$ colonne di A sarebbe a scala.



gli "*" denotano pivot

il blocco B costituito dalle prime k colonne è a scala (si noti che B ha tutti zeri dalla riga r in poi)

i "?" sono gli elementi $a_{r,k+1}$, ..., $a_{m,k+1}$ (non tutti nulli)

A meno di cambiare l'ordine delle righe di indice r, ..., m possiamo assumere $a_{r,k+1} \neq 0$, quindi per ogni $i > r$ sottraiamo alla i^{-esima} riga il prodotto della r^{-esima} riga per $\frac{a_{i,k+1}}{a_{r,k+1}}$. In questo modo sotto $a_{r,k+1}$ otteniamo tutti zeri, quindi la sottomatrice delle prime $k+1$ colonne della "nuova" A (stiamo modificando la nostra matrice) è a scala.
Iterando questo procedimento arriveremo ad avere $k = n$ ed avremo quindi concluso la riduzione a scala di A. □

Esempio. Questa è la riduzione a scala di una matrice effettuata iterando il procedimento descritto nella dimostrazione precedente:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \sim^{(1)} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \sim^{(2)}$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \sim^{(3)} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & -18 \end{pmatrix}.$$

In quest'esempio, consideriamo la prima colonna. Poiché questa, come matrice 4×1, è a scala, andiamo avanti e consideriamo la sottomatrice 4×2 delle prime due colonne che è anch'essa a scala. Quindi guardiamo la sottomatrice delle prime tre colonne. Questa non è a scala e purtroppo $a_{2,3} = 0$, ma scambiando la seconda riga con la terza riga, *passo 1*, possiamo fare in modo che l'elemento della seconda riga e terza colonna diventi diverso da zero (in questo modo arriviamo alla matrice B). La sottomatrice delle prime tre colonne di B non è ancora a scala perché sotto $b_{2,3}$ non ci sono tutti zeri. Sottraendo alla quarta riga i tre mezzi della seconda, *passo 2*, otteniamo la matrice C, che è una matrice le cui prime tre colonne sono a scala. Andiamo avanti: consideriamo la sottomatrice delle prime quattro colonne di C. Questa non è a scala ma lo diventa se sottraiamo alla quarta riga i sette terzi della terza riga, *passo 3*. In questo modo otteniamo la matrice a scala D ed abbiamo concluso.

Ricapitolando, il metodo per trovare le soluzioni di un qualsiasi sistema lineare è il seguente: scriviamo la matrice completa ad esso associata $\widetilde{A}$, quindi la trasformiamo in una matrice a scala superiore effettuando l'E.G. per righe. Il risultato che si ottiene in questo modo è un sistema lineare equivalente a quello di partenza ma che si risolve immediatamente per sostituzione (partendo da x_n e "tornando indietro").

Esercizio 2.12. Risolvere i sistemi lineari le cui matrici complete associate sono quelle dell'esercizio 2.6. Naturalmente, indicare esplicitamente quante e quali sono le incognite, discutere la compatibilità ed indicare i parametri liberi (si controlli la correttezza dei risultati ottenuti, a tal fine si veda il paragrafo §17, "Soluzione degli esercizi").

Esercizio 2.13. Risolvere i sistemi lineari nelle incognite x, y, z, w, s

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y - 7z + w - s = 3 \\ 3z + y + 2s = 8 \\ w + 3s = 6 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y - 7z + w - s = 3 \\ 3x + y + 2s = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} y = 3 \\ 3x + y + 2s = 2 \end{cases}$$

specificando quali incognite sono parametri liberi ed indicando lo spazio delle soluzioni nella forma

$$(2.13') \qquad \left\{ x_1, x_2, \ldots \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x_1 & = & c_{1,1}t_1 + \ldots + c_{1,\ell}t_\ell \\ \ldots & & \\ x_n & = & c_{n,1}t_1 + \ldots + c_{n,\ell}t_\ell \ldots \end{array} \right\}$$

(cfr. Inciso 2.10), dove $t_1, \ldots, t_\ell$ denotano i parametri liberi.

§3. Matrici.

In questo paragrafo introduciamo le operazioni di somma e prodotto tra matrici. Vediamo inoltre come si collocano queste operazioni nell'ambito della teoria dei sistemi lineari. Prima di procedere ricordiamo la Definizione 1.21: la matrice

$$A \quad = \quad (a_{i,\,j}) \quad \in \quad M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad (m \text{ righe ed } n \text{ colonne})$$

è la tabella di numeri il cui elemento di posto $i,\, j$ è l'elemento $a_{i,\,j}$.

Definizione 3.1. Consideriamo due matrici delle stesse dimensioni

$$A \;:=\; \big(a_{i,j}\big) \;:=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad B \;:=\; \big(b_{i,j}\big) \;:=\; \begin{pmatrix} b_{1,1} & . & . & . & b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{m,1} & . & . & . & b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Si definisce la loro somma $A + B$ ponendo

$$A + B \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} + b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} + b_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & 2 & 19 \\ 3 & 0 & -1 & 57 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 11 \\ 3 & 9 & 4 & 19 \\ 5 & -5 & -1 & 58 \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.2. Siano $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C = (c_{i,j}) \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ due matrici (si osservi che il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di C). Si definisce il *prodotto righe per colonne*

$$A \cdot C \quad \in \quad M_{m,k}(\mathbb{R})$$

ponendo

$$(3.2') \qquad \big(A \cdot C\big)_{i,j} \quad := \quad \sum_{h=1}^{n} a_{i,h} \cdot c_{h,j}$$

dove $\big(A \cdot C\big)_{i,j}$ denota l'elemento di posto $i,\, j$ della matrice $A \cdot C$.

Si osservi che secondo questa formula, l'elemento di posto "$i,\, j$" della matrice prodotto è il "prodotto" della i^{-esima} riga di A per la j^{-esima} colonna di C. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \cdot \quad \begin{pmatrix} \star & \star & \alpha & \star \\ \star & \star & \beta & \star \\ \star & \star & \gamma & \star \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & a\alpha + b\beta + c\gamma & \star \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.3.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdot \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 11 \\ 2 & -31 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.4. Calcolare i seguenti prodotti

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad .$$

(dovete ottenere rispettivamente matrici 2×2, 2×3, 3×2, 3×3, 3×3, 1×1).

Per giustificare la Definizione 3.2, ci limitiamo a fare una considerazione: se sostituiamo le relazioni

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 + 0z_3 + 3z_4 \\ y_2 = 0z_1 + 7z_2 + 2z_3 + z_4 \\ y_3 = 3z_1 + 0z_2 - z_3 - z_4 \end{cases} \quad \text{nelle relazioni} \quad \begin{cases} x_1 = 4y_1 + 0y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 - 5y_2 + 0y_3 \end{cases}$$

otteniamo proprio

$$\begin{cases} x_1 = 7z_1 + 8z_2 - z_3 + 11z_4 \\ x_2 = 2z_1 - 31z_2 - 10z_3 + z_4 \end{cases}$$

Si noti che le matrici associate a queste relazioni sono quelle del prodotto nell'esempio 3.3.

Osservazione 3.5. Quanto visto nell'esempio vale in generale: il prodotto (righe per colonne) tra matrici "codifica" l'operazione di sostituzione. Infatti, date A e C come nella Definizione 3.2, se $x_1, ..., x_m$, $y_1, ..., y_n$ e $z_1, ..., z_k$ soddisfano le relazioni

$$x_i = a_{i,1}y_1 + ... + a_{i,n}y_n = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}y_h \quad \text{e} \quad y_h = c_{h,1}z_1 + ... + c_{h,k}z_k = \sum_{j=1}^{k} c_{h,j}z_j \,,$$

(dove $i = 1, ..., m$ e $h = 1, ..., n$), allora risulta

$$x_i = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}y_h = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h} \sum_{j=1}^{k} c_{h,j}z_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{i,h}c_{h,j} \right) z_j$$

(*n.b.*: tra le parentesi c'è l'elemento di posto i, j del prodotto $A \cdot C$, cfr. Definizione 3.2).

Proposizione 3.6. *Le operazioni tra matrici soddisfano le proprietà*

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= A + (B + C) && \text{(associatività della somma)}, \\ (A \cdot D) \cdot E &= A \cdot (D \cdot E) && \text{(associatività del prodotto)}, \\ \left.\begin{aligned} (A + B) \cdot D &= A \cdot D + B \cdot D \\ A \cdot (D + D') &= A \cdot D + A \cdot D' \end{aligned}\right\} & && \text{(proprietà distributive)}, \end{aligned}$$

dove naturalmente si richiede che le dimensioni delle matrici in questione siano compatibili con le operazioni scritte: $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $D, D' \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ *ed* $E \in M_{k,h}(\mathbb{R})$

Osservazione 3.7. Il prodotto non è commutativo, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \qquad \text{ma} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} .$$

Peraltro, se le dimensioni delle matrici in questione non sono "giuste", non ha neanche senso invertire l'ordine dei fattori (il numero delle colonne della matrice a sinistra **deve** essere uguale al numero delle righe di quella a destra).

L'osservazione che segue deve assolutamente essere compresa a fondo in quanto basilare per la teoria che svilupperemo.

Osservazione 3.8. Un modo compatto per denotare il sistema lineare $(\star)$ introdotto nella Definizione 1.8 consiste nello scrivere

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}\,,$$

dove, per definizione, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, A è la matrice incompleta associata al sistema lineare dato ed il prodotto "$\cdot$" è il prodotto righe per colonne della Definizione 3.2. Infatti, usando la Definizione 3.2 di prodotto righe per colonne si ottiene proprio

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \quad \in \quad M_{m,1}(\mathbb{R})\ .$$

Esempio.

Il sistema lineare $\begin{cases} 2x - y + 5z \ = \ 2 \\ x + 3z \ = \ -1 \end{cases}$ si scrive $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Scrivere i sistemi lineari incontrati nel paragrafo § 2 nella forma $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Inciso/Definizione 3.9. Abbiamo introdotto i simboli $\vec{x}$ e $\vec{b}$ come matrici costituite da una sola colonna. D'ora in avanti oggetti di questo tipo li chiameremo *vettori*, quindi parleremo di "vettore delle incognite", "vettore dei termini noti" o semplicemente di "vettore" (naturalmente, sempre riferendoci a un oggetto di questo tipo). Osserviamo che questi oggetti, in quanto matrici, li possiamo sommare tra loro, naturalmente a condizione che abbiano lo stesso numero di elementi (cioè di righe, la colonna è una sola). Gli spazi vettoriali, quindi la nozione di vettore, verranno introdotti nel paragrafo § 8. La definizione appena introdotta prendetela semplicemente come una anticipazione su qualcosa che vedremo in seguito.

Inciso 3.10. Vediamo un'applicazione alla teoria dei sistemi lineari dell'uso delle matrici. Sia $\vec{x}_1$ una soluzione del sistema lineare

$$(\star) \qquad\qquad A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

e sia $\vec{x}_0$ una soluzione del sistema omogeneo associato $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (dove $\vec{0}$ denota il vettore dei termini noti quando questi sono tutti nulli). Allora risulta

$$A \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_0) \quad = \quad A \cdot \vec{x}_1 + A \cdot \vec{x}_0 \quad = \quad \vec{b} + \vec{0} \quad = \quad \vec{b}\ .$$

In altri termini, se a una soluzione del sistema $(\star)$ sommo una soluzione del sistema omogeneo associato, trovo di nuovo una soluzione del sistema $(\star)$. Inoltre, fissata a priori una qualsiasi soluzione del sistema $(\star)$, ogni altra soluzione di $(\star)$ è somma della soluzione fissata e di una soluzione del sistema omogeneo associato. Infatti, se $\vec{x}_2$ è un'altra soluzione di $(\star)$, si ha $A \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, quindi $\vec{x}_2$ si scrive come $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$, essendo il vettore tra parentesi una soluzione del sistema omogeneo associato. Questo risultato è noto come teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Teorema (di struttura) **3.11.** *Sia* $\vec{x}_1$ *una soluzione del sistema lineare*

$$(\star) \qquad A\cdot\vec{x} \;=\; \vec{b}$$

e sia $\mathcal{S}_0$ *l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato* $A\cdot\vec{x} = \vec{0}$. *Allora l'insieme* $\mathcal{S}$ *di tutte le soluzioni del sistema* $(\star)$ *è l'insieme*

$$\mathcal{S} \;=\; \mathcal{S}_0 + \vec{x}_1 \;:=\; \left\{\, \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} \,=\, \vec{x}_1 + \vec{s},\ \vec{s}\in\mathcal{S}_0 \,\right\}$$

Osservazione 3.12. Facciamo un passo indietro e torniamo all'osservazione 3.5. Posto

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix},$$

le relazioni

$$x_i \;=\; \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}y_h \quad , \qquad y_h \;=\; \sum_{j=1}^{k} c_{h,j}z_j$$

possono essere scritte nella forma compatta

$$\vec{x} \;=\; A\cdot\vec{y} \quad , \qquad \vec{y} \;=\; C\cdot\vec{z}\,.$$

Sostituendo $\vec{y} = C\cdot\vec{z}$ nella relazione $\vec{x} = A\cdot\vec{y}$ si ottiene

$$\vec{x} \;=\; A\cdot\big(C\cdot\vec{z}\big)$$

Quindi, usando l'associatività del prodotto tra matrici, si ottiene

$$\vec{x} \;=\; (A\cdot C)\cdot\vec{z},$$

che è esattamente la forma compatta della relazione $x_i \;=\; \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{h=1}^{n} a_{i,h}c_{h,j}\right) z_j$ ottenuta nell'osservazione 3.5.

Esercizio 3.13. Calcolare i prodotti che seguono.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Le operazioni consentite dall'E.G. (cfr. Definizione 2.1) possono essere espresse come prodotti con matrici opportune. L'esercizio che segue serve ad introdurre questo tipo di risultato.

Esercizio 3.14. Si considerino le matrici 5×5 che seguono

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ed una matrice M, questa 5×7 (scrivetene una!). Calcolate i prodotti

$$E_1\cdot M\ , \qquad E_2\cdot M\ , \qquad E_3\cdot M\ .$$

Osservazione 3.15. Chi ha svolto l'esercizio precedente avrà notato che la moltiplicazione a sinistra per E_1 equivale a moltiplicare una riga di M per il coefficiente λ (nel caso specifico, la quarta riga), la moltiplicazione a sinistra per E_2 equivale a sommare una riga di M con una combinazione lineare delle altre (nel caso specifico, alla quarta riga viene sommata la combinazione lineare di coefficienti α, β, γ, δ delle righe I, II, III e V), la moltiplicazione a sinistra per E_3 equivale a scambiare due righe di M (nel caso specifico, la terza riga con la quarta).

Definizione 3.16 Sia E una matrice quadrata $n \times n$. Diremo che E è una *matrice elementare* se è di uno dei seguenti tipi (ricordiamo che I_n denota la matrice identica, cfr. Definizione 1.25):

i) la matrice che si ottiene sostituendo un "1" di I_n con un coefficiente $\lambda \neq 0$;
ii) la matrice che si ottiene sostituendo gli zeri di una riga di I_n con dei numeri arbitrari;
iii) la matrice che si ottiene scambiando due righe di I_n.

Si osservi che E_1 è di tipo *i)*, E_2 è di tipo *ii)*, E_3 è di tipo *iii)*.

Osservazione 3.17. Generalizzando quanto già visto con l'osservazione 3.15, fissata una matrice M, la moltiplicazione a sinistra per una matrice elementare equivale ad effettuare una delle operazioni consentite dall'Eliminazione di Gauss (cfr. Definizione 2.1).

Concludiamo il paragrafo con una definizione.

Definizione 3.18. Sia $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice. La matrice che si ottiene "scambiando le righe con le colonne", ovvero la matrice in $M_{n,m}(\mathbb{R})$ il cui elemento di posto "riga i, colonna j" è l'elemento $a_{j,i}$, si chiama *trasposta* di A e si indica con ${}^tA$:

$$\left({}^tA\right)_{i,j} \quad = \quad a_{j,i} \,, \qquad {}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \,.$$

Inoltre, le matrici che coincidono con la propria trasposta si dicono *simmetriche.*

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Esempio. La matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica.

È utile conoscere come si comporta la trasposizione rispetto alle operazioni di somma e prodotto di matrici. Quanto alla somma la situazione è molto semplice, si ha

$${}^t\big(A+B\big) \quad = \quad {}^tA \, + \, {}^tB \,, \qquad \forall\, A,\, B \,\in\, M_{m,n}(\mathbb{R}) \,.$$

Per quel che riguarda il prodotto si deve fare attenzione all'ordine dei fattori (che deve essere scambiato), infatti risulta

$$(3.19) \qquad {}^t\big(A \cdot D\big) \quad = \quad {}^tD \cdot {}^tA \,, \qquad \forall\, A \,\in\, M_{m,n}(\mathbb{R}) \,,\; D \,\in\, M_{n,k}(\mathbb{R}) \,.$$

Questo perché l'elemento di posto i, j della matrice ${}^t(A \cdot D)$, essendo l'elemento di posto j, i della matrice $A \cdot D$, si ottiene moltiplicando la riga di posto j di A per la colonna di posto i di D, esattamente come l'elemento di posto i, j della matrice ${}^tD \cdot {}^tA$.

§4. Matrici quadrate e sistemi lineari.

Due matrici in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ (stesso numero di righe e colonne) possono essere sia sommate che moltiplicate tra loro, inoltre il risultato che si ottiene è sempre una matrice in $M_{n,n}(\mathbb{R})$. In effetti $M_{n,n}(\mathbb{R})$, con le due operazioni di somma e prodotto, è un esempio di *anello unitario* (un anello è un oggetto algebrico che noi non studieremo). Non entreremo troppo in questioni algebriche, però alcune considerazioni le vogliamo fare.

Nella trattazione che segue la matrice identica ha un ruolo fondamentale. Ricordiamone la definizione: la matrice identica di ordine n, che si denota con I_n, è la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla *diagonale principale* e tutti zeri altrove:

$$I_n \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

Osservazione 4.1. Risulta

$$A \cdot I_n \quad = \quad I_n \cdot A \quad = \quad A \,, \qquad \forall\, A \in M_{n,\,n}(\mathbb{R})$$

(questo comportamento di I_n rispetto al prodotto tra matrici è uno dei motivi per i quali si chiama matrice identica).

Definizione 4.2. Consideriamo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Se esiste B tale che $A \cdot B = I_n$ diciamo che A è *invertibile*, B la chiamiamo *inversa di* A e la denotiamo A^{-1}. Le matrici che **non** sono invertibili usualmente vengono chiamate *singolari*.

Proposizione 4.3. *Si ha che* $A \cdot B = I_n$ *se e solo se* $B \cdot A = I_n$. *L'inversa di una matrice, se esiste, è unica.*

Rimandiamo la dimostrazione di questa proposizione al paragrafo §16, in parte perché la vogliamo arricchire con dei commenti che coinvolgono argomenti che dobbiamo ancora trattare, in parte perché in questo momento non vogliamo appesantire il discorso (comunque, invitiamo lo studente a dare fin d'ora un'occhiata alla dimostrazione, ...se non altro perché ci siamo presi la briga di scrivere una dimostrazione che utilizza esclusivamente gli strumenti introdotti fin qui!).

Torniamo al sistema lineare $(\star)$ del paragrafo § 1, ovvero al sistema:

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b} \tag{4.4}$$

Se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite la matrice incompleta A è una matrice quadrata $n \times n$ mentre la matrice completa $\widetilde{A}$ è una matrice $n \times (n+1)$. Ora, assumiamo che la matrice A sia invertibile. Se $\vec{x}$ è una soluzione del "sistema (4.4)", allora moltiplicando ambo i membri della "uguaglianza (4.4)" per A^{-1}, si ottiene

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b} \,.$$

Per l'associatività del prodotto, $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = I_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$, quindi

$$\vec{x} \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b} \,. \tag{4.5}$$

Quest'uguaglianza mostra l'unicità dell'eventuale soluzione del nostro sistema e ci fornisce un candidato per tale soluzione. Poiché il passaggio effettuato è "invertibile": rimoltiplicando la (4.5) per A si torna alla (4.4), abbiamo l'esistenza della soluzione del sistema dato. Vista l'importanza, vogliamo ripetere il risultato appena dimostrato:

Proposizione 4.6. *Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile allora il sistema lineare*

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

è compatibile ed ha un'unica soluzione. Inoltre, la soluzione è

$$\vec{x} \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b}\,.$$

Osservazione 4.7. La richiesta dell'invertibilità di A è l'unica ipotesi della proposizione precedente. In particolare, le ipotesi di tale proposizione **non** coinvolgono affatto la colonna dei termini noti $\vec{b}$.

Il risultato può essere rafforzato, vale anche il "viceversa":

Proposizione 4.8. *Se il sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

ha un'unica soluzione allora la matrice A è invertibile.

Nel § 7 vedremo che questo risultato segue in modo naturale dalla teoria che per allora avremo sviluppato. Ma, si sa, le dimostrazioni non servono (solo) a dimostrare i teoremi! ...ma anche a comprendere meglio gli strumenti coi quali si sta lavorando. La dimostrazione che segue vi servirà ad affinare la sensibilità sull'E.G. e sulla natura del prodotto di matrici.

Dimostrazione. Poiché il sistema ammette un'unica soluzione, l'E.G. sul sistema non deve produrre né parametri liberi né incompatibilità. Questo accade se e solo se la riduzione a scala di A produce un pivot su ogni elemento della diagonale, in particolare, indipendentemente da $\vec{b}$. Infatti, da un lato se

$$A \quad \sim \quad T$$

è una riduzione a scala di A, le stesse identiche operazioni effettuate sulla matrice completa $\widetilde{A} = A\,|\,\vec{b}$ (ad A viene agiunta la colonna $\vec{b}$) producono qualcosa del tipo

$$\widetilde{A} \;=\; A\,|\,\vec{b} \qquad \sim \qquad \widetilde{T} \;=\; T\,|\,\vec{d}$$

(una matrice $n \times n{+}1$ le cui prime n colonne sono esattamente le colonne di T). D'altro canto, la matrice a scala T ha elementi sulla diagonale **non** nulli (tutti) se e solo se $\widetilde{T}$ è del tipo desiderato, ovvero il sistema ad essa associato ammette un'unica soluzione.

Di conseguenza, se il sistema lineare dato $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ammette un'unica soluzione, ciò accade per ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ (i.e. con $\vec{c}$ arbitrario). A questo punto non solo siamo in grado di dimostrare l'invertibilità di A, ma siamo persino in grado di costruire l'inversa. Infatti, indicando con $\vec{e}_i$ la i^{-esima} colonna di I_n (che sarà quindi il vettore che ha tutti zeri eccetto un 1 nell'elemento di posto i), risulta che l'inversa di A è la matrice B la cui i^{-esima} colonna è la soluzione del sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$. Quanto appena affermato segue da com'è fatto il prodotto righe per colonne: la i^{-esima} colonna del prodotto $A \cdot B$ si ottiene facendo scontrare A con la i^{-esima} colonna di B, ma questa colonna, per come è stata costruita B, è la soluzione del sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$. Questo dimostra che la i^{-esima} colonna di $A \cdot B$ è $\vec{e}_i$, quindi che $A \cdot B = I_n$. Detto in termini visivamente più intellegibili, si deve avere

$$A \cdot B \quad = \quad A \cdot \begin{pmatrix} & | & \\ \dots & \vec{b}_i & \dots \\ & | & \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} & | & \\ \dots & \vec{e}_i & \dots \\ & | & \end{pmatrix} \quad = \quad I_n\,.$$

$\square$

L'esercizio che segue aiuta a comprendere meglio la dimostrazione appena vista.

Esercizio 4.9. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si risolvano i sistemi lineari

$$(\clubsuit) \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_1 \ , \quad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_2 \ , \quad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_3$$

e si scriva la matrice B le cui colonne sono, nell'ordine, le soluzioni dei tre sistemi lineari dati. Si verifichi che B è l'inversa di A.

Nella dimostrazione della Proposizione 4.8, così come nell'esercizio 4.9, utilizziamo i sistemi lineari per costruire l'inversa di una matrice. In realtà il lavoro al quale siamo interessati va esattamente nella direzione opposta: usare l'inversa di una matrice per risolvere, grazie alla Proposizione 4.6, i sistemi lineari. I prossimi tre paragrafi sono dedicati, tra le altre cose, a questo scopo.

Esercizio 4.10. Trovare l'errore nel ragionamento che segue. Consideriamo una matrice $A \in M_{m,\,n}(\mathbb{R})$ (m righe, n colonne) e consideriamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Assumiamo per ipotesi che esista una matrice $B \in M_{n,\,m}(\mathbb{R})$ (questa volta, n righe, m colonne) tale che $B \cdot A = I_n$ (osserviamo che il prodotto $B \cdot A$ ha senso ed è una matrice di n righe e colonne). Procedendo come nel passaggio dalla (4.4) alla (4.5), abbiamo che

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \implies B \cdot A \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b} \implies I_n \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b} \implies \vec{x} = B \cdot \vec{b}$$

Ne segue che abbiamo risolto il sistema lineare dato e che $\vec{x} = B \cdot \vec{b}$ ne è una soluzione, che pertanto risulta anche essere unica.

Il fatto che il risultato ottenuto sopra sia **falso** lo possiamo dimostrare con un esempio: se consideriamo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e la matrice} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

(e, mantenendo le stesse notazioni del ragionamento di cui sopra, indichiamo con A la matrice incompleta del sistema e con $\vec{b}$ il vettore dei termini noti), abbiamo $B \cdot A = I_2$ (verificatelo, cioè svolgete il prodotto $B \cdot A$) nonché $B \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ...peccato che questo vettore (cioè la coppia $x = 1$, $y = 7$) non sia una soluzione del sistema lineare dato (fate la verifica)!

Che dire! ...chi non trova l'errore deve tornare alle Definizioni 1.8 e 1.9 e non può andare avanti fino a che non lo trova. È importante!

Comunque, a chi sta resistendo alla tentazione di andare a vedere il capitolo dedicato alla soluzione degli esercizi proposti (dove viene spiegato l'arcano) proponiamo un altro esercizio:

Esercizio 4.11. Il ragionamento dell'esercizio 4.10 non è tutto da buttare, dire cosa dimostra.

Il prossimo obiettivo è quello di studiare l'invertibilità e calcolare l'inversa di una matrice. A tal fine avremo bisogno della nozione di "determinante", oggetto di studio del prossimo paragrafo.

§5. Determinante.

In questo paragrafo introduciamo la funzione determinante, funzione che ad una matrice *quadrata* (cioè che ha uguale numero di righe e colonne) associa un numero. Ci sono diverse definizioni equivalenti del determinante, noi lo definiamo tramite lo sviluppo di Laplace (cfr. Def. 5.2 e Prop. 5.4). La formula (16.6′) e la Proposizione 16.8 forniscono altri due modi possibili di definire il determinante. Cominciamo con alcuni casi particolari.

Se $A = (a)$ è una matrice 1×1 si pone

$$\det(A) \quad := \quad a\ .$$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2 si pone

$$\det(A) \quad := \quad ad\, -\, bc\ .$$

Per le matrici di ordine superiore la definizione è più complicata, ad esempio già per le matrici 3×3 si pone

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad := \quad aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg\ .$$

...ma vediamo la definizione generale! La definizione che segue è *induttiva,* nel senso che si definisce il determinante di una matrice di ordine n utilizzando il determinante di matrici di ordine più basso. Premettiamo una notazione.

Notazione 5.1. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Indichiamo con $C_{i,j} \in M_{n-1,n-1}$ la matrice che si ottiene prendendo A e cancellando la i^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna. Ad esempio, $C_{1,2}$ è la sottomatrice in neretto:

$$\text{se} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ \mathbf{7} & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix}\ , \qquad \text{si ha} \qquad C_{1,2} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(cancelliamo prima riga e seconda colonna).

Definizione 5.2 (*Sviluppo di Laplace del Determinante*). Come abbiamo già menzionato, se $A = (a)$ è una matrice di ordine 1 si pone $\det A := a$. Sia quindi $n \geq 2$ e consideriamo $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si definisce

$$(5.2') \qquad \det A \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1,j} \cdot \det C_{1,j}\ ,$$

dove la notazione usata è quella appena introdotta.

Si osservi che l'uguaglianza (5.2′) definisce in maniera ricorsiva il determinante: si conosce il determinante delle matrici di ordine 1; quindi per la formula (5.2′) si sa calcolare il determinante delle matrici di ordine 2; conoscendo quest'ultimo, di nuovo per la formula (5.2′) si sa calcolare il determinante delle matrici di ordine 3; ...di quelle di ordine 4; ...eccetera.

Osservazione. Applicando l'uguaglianza (5.2′) per $n = 3$ si ottiene

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad &:= \quad a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \quad a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg)\ , \end{aligned}$$

che coincide con la definizione data precedentemente.

Esempio. Si ha

$$\det\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&7\\1&4&6\end{pmatrix} \;:=\; 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&7\\4&6\end{pmatrix} - 5\cdot\det\begin{pmatrix}3&7\\1&6\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$$
$$= \; 2\cdot(12-28) - 5\cdot(18-7) + 3\cdot(12-2) \;=\; -57\,.$$

Visto che ci siamo vediamo cosa si ottiene per le matrici di ordine 4:

$$\det\begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&l&m&n\\o&p&q&r\end{pmatrix} \;:=$$
$$a\cdot\det\begin{pmatrix}f&g&h\\l&m&n\\p&q&r\end{pmatrix} - b\cdot\det\begin{pmatrix}e&g&h\\i&m&n\\o&q&r\end{pmatrix} + c\cdot\det\begin{pmatrix}e&f&h\\i&l&n\\o&p&r\end{pmatrix} - d\cdot\det\begin{pmatrix}e&f&g\\i&l&m\\o&p&q\end{pmatrix}.$$

Si osservi che in questa espressione compaiono 4 determinanti di matrici 3×3, ognuno dei quali è un polinomio di 6 termini. Quindi, sviluppando i determinanti delle matrici di ordine 4 si perviene ad un polinomio costituito da $4\cdot6=24$ termini. Lo sviluppo del determinante di una matrice di ordine 5 è un polinomio molto lungo: ha $5\cdot24=120$ termini. Dalla Definizione 5.2 è evidente per ragioni induttive che questa considerazione si generalizza:

Osservazione 5.3. Per le matrici di ordine n, la funzione determinante è un polinomio di $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ termini (questo prodotto si chiama *fattoriale* di n e si indica con $n!$, il punto esclamativo fa parte della notazione).

Vedremo comunque che il calcolo del determinante di una matrice è una operazione molto più semplice di quanto si possa immaginare ...e temere! Questo perché la funzione determinante soddisfa una serie di proprietà che ne rendono possibile il calcolo tramite l'eliminazione di Gauss. Proprietà che ora introduco.

Proposizione 5.4. *Il determinante di una matrice coincide col suo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga arbitraria, come pure rispetto ad una qualsiasi colonna: sia k un indice che fissiamo, si ha*

$$(5.4')\qquad \begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\,a_{k,j}\cdot\det C_{k,j} &&\text{(sviluppo rispetto alla riga } k)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}\,a_{i,k}\cdot\det C_{i,k} &&\text{(sviluppo rispetto alla colonna } k)\end{aligned}$$

dove come al solito $C_{i,j}$ è la matrice che si ottiene prendendo A e sopprimendo la i^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna.

La dimostrazione di questa proposizione verrà data negli approfondimenti, § 16, sezione "aspetti algebrici del determinantene" (lo studente che lo desideri, può leggerla fin d'ora).

Esempio. Sviluppando rispetto alla seconda riga il determinante dell'esempio precedente si ottiene

$$\det\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&7\\1&4&6\end{pmatrix} \;:=\; -3\cdot\det\begin{pmatrix}5&3\\4&6\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\1&6\end{pmatrix} - 7\cdot\det\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$$
$$= \; -3\cdot(30-12) + 2\cdot(12-3) - 7\cdot(8-5) \;=\; -57\,.$$

Come promesso dalla formula (5.4′) il risultato ottenuto è lo stesso di prima: -57.

Esercizio. Calcolare il determinante della matrice dell'esempio tramite lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna.

Definizione 5.5. Il prodotto $(-1)^{i+j} \cdot \det C_{i,j}$ si chiama *complemento algebrico* di $a_{i,j}$.

Osservazione 5.6. Alla luce di questa definizione, la Proposizione 5.4 ci dice che il determinante di una matrice è uguale alla somma degli elementi di una qualsiasi riga o colonna moltiplicati per i propri complementi algebrici.

Ora osserviamo che se B è la matrice ottenuta da una matrice A scambiando due righe adiacenti, la i^{-esima} riga con la $(i{+}1)^{-esima}$ riga, la matrice che si ottiene da A cancellando la i^{-esima} riga coincide con la matrice che si ottiene da B cancellando la $(i{+}1)^{-esima}$ riga. Quindi, per effetto del coefficiente $(-1)^{i+j}$ che appare nella Definizione 5.5, i complementi algebrici degli elementi della i^{-esima} riga di A coincidono con i complementi algebrici degli elementi della $(i+1)^{-esima}$ riga di B cambiati di segno. Ne segue che lo sviluppo di Laplace di A rispetto alla i^{-esima} riga coincide con lo sviluppo di Laplace di B rispetto alla $(i{+}1)^{-esima}$ riga cambiato di segno. Quanto affermato può sembrare complicato, in realta non lo è affatto, l'esempio che segue aiuta a comprenderlo: posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix},$$

quando si cancellano le righe in neretto, quello che resta della matrice A coincide con quello che resta della matrice B, ma mentre "i segni" (cfr. Definizione 5.5) dei complementi algebrici degli elementi della riga in neretto di A sono dei $(-1)^{2+j}$, abbiamo che "i segni" dei complementi algebrici degli elementi della riga in neretto di B sono dei $(-1)^{3+j}$.

Come conseguenza di quanto appena osservato, la possibilità garantitaci dalla Proposizione 5.4 di poter calcolare il determinante effettuando lo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga arbitraria, ci dice che se in una matrice scambiamo due righe adiacenti allora il determinante cambia segno. Questo risultato si generalizza allo scambio di due righe arbitrarie.

Lemma 5.7. Il determinante è una funzione *antisimmetrica* delle righe di una matrice: se scambiamo tra loro due righe qualsiasi il determinante cambia segno.

Dimostrazione. Lo scambio di due righe arbitrarie si può effettuare con un certo numero di scambi di righe adiacenti e questo numero è necessariamente dispari (questo è un dettaglio di teoria delle permutazioni che dimostriamo negli approfondimenti, § 16). Pertanto il Lemma segue da quanto osservato precedentemente. □

Esempio. Scambiando prima e terza riga tra loro il determinante cambia segno:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che lo scambio tra prima e terza riga si può effettuare scambiando la prima con la seconda, poi la seconda con la terza e poi di nuovo la prima con la seconda:

$$\text{“}1\,2\,3\text{”} \rightsquigarrow \text{“}2\,1\,3\text{”} \rightsquigarrow \text{“}2\,3\,1\text{”} \rightsquigarrow \text{“}3\,2\,1\text{”}$$

(questi scambi sono tre, come previsto dalla teoria delle permutazioni sono in numero dispari).

Il determinate di una matrice $n \times n$ è una funzione che dipende da n^2 variabili (gli elementi di una tale matrice). Possiamo immaginare di fissare tutti gli elementi di una matrice tranne quelli che si trovano su una data riga, in questo modo otteniamo una funzione che dipende solo da n variabili, quelle della riga in questione. Il lemma che segue ci dice come si comporta il determinante visto in questo modo, appunto come funzione degli elementi di una data riga.

Lemma 5.8. Il determinante è una funzione *multilineare* delle righe della matrice: sia k un indice di riga, λ un numero reale e siano A, A', A'' e B quattro matrici tali che

$$\begin{aligned} a_{i,j} \;=\; a'_{i,j} \;=\; a''_{i,j} \;=\; b_{i,j} \ , \qquad & \forall\, i \neq k\,,\ \forall\, j\,; \\ a_{k,j} \;+\; a'_{k,j} \;=\; a''_{k,j} \ , \qquad & \forall\, j\,; \\ b_{k,j} \;=\; \lambda a_{k,j} \ , \qquad & \forall\, j\,. \end{aligned}$$

(cioè coincidono ovunque tranne che per il fatto che la k^{-esima} riga di A'' è la somma della k^{-esima} riga di A con quella di A', mentre la k^{-esima} riga di B è il prodotto della k^{-esima} riga di A per λ). Allora

$$\begin{aligned} \det A \;+\; \det A' \;&=\; \det A''\,; \\ \det B \;&=\; \lambda \cdot \det A\,. \end{aligned}$$

Questo enunciato sembra poco digeribile per via dell'uso degli indici. In realtà il lemma è molto semplice, ci sta dicendo che se fissiamo tutti gli elementi di una matrice eccetto quelli di una data riga, la funzione determinante, <u>come funzione di quella riga</u>, è lineare. ...ma è meglio dirlo con due esempi:

Esempio.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \mathbf{2}\lambda & \mathbf{5}\lambda \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \;&=\; \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\,; \\ \det\begin{pmatrix} \mathbf{2{+}3} & \mathbf{5{+}1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \;&=\; \det\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ \mathbf{3}\lambda & \mathbf{2}\lambda & \mathbf{7}\lambda \end{pmatrix} \;&=\; \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix}\,; \\ \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{5{+}1} & \mathbf{2{+}3} & \mathbf{4{+}7} \end{pmatrix} \;&=\; \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio. Calcolare i determinanti delle matrici indicate negli esempi.

Si noti che, in particolare, il determinante della matrice ottenuta moltiplicando una riga di A per il coefficiente λ (la matrice B del lemma precedente) è uguale a $\lambda \cdot \det A$.

Osservazione 5.9. Sia A una matrice di ordine n e sia λA la matrice che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per la costante λ. Poiché moltiplicare tutta la matrice per λ è come moltiplicare ognuna delle sue n righe per λ, abbiamo

$$\det\big(\lambda A\big) \;=\; \lambda^n \cdot \det A\,.$$

Dimostrazione (del Lemma 5.8). Poiché le matrici coincidono fuori della k^{-esima} riga, calcolando il determinante utilizzando lo sviluppo di Laplace proprio rispetto alla k^{-esima} riga (formula 5.5), si ottiene

$$\begin{aligned} \det A \;+\; \det A' \;&=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\cdot\det C_{k,j} \;+\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a'_{k,j}\cdot\det C_{k,j} \\ &=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\,\big(a_{k,j}+a'_{k,j}\big)\cdot\det C_{k,j} \\ &=\; \det A''\,. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, b_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, \lambda \cdot a_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\ &= \lambda \cdot \det A'' \,. \end{aligned}$$

□

Proposizione 5.10. *Si abbia* $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Si ha*

$$\det A \quad = \quad \det {}^tA$$

dove ${}^tA$ *è la matrice trasposta della matrice* A (def. 3.18).

Dimostrazione. Questa proposizione segue dalla Proposizione 5.4. Infatti, confrontando lo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga con lo sviluppo di Laplace rispetto alla corrispondente colonna della trasposta, ci accorgiamo che si tratta della stessa identica formula! □

Osserviamo che, come corollario, i Lemmi 5.7 e 5.8 continuano a valere qualora si sostituisca (ovunque) la parola "riga" alla parola "colonna".

Ricapitoliamo alcune proprietà utili per il calcolo del determinante di una matrice:

Proposizione 5.11. *Sia* A *una matrice quadrata. Si ha che*

a) *se scambiamo tra loro due righe di* A *il determinante cambia segno* (*quindi se* A *ha due righe uguali il suo determinante è nullo*)*;*

b) *se ad una riga* (*ovvero colonna*) *sommiamo una combinazione lineare delle altre il determinante non cambia;*

c) *se moltiplichiamo una riga* (*ovvero colonna*) *per una costante* λ, *il corrispondente determinante risulta moltiplicato per* λ;

d) *se* A *ha una riga* (*ovvero colonna*) *nulla, allora* $\det A = 0$*;*

e) *il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.*

Dimostrazione. Le proprietà (*a*) e (*c*) le abbiamo già dimostrate (Lemmi 5.7 e 5.8). La (*d*) segue dal fatto che si può calcolare il determinante effettuando lo sviluppo di Laplace rispetto a una riga (ovvero colonna) qualsiasi, in particolare rispetto a quella nulla. Anche la (*e*) segue dalla natura dello sviluppo di Laplace (si scriva lo sviluppo rispetto all'ultima riga). La (*b*) segue dai Lemmi 5.7 e 5.8: se si somma ad una riga un multiplo di un'altra (se poi si vuole sommare una combinazione lineare delle altre righe basta iterare questo passaggio), il corrispondente determinante viene sommato a un multiplo del determinante di una matrice che ha due righe uguali e che, per questo motivo, è nullo (qui sotto, chiariamo quello che abbiamo appena detto con un esempio). □

Esempio.

$$\det\begin{pmatrix} 3+\mathbf{9}\lambda & 2+\mathbf{4}\lambda & 5+\mathbf{8}\lambda \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{9}\lambda & \mathbf{4}\lambda & \mathbf{8}\lambda \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(la prima matrice si ottiene dall'ultima matrice sommando alla prima riga λ volte la terza riga. Il conto ci mostra che queste due matrici hanno lo steso determinante).

Esempio. Per le proprietà dell'osservazione 5.11 sappiamo che

$$\det\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&7&-3\\-3&8&9\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}-3&8&9\\4&7&-3\\1&2&-1\end{pmatrix} \qquad \text{(abbiamo scambiato prima e terza riga);}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&7&-3\\-3&8&9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&7&-3\\11&33&-2\end{pmatrix} \qquad \text{(alla terza riga abbiamo sommato la}$$

combinazione lineare di coefficienti 2 e 3 delle prime due righe);

$$5\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&7&-3\\-3&8&9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&-1\\20&35&-15\\-3&8&9\end{pmatrix}; \qquad \det\begin{pmatrix}13&4&-7\\0&0&0\\-3&11&4\end{pmatrix} = 0\,;$$

$$\det\begin{pmatrix}3&7&1&8\\0&4&-2&3\\0&0&-6&5\\0&0&0&2\end{pmatrix} = 3\cdot4\cdot(-6)\cdot2 = -144\,.$$

Osservazione. Le operazioni di cui ai punti (5.11.a) e (5.11.b) sono sufficienti per ridurre in forma triangolare superiore la matrice A, infatti basta eseguire l'algoritmo di Gauss descritto nella dimostrazione della Proposizione 2.11. D'altro canto, per la (5.11.e), sappiamo calcolare facilmente il determinante di una matrice triangolare superiore. Quanto appena osservato permette di calcolare il determinante di una matrice, nell'esempio che segue vediamo concretamente come.

Esempio. Utilizzando i passi (5.11.a) e (5.11.b) troviamo

$$\det\begin{pmatrix}0&77&33&88\\1&2&-1&2\\4&1&-4&5\\-3&8&15&23\end{pmatrix} =^{(1)} 11\cdot\det\begin{pmatrix}0&7&3&8\\1&2&-1&2\\4&1&-4&5\\-3&8&15&23\end{pmatrix} =^{(2)}$$

$$-11\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&7&3&8\\4&1&-4&5\\-3&8&15&23\end{pmatrix} =^{(3)} -11\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&7&3&8\\0&-7&0&-3\\0&14&12&29\end{pmatrix} =^{(4)}$$

$$-11\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&7&3&8\\0&0&3&5\\0&0&6&13\end{pmatrix} =^{(5)} -11\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&7&3&8\\0&0&3&5\\0&0&0&3\end{pmatrix} = -11\cdot(1\cdot7\cdot3\cdot3) = -693$$

dove: (1) abbiamo diviso la prima riga per 11; (2) abbiamo scambiato le prime due righe; (3) alla terza riga abbiamo sottratto quattro per la prima riga ed alla quarta riga abbiamo sommato il triplo della prima; (4) alla terza riga abbiamo sommato la seconda ed alla quarta abbiamo sottratto il doppio della seconda; (5) alla quarta riga abbiamo sottratto il doppio della terza.

Per le proprietà a), b) e c) della Proposizione 5.11 che ci dicono cosa accade al determinante di una matrice quando si effettuano i passi dell'E.G., abbiamo quanto segue:

L'annullarsi del determinante è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G.

(nel senso che se $\widetilde{A}$ si ottiene da A tramite l'E.G., l'una ha determinante nullo se e solo se l'altra ha determinante nullo). Ai fini di quanto affermato ci si ricordi del fatto che l'E.G. consente di moltiplicare le righe di una matrice solo per costanti non nulle (cfr. Definizione 2.1).

Proposizione 5.12. *Sia A una matrice quadrata. Si ha che*

$$detA \;=\; 0 \quad \textit{se e solo se} \quad \textit{una riga di } A \textit{ è combinazione lineare delle altre.}$$

Dimostrazione. Come appena osservato, l'annullarsi del determinante è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G., anche l'avere una riga che è combinazione lineare delle altre è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G.. D'altro canto, per le matrici a scala, queste due proprietà sono equivalenti (in quanto entrambe equivalenti all'avere l'ultima riga nulla). In definitiva, se $\widetilde{A}$ è una riduzione a scala di A possiamo affermare quanto segue

$$\begin{array}{lcl} detA \;=\; 0 & \Longleftrightarrow & \\ det\widetilde{A} \;=\; 0 & \Longleftrightarrow & \text{una riga di } \widetilde{A} \text{ è c.l. delle altre} \\ & \Longleftrightarrow & \text{una riga di } A \text{ è c.l. delle altre} \end{array}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Il determinante si comporta molto male rispetto all'operazione di somma di matrici (non esistono formule per il calcolo del determinante di una somma di matrici). Rispetto al prodotto, invece, il determinante si comporta nel modo migliore possibile: vale il teorema che segue.

Teorema 5.14 (Binet). *Siano A e B due matrici quadrate. Allora*

$$\det\big(A\cdot B\big) \quad = \quad (\det A)\cdot(\det B)\ .$$

Nel paragrafo § 16 dedicato agli approfondimenti vedremo due dimostrazioni del Teorema di Binet (rimandiamo la dimostrazione non perché sia difficile ma perché a questo punto della teoria ci interessano soprattutto le conseguenze di questo Teorema). Vedremo anche che questo Teorema può essere dedotto come conseguenza di una interpretazione geometrica del determinante della quale daremo qualche cenno nel paragrafo § 16 (cfr. Inciso 16.16) e sulla quale torneremo anche nel Capitolo II (§§1 e 4).

Nel prossimo paragrafo ci occupiamo del calcolo dell'inversa di una matrice (se questa è invertibile). Concludiamo osservando che come conseguenza del teorema di Binet, una matrice il cui determinante è nullo non può essere invertibile. Infatti, se, per assurdo, lo fosse, allora si avrebbe

$$1 \quad = \quad \det I_n \quad = \quad \det\big(A\cdot A^{-1}\big) \quad = \quad \big(\det A\big)\cdot\big(\det A^{-1}\big) \quad = \quad 0\ .$$

In inciso, vedremo che le matrici a determinante nullo sono le uniche matrici non invertibili.

Esercizio 5.15. Calcolare il determinante delle matrici che seguono

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 271 & 583 \\ 0 & 1 & 49 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4729 & 1 & 0 \\ 357 & 9041 & 5 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 237 \\ 2 & 795 & 9467 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5.16. Calcolare il determinante (in funzione del parametro k) delle matrici che seguono ed indicare per quali valori di k non sono invertibili.

$$\begin{pmatrix} k & k{+}1 \\ 2{-}k & 3k{-}5 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} k & 3k & -k \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} k & -1 & 5 \\ 3k & 2 & 6 \\ -k & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} 2{-}k & 3k{-}7 & -k{+}71 \\ 0 & k^2{-}11 & 23{-}k^3 \\ 0 & 0 & k{-}8 \end{pmatrix} .$$

§6. Matrici invertibili e inversa di una matrice.

Come già osservato alla fine del paragrafo precedente, dal teorema di Binet segue che se A è una matrice invertibile, allora

$$\det A \quad \neq \quad 0\,.$$

Viceversa, se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile ed esiste una formula che ne calcola l'inversa. Tale formula è contenuta nel teorema che segue:

Teorema 6.1. *Consideriamo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si ha che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In questo caso risulta*

$$\left(A^{-1}\right)_{i,j} \qquad = \qquad (-1)^{i+j}\cdot\frac{\det C_{j,i}}{\det A}\,,$$

dove come al solito $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la $j^{\text{-esima}}$ riga e la $i^{\text{-esima}}$ colonna.

Attenzione! Non ci siamo sbagliati: a sinistra dell'uguaglianza abbiamo scritto "$i,\,j$", a destra abbiamo scritto "$j,\,i$".

Osservazione. La formula del Teorema 6.1 ci dice che A^{-1} è la trasposta della matrice dei complementi algebrici (cfr. Definizione 5.5) divisi per il determinante di A.

Avendo già provato che se A è invertibile allora $\det A \neq 0$, per concludere la dimostrazione del Teorema è sufficiente calcolare il prodotto di A per la matrice indicata nel Teorema e verificare che il risultato è la matrice identica. Tale calcolo lo svolgiamo nel paragrafo §16.

Esempio. Determiniamo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Poiché $\det A = 2$, la matrice A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è la matrice

$$\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ \\ -\det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ \\ \det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 19 \\ -4 & 14 & -43 \\ -4 & 12 & -37 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per $\det A$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 19/2 \\ -2 & 7 & -43/2 \\ -2 & 6 & -37/2 \end{pmatrix}$. Infine, trasponendo quest'ultima matrice si ottiene

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix}.$$

La formula del Teorema 6.1 non è molto pratica, per calcolare l'inversa di una matrice di ordine tre abbiamo dovuto fare molte operazioni. Tra poco vedremo che utilizzando l'algoritmo di Gauss è possibile calcolare l'inversa di una matrice abbastanza rapidamente.

Esercizio. Verificare che $\begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.2. Calcolare l'inversa delle matrici che seguono utilizzando la formula del Teorema 6.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Si verifichi inoltre la correttezza dei risultati ottenuti. Ricordiamo che per verificare che due matrici sono l'una l'inversa dell'altra è sufficiente moltiplicarle tra loro, come risultato si deve ottenere la matrice identica (Definizione 4.2 e Proposizione 4.3).

Ora vediamo in che modo l'eliminazione di Gauss può essere utilizzata per calcolare l'inversa di una matrice. Sia $A = \big(a_{i,j}\big) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice invertibile, la ricetta da seguire per calcolare A^{-1} consiste dei passi indicati nell'algoritmo seguente.

Algoritmo (di calcolo dell'inversa di una matrice tramite l'E.G.).

i) si scrive la matrice $n \times 2n$ costituita da due blocchi $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(qui abbiamo preso $n = 4$ esclusivamente per non appesantire le notazioni);

ii) con i passi dell'eliminazione di Gauss si trasforma la matrice considerata fino ad ottenere la matrice identica al posto del primo blocco $n \times n$;

iii) si ricopia il secondo blocco $n \times n$: tale blocco è l'inversa di A.

Esempio 6.3. Calcoliamo l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix}$. A tal fine scriviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

dove: 1) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della prima riga ed alla terza riga abbiamo sommato il quadruplo della prima riga; 2) alla terza riga abbiamo sommato la seconda; 3) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della terza; 4) alla prima riga abbiamo sottratto il doppio della seconda ed il quintuplo della terza. L'inversa della matrice data è la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Verificare l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Calcolare, utilizzando il metodo descritto, l'inversa delle matrici indicate nell'esercizio 6.2. ...dovreste ritrovare gli stessi risultati trovati precedentemente!

Inciso 6.4. Il motivo per cui questo metodo funziona è presto detto. Scelto un vettore numerico $\vec{b}$, alla matrice a blocchi $(A|I)$, dove I denota la matrice identica, associamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$. Ai passi che trasformano la matrice $(A|I)$ nella matrice $(I|B)$ corrisponde il fatto di trasformare il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$ nel sistema lineare $I \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b}$. Poiché i passi dell'eliminazione di Gauss non cambiano la classe di equivalenza di un sistema lineare, i due sistemi lineari $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$ e $I \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b}$, cioè

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \text{e} \qquad \vec{x} = B \cdot \vec{b},$$

sono equivalenti. Poiché questa equivalenza vale per ogni scelta di $\vec{b}$, la matrice B deve necessariamente essere l'inversa di A. Questa affermazione oltre ad essere molto ragionevole si dimostra come segue: dall'equivalenza dei due sistemi lineari si deduce, sostituendo la seconda equazione nella prima, $A \cdot B \cdot \vec{b} = \vec{b}$, sempre per ogni scelta di $\vec{b}$; ne segue che deve essere $A \cdot B = I_n$, cioè che B è l'inversa di A. Infatti, quanto appena affermato segue dal Lemma 6.5.

Lemma 6.5. Sia C una matrice $n \times n$. Allora,

$$\text{se } C \cdot \vec{b} = \vec{b} \text{ per ogni } \vec{b}, \quad \text{allora } C = I_n \text{ (la matrice identica).}$$

Dimostrazione. Indicando con $\vec{e}_i$ la i^{-esima} colonna di I_n, si deve avere $C \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_i$, d'altro canto il prodotto $C \cdot \vec{e}_i$ non è altro che la i^{-esima} colonna di C. □

Nel paragrafo § 12 daremo una interessante chiave di lettura di questo Lemma in termini dell'applicazione lineare associata ad una matrice.

§7. Teorema di Cramer.

Torniamo a considerare il sistema lineare

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{b}\,, \qquad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})\,.$$

Osservazione 7.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata a scala. Per Proposizione 5.11, proprietà e), il determinante $\det A$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Inoltre, se $a_{k_0,k_0} = 0$ per un qualche indice k_0, si ha anche $a_{k,k} = 0$ per ogni $k > k_0$ (altrimenti A non sarebbe a scala). Pertanto le condizioni

i) $\det A \neq 0$; $\qquad ii$) $a_{n,n} \neq 0$; $\qquad iii$) $a_{k,k} \neq 0\,, \ \forall\, k$;

sono equivalenti tra loro.

Lemma 7.2. *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *una matrice quadrata a scala. Il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ha una unica soluzione se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Poiché A è a scala, abbiamo a che fare con un sistema lineare a scala del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 \; + \quad ... \quad ... & = \; b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2 \; + \; ... & = \; b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n & = \; b_n \end{cases} .$$

Se $\det A \neq 0$, per l'osservazione 7.1 gli elementi $a_{1,1}, ..., a_{n,n}$ sulla diagonale principale sono non nulli. Ne segue che tale sistema si risolve (partendo dall'ultima equazione e tornando indietro) senza produrre parametri liberi né incompatibilità.
Viceversa, nel caso risulti $\det A = 0$, e quindi $a_{n,n} = 0$ (sempre per l'osservazione 7.1), ci sono due possibilità: il sistema è incompatibile oppure è compatibile. Nell'ipotesi che si verifichi questo secondo caso, l'ultima equazione deve essere l'equazione $0 = 0$ (se fosse $b_n \neq 0$ il nostro sistema sarebbe incompatibile) ed il sistema in questione è in realtà un sistema, compatibile per ipotesi, di al più $n-1$ equazioni in n incognite; il metodo visto nel paragrafo §2 di "soluzione all'indietro" di un tale sistema a scala produce almeno un parametro libero e quindi infinite soluzioni (in effetti già x_n è un parametro libero).
In definitiva, abbiamo provato che nel caso risulti $\det A = 0$, il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni. $\square$

Teorema 7.3. *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *una matrice quadrata (non richiediamo che sia a scala). Il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ha una unica soluzione se e solo se* $\det A \neq 0$.

In particolare, questo Teorema ci dice che la proprietà di avere una unica soluzione non dipende da $\vec{b}$, cioè basta conoscere la matrice incompleta A per poter dire quale delle due seguenti eventualità si verifica:

i) il sistema ammette una unica soluzione;

ii) il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni.

Dimostrazione. Effettuando la riduzione a scala di un sistema lineare quadrato si ottiene, in particolare, un sistema la cui matrice incompleta è a scala. Il determinante della matrice ottenuta è non nullo se e solo se $\det A \neq 0$, infatti i passi dell'E.G. non inficiano l'annullarsi o meno del determinante. Per il lemma precedente abbiamo concluso. $\square$

Analizziamo le due possibilità da un altro punto di vista. Come prima, consideriamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

<u>Caso 1:</u> $\det A \neq 0$. L'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ segue anche[3] dal Teorema 6.1: nel paragrafo § 5 abbiamo osservato che l'esistenza dell'inversa di A garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare: si ha $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

<u>Caso 2:</u> $\det A = 0$. Per la Proposizione 5.12, l'annullarsi del determinante è equivalente a che una riga sia combinazione lineare delle altre. Di conseguenza, abbiamo la stessa dicotomia incontrata studiando il sistema (1.3): o il termine noto corrispondente a quella riga di A non è compatibile con la combinazione lineare, cosa che rende il sistema lineare incompatibile, oppure tutta l'equazione corrispondente a quella riga è combinazione lineare delle altre equazioni e questo, di fatto, significa avere meno di n equazioni (il che significa avere infinite soluzioni oppure, comunque, incompatibilità; di sicuro, dalla stessa E.G. si evince che un sistema di meno di n equazioni in n incognite <u>non</u> può avere un'unica soluzione).

Si osservi che come conseguenza si ottiene una seconda dimostrazione del fatto che la matrice incompleta di un sistema quadrato che ammette un'unica soluzione è una matrice invertibile (cfr. Proposizione 4.8):

$$\exists!\ \text{soluzione di } A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ è invertibile.}$$

Teorema 7.4 (Cramer). *Consideriamo il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ed assumiamo* $\det A \neq 0$. *Sia quindi* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *la soluzione (che esiste ed è unica per il Teorema precedente). Si ha*

$$x_i \quad = \quad \frac{\det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}}{\det A},$$

dove $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ *è la matrice che si ottiene sostituendo la* $i^{\text{-esima}}$ *colonna di* A *con il vettore dei termini noti* $\vec{b}$.

Osservazione 7.5. Nel caso $n = 2$, ad esempio nel caso del sistema (1.3)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

questo Teorema si riduce alla formula (1.6):

$$x \quad = \quad \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \qquad\qquad y \quad = \quad \frac{\det \begin{pmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Esempio. Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 3y + 4z = 19 \\ 5x + 6y - 7z = 13 \\ 7x + 9y - 17z = -31 \end{cases}.$$

Il determinante della matrice incompleta è 3, quindi la soluzione esiste ed è unica. Si ha

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 19 & 3 & 4 \\ 13 & 6 & -7 \\ -31 & 9 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 19 & 4 \\ 5 & 13 & -7 \\ 7 & -31 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 19 \\ 5 & 6 & 13 \\ 7 & 9 & -31 \end{pmatrix}}{3}.$$

[3] Oltre che dal ragionamento nella dimostrazione del Teorema 7.3.

Esercizio. Risolvere il sistema lineare (utilizzando il teorema di Cramer)

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 19 \\ -3x - 5y + 7z = 13 \\ -2x - 3y + 13z = -31 \end{cases} .$$

Del teorema di Cramer ne espongo due dimostrazioni (sono entrambe molto brevi, ma, almeno la seconda, concettualmente delicata).

Dimostrazione #1. Poiché $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, abbiamo che x_i è il prodotto della "$i^{\text{-esima}}$ riga di A^{-1}" per $\vec{b}$:

$$x_i \quad = \quad \sum_j (A^{-1})_{i,j} \cdot b_j \quad = \quad \sum_j (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} \cdot b_j \ ,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla formula del Teorema 6.1 (come al solito, $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la $j^{\text{-esima}}$ riga e la $i^{\text{-esima}}$ colonna). L'espressione trovata è esattamente il quoziente tra lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ rispetto alla $i^{\text{-esima}}$ colonna (quella dove appare il vettore dei termini noti $\vec{b}$) e $\det A$. □

Dimostrazione #2. Denotiamo con $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$ la matrice che si ottiene sostituendo la $i^{\text{-esima}}$ colonna della matrice identica I con il vettore delle incognite $\vec{x}$. Risulta

$$A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} \quad = \quad A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} \ . \tag{7.6}$$

Infatti, svolgendo il prodotto righe per colonne $A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$, quando la riga α di A si scontra con la colonna β di $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$, se $\beta \neq i$ si ottiene $a_{\alpha,\beta}$, mentre se la riga α di A si scontra proprio con la $i^{\text{-esima}}$ di $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$ (cioè col vettore $\vec{x}$) si ottiene b_α (che è l'elemento di posto α del vettore $\vec{b}$). A questo punto possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$\det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} \underset{(1)}{=} \det\big(A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}\big) \underset{(2)}{=} (\det A) \cdot (\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}) \underset{(3)}{=} (\det A) \cdot x_i \ ,$$

dove la (1) si ottiene prendendo il determinante dell'equazione (7.6), la (2) segue dal teorema di Binet, infine la (3) segue dal fatto che $\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} = x_i$.
Dividendo per $\det A$ i termini alle due estremità della nostra catena di uguaglianze si ottiene l'uguaglianza di Cramer, ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 7.7. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y + 2z = 2 \\ x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

utilizzando

i) il metodo di Gauss;

ii) il calcolo dell'inversa della matrice incompleta A nonché la formula (4.5);

iii) il teorema di Cramer.

Se il risultato che vi viene non è sempre lo stesso ... rifate i conti!!!

§8. Spazi Vettoriali.

Accade spesso che "oggetti" molto diversi tra loro hanno una certa "struttura matematica" comune, in questo caso ci si inventa un nome per quella struttura e la si studia. Tra i vantaggi di questo modo di lavorare: in colpo solo si studiano più oggetti, si impara a capire cosa dipende da cosa il che consente una visione più profonda.

In questo paragrafo la struttura matematica che studiamo è quella di *spazio vettoriale reale astratto*. La definizione la daremo dopo aver illustrato alcuni esempi, comunque vogliamo anticipare che uno spazio vettoriale reale astratto non è altro che un insieme, i cui elementi verranno chiamati "vettori", sul quale è definita una *somma tra vettori* e sul quale è definito *un prodotto per gli scalari* (operazione che ad un numero reale ed a un vettore associa un altro vettore). Naturalmente, per definizione, queste operazioni dovranno godere di alcune proprietà (cfr. Definizione 8.8). Vogliamo procedere dal concreto all'astratto, per cui ora non ci soffermiamo su tali proprietà e passiamo subito agli esempi. Lo diciamo una volta per tutte: negli esempi che seguono λ denoterà sempre un numero reale.

Esempio 8.1. Spazio $\mathbb{R}^n$ delle $n^{\text{-}ple}$ di numeri reali. In questo caso i vettori sono elementi del tipo $(x_1, ..., x_n)$, la somma è definita ponendo $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, ed il prodotto per gli scalari è definito ponendo $\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Questo esempio è fondamentale perché nello studio degli spazi vettoriali di dimensione finita ci si riconduce sempre ad esso. Più avanti vedremo come e perché.

Nell'indicare un elemento di $\mathbb{R}^n$ abbiamo utilizzato una notazione "per righe" $(x_1, ..., x_n)$. In realtà la notazione giusta consiste nello scrivere le $n^{\text{-}ple}$ di numeri reali come "vettori colonna":

$$\text{è opportuno scrivere} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{invece di} \quad (x_1, ..., x_n)\ .$$

Si osservi che questa notazione diventa obbligata se si vuole che il prodotto righe per colonne $A \cdot \vec{v}$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, abbia senso.

Esempio 8.2. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. In questo caso gli elementi del nostro insieme, cioè i vettori, sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e dove $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la proprietà distributiva del prodotto tra matrici, se $(s_1, ..., s_n)$ e $(t_1, ..., t_n)$ sono soluzioni del sistema dato, anche la "somma" $(s_1 + t_1, ..., s_n + t_n)$ nonché il "prodotto" $(\lambda \cdot s_1, ..., \lambda \cdot s_n)$ ne sono soluzioni. Queste "naturali" operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare sono, per definizione, le operazioni che definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato. Il lettore sagace avrà intuito che questo spazio è un *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ (cfr. esempio 8.1).

Esempio 8.3. Spazio delle funzioni continue definite su un intervallo I. Nel corso di analisi avete visto, o state per vedere, che la somma di due funzioni continue è ancora una funzione continua e che anche il prodotto $\lambda \cdot f(x)$ ha senso ed è una funzione continua, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $f(x)$ è una funzione continua. Di nuovo, queste operazioni definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato.

Esempio 8.4. Spazio delle successioni. Chiaramente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni, anche $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni... .

Esempio 8.5. Spazio delle successioni convergenti. Di nuovo, la somma di successioni convergenti è una successione convergente, il prodotto per un numero reale di una successione convergente è una successione convergente. In effetti questo esempio è un "sottospazio vettoriale" del precedente.

Nell'esempio che segue utilizzo la struttura di spazio vettoriale per risolvere un problema. È opportuno che lo studente legga ora questo esempio, accettando le considerazioni che inevitabilmente non hanno ancora una giustificazione formale, e che lo analizzi in maniera più critica dopo aver studiato gli spazi vettoriali in astratto.

Esempio 8.6. Spazio delle successioni di Fibonacci. Il problema è il seguente: trovare una formula per i termini della successione

$$\{1,\, 1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 8,\, 13,\, 21,\, 34,\, 55,\, 89,\, ...\}\ , \tag{8.6.1}$$

dove ogni numero è la somma dei due numeri che lo precedono, e.g. $13 = 5+8$, $55 = 21+34$, $89 = 34+55$ eccetera.

Soluzione. Per risolvere questo problema consideriamo lo spazio delle successioni, dette *successioni di Fibonacci*, $\{a_0,\, a_1,\, a_2,\, ...\}$ che soddisfano la legge

$$a_{n+2} \;=\; a_{n+1} \,+\, a_n\ , \quad \forall\, n \geq 0\ . \tag{8.6.2}$$

Non è difficile verificare che questo è uno spazio vettoriale, in particolare la somma di successioni che soddisfano (8.6.2) è ancora una successione che soddisfa (8.6.2) nonché il prodotto per uno scalare di una tale successione soddisfa anch'esso (8.6.2) . L'insieme, o meglio lo spazio vettoriale, di tali soluzioni lo chiameremo V. Chiaramente (8.6.1) è un vettore di V. Premesso ciò, dimentichiamoci di (8.6.1) e concentriamoci sullo spazio vettoriale, o meglio, sulla legge (8.6.2) che ne definisce gli elementi. Qualche vettore di V siamo in grado di trovarlo: tentiamo con una successione del tipo $\{a_n := x^n\}$, con x numero reale. La proprietà (8.6.2) si traduce nella richiesta $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$, $\forall n \geq 0$, cioè nella richiesta (portiamo al primo membro $x^{n+1} + x^n$ quindi raccogliamo x^n a fattore comune) $(x^2 - x + 1) \cdot x^n = 0$, $\forall n \geq 0$. A questo punto, risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - x + 1 = 0$ troviamo $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ e quindi troviamo che le due successioni

$$i)\ \left\{ b_n := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}, \qquad ii)\ \left\{ c_n := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$$

sono vettori di V, cioè soddisfano (8.6.2). A questo punto non abbiamo certo risolto il problema da cui siamo partiti. Lo ripeto, abbiamo semplicemente trovato due vettori di V. D'altronde sappiamo che questi vettori li possiamo moltiplicare per degli scalari e sommare tra loro. In termini più espliciti, sappiamo che ogni successione del tipo

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \{b_n\} \,+\, \mu \cdot \{c_n\} \;&=\; \{\lambda \cdot b_n \,+\, \mu \cdot c_n\} \\ &=\; \left\{ \lambda \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}, \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

è un vettore di V. Ora che abbiamo a disposizione molti vettori di V siamo in grado di risolvere il problema dal quale siamo partiti: la successione (8.6.1) del nostro problema comincia con $a_0 = a_1 = 1$, mentre la successione (8.6.3) comincia con $a_0 = \lambda + \mu$, $a_1 = \lambda \cdot (1+\sqrt{5})/2 + \mu \cdot (1-\sqrt{5})/2$. Imponendo l'uguaglianza, ovvero risolvendo il sistema lineare di due equazioni in due incognite $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \cdot (1+\sqrt{5})/2 + \mu \cdot (1-\sqrt{5})/2 = 1$ (sistema che lo studente è invitato a risolvere per esercizio), si trova $\lambda = (5+\sqrt{5})/10$ e $\mu = (5-\sqrt{5})/10$. Poiché la successione di Fibonacci (8.6.1) è univocamente individuata dai valori iniziali $a_0 = a_1 = 1$ e dalla legge (8.6.2), abbiamo risolto il nostro problema: la successione (8.6.1) deve necessariamente essere la successione

$$\{a_n\} \;=\; \left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}.$$

Lo studente scettico, ma anche quello che non lo è, verifichi ad esempio che per $n = 6$ questa espressione vale 13, che è il termine a_6 della (8.6.1), e che per $n = 8$ questa espressione vale 34, che è il termine a_8 della (8.6.1). ...sono rari i casi in cui calcolare qualche potenza di un binomio ha fatto male a qualcuno!

L'esempio che abbiamo appena discusso è importante perché l'equazione (8.6.2) è l'analogo discreto di un tipo di equazioni che descrivono dei fenomeni fisici: le equazioni differenziali lineari. Naturalmente non abbiamo intenzione di studiare in questa sede tale tipo di equazioni, il che è oggetto di studio di un corso di analisi del secondo anno. Vogliamo comunque dire due parole a riguardo.

Esempio 8.7. Spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare. Consideriamo un punto che si muove lungo una retta, la sua posizione sarà una funzione del tempo $x(t)$ (dove t indica il tempo trascorso). Questo punto sarà soggetto a delle forze, ad esempio possiamo supporre che c'è una molla ideale che lo spinge con una forza pari a $-3x\,newton$ (dove x è la coordinata sulla retta, relativa ad un sistema di riferimento la cui origine corrisponde al punto di equilibrio della molla) e che c'è una resistenza che ne rallenta la velocità pari a $-2v\,newton$, dove v denota la velocità del punto. Assumendo che il nostro punto abbia massa unitaria troviamo che la legge che ne descrive il moto è data dall'equazione

$$\frac{d^2}{d^2t}x(t) \quad = \quad -3x(t) \ - \ 2\frac{d}{dt}x(t)\ . \tag{8.7.1}$$

Ricordiamo che la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo e che l'accelerazione (derivata della velocità) è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo ed è pari alla somma delle forze applicate diviso la massa del corpo considerato. Il bello dell'equazione che abbiamo trovato è che la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione (la derivata di una somma è la somma delle derivate), nonché il prodotto per una scalare di una sua soluzione è anch'esso una sua soluzione. In definitiva, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (8.7.1) ha la struttura di spazio vettoriale. Interrompo qui le mie considerazioni perché andare oltre sarebbe oggetto di un corso di analisi sulle equazioni differenziali.

È arrivato il momento di enunciare la definizione di spazio vettoriale reale[4].

Definizione 8.8. Uno *spazio vettoriale reale* V è un insieme sul quale è definita una operazione di somma ed una operazione di moltiplicazione per gli scalari

$$\begin{array}{rcl} V\times V & \longrightarrow & V \\ (\vec v\,,\,\vec w) & \mapsto & \vec v+\vec w \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda\,,\,\vec v) & \mapsto & \lambda\cdot\vec v \end{array}$$

che soddisfano le proprietà che seguono

$\vec u+(\vec v+\vec w) \ = \ (\vec u+\vec v)+\vec w\,,\ \forall\,\vec u,\,\vec v,\,\vec w\,\in\,V$ (*associatività* della somma);

$\vec u+\vec v \ = \ \vec v+\vec u\,,\ \forall\,\vec u,\,\vec v\,\in\,V$ (*commutatività* della somma);

$\exists\,\vec 0\,\in\,V$ ed inoltre $\forall\vec v\,\in\,V\ \exists\,-\vec v\,\in\,V$ tali che

$\vec 0+\vec v \,=\, \vec v\,,\qquad \vec v+(-\vec v)\,=\,\vec 0,\qquad 0\vec v\,=\,\vec 0,\qquad 1\vec v\,=\,\vec v,\qquad (-1)\vec v\,=\,-\vec v$

(in particolare, esistenza dell'*elemento neutro* e degli *opposti*);

$(\lambda+\mu)\vec v \,=\, \lambda\vec v\,+\,\mu\vec v,\ \ \lambda(\vec v+\vec w)\,=\,\lambda\vec v\,+\,\lambda\vec w,\ \ \lambda(\mu\vec v)\,=\,(\lambda\mu)\vec v\ ,\ \ \forall\vec v,\,\vec w\,\in\,V\,,\ \lambda,\,\mu\,\in\,\mathbb{R}$

(proprietà *distributive*).

Osserviamo che sono tutte proprietà molto naturali e che nei casi degli esempi discussi sono tutte praticamente ovvie. Nello scrivere queste proprietà non ci siamo preoccupati di "evitare le ripetizioni", ad esempio la proprietà $0\vec v = \vec 0$ può essere dedotta dalle altre:

$$0\vec v \ = \ (1-1)\vec v \ = \ 1\vec v+(-1)\vec v \ = \ \vec v+(-\vec v) \ = \ \vec 0\ . \tag{$\star$}$$

[4] In realtà, tutto quello che diciamo in questo capitolo e nei prossimi due capitoli, oltre a valere per spazi vettoriali reali, vale anche per spazi vettoriali definiti sul campo dei numeri complessi nonché vale per spazi vettoriali definiti su un campo astratto arbitrario.

Esercizio. Indicare, per ognuna delle uguaglianze in ($\star$), quale proprietà è stata utilizzata tra quelle elencate nella Definizione 8.8. Inoltre, provare che *i)* $\vec{v}+\vec{v} = 2\vec{v}$; *ii)* se $\lambda \neq 0$, $\vec{v} \neq \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda\vec{v} \neq \vec{0}$; *iii)* il vettore nullo è unico; *iv)* l'opposto di un vettore è unico;

Ora introduciamo la nozione di sottospazio vettoriale. Nella sostanza un sottospazio vettoriale W di V è uno spazio vettoriale W contenuto in V.

Definizione 8.9. Sia V uno spazio vettoriale e sia W un sottoinsieme non-vuoto di V. Se risulta

$$(8.9') \qquad \begin{aligned} &\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W\,, \quad \forall\, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W\,; \\ &\lambda\vec{w} \in W\,, \quad \forall\, \vec{w} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

allora diciamo che W è un *sottospazio* vettoriale di V. Notiamo che la (8.9′) può essere scritta nella forma più compatta

$$(8.9'') \qquad \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in W\,, \quad \forall\, \vec{w}_1,\ \vec{w}_2 \in W\,, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Osservazione 8.10. Si osservi che un tale W ha anch'esso una naturale struttura di spazio vettoriale: alla luce della (8.9′), le due operazioni di somma e moltiplicazione per gli scalari definite su V inducono altrettante operazioni su W (i vettori di W sono anche vettori di V), queste, per definizione, sono le due operazioni su W. Tali operazioni soddisfano tutte le proprietà richieste dalla Definizione 8.8 perché le soddisfano come operazioni su V (qui usiamo l'ipotesi che V è uno spazio vettoriale).

Alla luce di quanto abbiamo appena osservato, un modo equivalente di definire la nozione di sottospazio vettoriale è quello di dire che W è un sottospazio di V se

i) W e V sono entrambi spazi vettoriali;
ii) $W \subseteq V$ (l'inclusione è una proprietà insiemistica);
iii) $w_1 +_{W} w_2 \;=\; w_1 +_{V} w_2\,, \quad \forall\; w_1, w_2 \in W$
(dove $+_{W}$ e $+_{V}$ denotano rispettivamente la somma su W e la somma su V).

Lo spazio dell'esempio 8.2, è un sottospazio vettoriale dello spazio dell'esempio 8.1, quelli degli esempi 8.5 e 8.6 sono sottospazi di quello dell'esempio 8.4, quelli degli esempi 8.3 e 8.7 sono sottospazi dello spazio vettoriale di tutte le funzioni (reali di variabile reale).

Esercizio. Suggerire altri esempi di spazi vettoriali e loro sottospazi.

Per comprendere meglio la proprietà *iii)* vediamo un esempio dove non è verificata.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}$, questo è l'esempio 8.1 con $n = 1$. Sia inoltre W l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di zero, con le "strane" operazioni indicate sotto, operazioni che denotiamo con $\underset{\text{strana}}{+}$ e $\underset{\text{strana}}{\cdot}$:

$$W \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 0 \right\}, \quad x \underset{\text{strana}}{+} y = x \cdot y\,, \quad \lambda \underset{\text{strana}}{\cdot} x \;=\; x^{\lambda}$$

(è possibile verificare che l'insieme W con le due operazioni indicate, soddisfa tutte le proprietà della Definizione 8.8). Nonostante W sia un sottoinsieme di V, <u>non</u> è un suo sottospazio vettoriale: le operazioni sono cambiate!

Non ci si preoccupi troppo dell'esempio dello spazio W con le due operazioni "strane", in un senso piu profondo che ora <u>non</u> voglio spiegare questo esempio non ha nulla di diverso dagli altri esempi visti! Basti dire che un po' come in un gioco da settimana enigmistica di esempi strambi se ne possono costruire molti, è sufficiente prendere un qualsiasi esempio di spazio vettoriale e cambiare i nomi dei vettori così da rendere le operazioni non più naturali.

Definizione 8.11. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ vettori in V. Una *combinazione lineare* dei vettori considerati è una espressione del tipo

$$\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k , \qquad \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} .$$

Definizione 8.12. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ vettori in V. Diciamo che i vettori considerati sono *linearmente dipendenti* se e solo se esistono $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} . \tag{8.12'}$$

Altrimenti, diciamo che sono *linearmente indipendenti.* Gli aggettivi "dipendente" e "indipendente" possono riferirsi anche all'insieme dei vettori: è corretto dire $\{ ... \}$ è un insieme dipendente (ovvero indipendente) di vettori.

In inciso, è meglio riferirsi "all'insieme" invece che "ai vettori", in questo modo si evitano possibili ambiguità linguistiche. Ad esempio, dire "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono dipendenti" può dar luogo a errori interpretativi. Infatti, se $\vec{v} = \vec{u} \neq \vec{0}$, si ha che $\vec{u}$ è indipendente, e anche che $\vec{v}$ è indipendente, pur non essendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ indipendenti!

Osservazione 8.13. Poiché nella (8.12) possiamo isolare un qualsiasi vettore che vi appare con coefficiente non nullo, possiamo affermare quanto segue:

> *Un insieme $\mathcal{B}$ di vettori è un insieme indipendente di vettori se e solo se nessun vettore $\vec{v} \in \mathcal{B}$ è combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{B}$.*

Vediamo più da vicino i casi dove $k = 1$ e $k = 2$ della Definizione 8.12.

Il vettore nullo (ovvero l'insieme costituito solo dal vettore nullo) è dipendente, infatti $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Viceversa, un vettore non nullo è indipendente (infatti, dato $\lambda \neq 0$, si ha che $\vec{v} \neq \vec{0}$ se e solo se $\lambda\vec{v} \neq \vec{0}$). Ricapitolando: un insieme costituito da un solo vettore è dipendente se e solo se questo vettore è il vettore nullo.

Due vettori sono indipendenti se e solo se non sono proporzionali, intendendo che nessuno due è un multiplo dell'altro (ciò segue dall'Osservazione 8.13).

Definizione 8.14. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme. Si definisce $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di $\mathcal{S}$:

$$\mathrm{Span}\mathcal{S} := \left\{ \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} \\ \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \mathcal{S} \end{matrix} \right\}$$

(da notare che, in particolare, l'insieme $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ contiene $\mathcal{S}$).

Proposizione 8.15. *Si abbiamo V ed $\mathcal{S}$ come sopra. Si ha che* $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ *è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Si deve verificare che $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ soddisfa le proprietà della Definizione 8.9. La somma di combinazioni lineari è una combinazione lineare ed il prodotto di una combinazione lineare per una costante è una combinazione lineare, infatti

$$(\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k) + (\beta_1\vec{v}_1 + ... + \beta_k\vec{v}_k) = (\alpha_1+\beta_1)\vec{v}_1 + ... + (\alpha_k+\beta_k)\vec{v}_k ,$$
$$\lambda \cdot \big(\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k\big) = (\lambda\alpha_1)\vec{v}_1 + ... + (\lambda\alpha_k)\vec{v}_k .$$

□

Ora osserviamo che se W è un sottospazio vettoriale di V ed $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme di W, allora W contiene $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ (questo perché le **c.l.** di vettori in $\mathcal{S}$ già appartengono a W). In altri termini, ogni sottospazio vettoriale di V contenente $\mathcal{S}$ contiene anche $\operatorname{Span}\mathcal{S}$. Questa osservazione, insieme alla Proposizione 8.15, ci dice che $\operatorname{Span}\mathcal{S}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $\mathcal{S}$ (cioè $\operatorname{Span}\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale contenente $\mathcal{S}$ nonché contenuto in ogni altro sottospazio vettoriale contenente $\mathcal{S}$).

Definizione 8.16. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme,

i) se $\operatorname{Span}\mathcal{S} = V$ diciamo che $\mathcal{S}$ *genera* V;

ii) se esiste un insieme finito che genera V diciamo che V è *finitamente generato.*

Studieremo esclusivamente gli spazi vettoriali finitamente generati. D'ora in poi, con la locuzione "spazio vettoriale" intenderò sempre "spazio vettoriale finitamente generato".

Definizione 8.17. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme. Diciamo che

$\mathcal{S}$ è una *base* di V se è un insieme indipendente che genera V.

Osservazione 8.18. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Poiché per ipotesi $\mathcal{B}$ genera V, per ogni $\vec{v} \in V$ esistono dei coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tali che

$$\vec{v} \quad = \quad \alpha_1\vec{b}_1 \ + \ ... \ + \ \alpha_n\vec{b}_n \ ;$$

poiché $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente, tali coefficienti sono unici: se $\alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{v} = \alpha'_1\vec{b}_1 + ... + \alpha'_n\vec{b}_n$, allora $(\alpha_1 - \alpha'_1)\vec{b}_1 + ... + (\alpha_n - \alpha'_n)\vec{b}_n = \vec{0}$ e quindi, essendo $\mathcal{B}$ un insieme indipendente, si deve avere $\alpha_i = \alpha'_i$, $\forall\, i = 1, ..., n$.

Definizione 8.19. I coefficienti dell'osservazione precedente $\alpha_1, ..., \alpha_n$ si chiamano

coordinate del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio. Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è costituita dall'insieme di vettori

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Infatti, questi sono indipendenti e generano $\mathbb{R}^2$: da un lato, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ (ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$), d'altro canto $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ non sono proporzionali.

La base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ si chiama *base canonica* dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Si osservi che le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica sono proprio i coefficienti λ e μ.

Generalizziamo quanto abbiamo appena visto: consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. L'insieme di vettori

$$\mathcal{B}_{Can} \quad = \quad \left\{ \vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \ ..., \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituisce una base, detta *base canonica*, di $\mathbb{R}^n$. Anche in questo caso, le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica sono proprio i coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (lo studente verifichi quanto abbiamo appena affermato).

Esercizio. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, calcolare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. I vettori di $\mathcal{B}$ sono indipendenti e generano $\mathbb{R}^2$. Infatti, il sistema lineare $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ammette un'unica soluzione per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
Le coordinate $\alpha_1,\ \alpha_2$ di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo il sistema lineare $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$. Risulta $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 5$. □

Osservazione 8.20. Sia V uno spazio vettoriale. Nel momento in cui fissiamo una base di V abbiamo a disposizione delle coordinate: associando ad ogni vettore $\vec{v} \in V$ la n^{-pla} delle sue coordinate $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ otteniamo una identificazione di V con $\mathbb{R}^n$. In altri termini, la funzione

$$\begin{array}{rccc} \textit{coordinate}: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \mapsto & \text{“coordinate di } \vec{v}\text{”} \end{array}$$

è biunivoca (ad ogni vettore di V corrisponde un unico elemento di $\mathbb{R}^n$ e viceversa). Torneremo su questa funzione nel §12 (vedremo che è una applicazione lineare, cfr. Oss. 12.26).

Lo studio della dipendenza lineare ed il problema della determinazione di una base di uno spazio vettoriale si basano su un risultato preliminare fondamentale.

Lemma 8.21. Siano $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{S}$ due insiemi di vettori di uno spazio vettoriale V.

i) Se $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ allora $\mathrm{Span}\mathcal{S}' \subseteq \mathrm{Span}\mathcal{S}$;

ii) se $\mathcal{S}$ è un insieme indipendente di vettori e $\vec{w} \notin \mathrm{Span}\mathcal{S}$, allora l'insieme $\mathcal{S}\cup\{w\}$ è anch'esso un insieme indipendente di vettori;

iii) sia $\vec{w} \in \mathcal{S}$, se $\vec{w}$ è combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}$, allora, posto $\mathcal{S}' := \mathcal{S} - \{\vec{w}\}$ (l'insieme ottenuto togliendo $\vec{w}$ dall'insieme $\mathcal{S}$), risulta

$$\mathrm{Span}\mathcal{S}' \quad = \quad \mathrm{Span}\mathcal{S}\,.$$

Dimostrazione. La proprietà *i)* segue dal fatto che le combinazioni lineari di vettori di $\mathcal{S}'$ sono, a maggior ragione, combinazioni lineari di vettori di $\mathcal{S}$.
Dimostriamo la *ii)*. Ragionando per assurdo, se una combinazione lineare (*c.l.*) di vettori di $\mathcal{S}\cup\{w\}$ dà il vettore nullo, abbiamo la seguente dicotomia: o la *c.l.* coinvolge $\vec{w}$, e in questo caso $\vec{w} \in \mathrm{Span}\mathcal{S}$, oppure la *c.l.* non coinvolge $\vec{w}$, e in questo caso $\mathcal{S}$ non è un insieme indipendente di vettori.
Dimostriamo la *iii)*. Stiamo supponendo che esistono $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \mathcal{S}$ e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{w} \quad = \quad \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k$$

e vogliamo provare che ogni elemento di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ appartiene anche a $\mathrm{Span}\mathcal{S}'$ (il viceversa segue dalla *i)*). Se $\vec{u} \in \mathrm{Span}\mathcal{S}$ allora è possibile scrivere $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_r\vec{u}_r$, dove gli $\vec{u}_i$ stanno in $\mathcal{S}$. Se tra gli $\vec{u}_i$ non c'è $\vec{w}$ non c'è nulla da dimostrare perché la combinazione lineare scritta è anche una combinazione lineare di vettori di $\mathcal{S}'$. Se tra gli $\vec{u}_i$ c'è $\vec{w}$, ad esempio $\vec{u}_1 = \vec{w}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{u} \quad &= \quad \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_r\vec{u}_r\,, \\ &= \quad \lambda_1(\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k) + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda\vec{u}_r\,. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione scritta è una combinazione lineare di vettori di $\mathcal{S}'$. □

Supponiamo di avere un insieme finito di vettori $\mathcal{S}$ e di essere interessati esclusivamente a $\mathrm{Span}\mathcal{S}$. L'affermazione *iii)* del Lemma 8.21 ci consente di buttare via un vettore $\vec{v} \in \mathcal{S}$

qualora sia combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}$, quindi ci consente di trovare una base di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$. Vediamo come:

Algoritmo dell'estrazione di una base 8.22. Consideriamo un primo vettore (non nullo) di $\mathcal{S}$; scegliamo un secondo vettore, se questo è un multiplo del primo lo scartiamo, altrimenti lo teniamo; scegliamo un terzo vettore e se questo è combinazione lineare dei primi due lo scartiamo, altrimenti lo teniamo. Quindi iteriamo il procedimento di scegliere un nuovo vettore e tenerlo se e solo se non è combinazione lineare di quelli scelti precedentemente. N.b.: per il Lemma 8.21, affermazione *ii*), l'insieme dei vettori che stiamo tenendo è indipendente.

Terminati i vettori di $\mathcal{S}$, avremo trovato la base cercata. Infatti, come già osservato i vettori scelti sono indipendenti, d'altro canto generano anch'essi $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ per Lemma 8.21, affermazione *iii*).

In particolare, l'algoritmo dell'estrazione di una base ci assicura la seguente proposizione.

Proposizione 8.23. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S} \subset V$ un sottoinsieme finito che genera V. Esiste una base $\mathcal{B}$ di V contenuta in $\mathcal{S}$, per trovarla è sufficiente applicare l'algoritmo dell'estrazione di una base.*

Esempio. Consideriamo i vettori $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e determiniamo una base di $V := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$:
prendiamo $\vec{b}_1$, quindi consideriamo $\vec{b}_2$ e lo teniamo perché non è un multiplo di $\vec{b}_1$, consideriamo $\vec{b}_3$ e lo eliminiamo perché è combinazione lineare di $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$, consideriamo $\vec{b}_4$ e lo teniamo perché non è combinazione lineare degli altri vettori scelti. In definitiva abbiamo che l'insieme $\mathcal{B}' := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4\}$ è una base di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$.

Osservazione 8.24. Ogni spazio vettoriale ammette moltissime basi, può accadere che abbiamo bisogno di trovare una base contenente certi particolari vettori fissati a priori. Una base di tale tipo si chiama "completamento ad una base di un insieme indipendente di vettori", per trovarla possiamo utilizzare l'algoritmo dell'estrazione di una base 8.22: dati dei vettori indipendenti $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ di uno spazio vettoriale V, possiamo considerare (in questo ordine) i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m$, dove $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ è un insieme di vettori che genera V (l'esistenza di quest'insieme di vettori è garantita dall'ipotesi che V è finitamente generato, cfr. Definizione 8.16). Applicando l'algoritmo dell'estrazione di una base troviamo una base di V contenente i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ (questo perché sono i primi che scegliamo e sono indipendenti). In particolare, il ragionamento esposto dimostra il teorema del "completamento ad una base di un insieme indipendente di vettori":

Teorema 8.25 (del completamento). *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ dei vettori indipendenti di V. Allora esiste una base di V contenente i vettori dati.*

Esercizio 8.26. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: utilizzare i vettori della base canonica per completare l'insieme $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, cioè si applichi l'algoritmo 8.22 all'insieme dei vettori $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

Esercizio. Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposizione 8.27. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora $\mathcal{B}$ è costituita da un numero n finito di vettori, il numero n dipende solo dallo spazio V: se $\mathcal{B}'$ è un'altra base di V allora anche $\mathcal{B}'$ ha n elementi. Inoltre, ogni insieme $\mathcal{S}$ di vettori che ha più di n elementi è linearmente dipendente nonché ogni insieme indipendente costituito da n vettori è una base.*

L'idea della dimostrazione consiste nel sostituire uno alla volta i vettori di $\mathcal{B}$ con quelli di $\mathcal{B}'$ mantenendo la proprietà di avere una base di V.

Dimostrazione. Innanzi tutto verifichiamo che $\mathcal{B}$ è necessariamente un insieme finito: per ipotesi V è finitamente generato, indichiamo con $\mathcal{G}$ un insieme di generatori di V, ogni elemento di $\mathcal{G}$ è **c.l.** di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$ ed il il sottoinsieme $\mathcal{B}_0$ di $\mathcal{B}$ degli elementi coinvolti in queste **c.l.** è finito e genera esso stesso V (infatti $\mathrm{Span}\mathcal{B}_0 \supseteq \mathcal{G} \implies \mathrm{Span}\mathcal{B}_0 \supseteq \mathrm{Span}\mathcal{G} = V$), ne segue l'uguaglianza $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ e pertanto la finitezza di $\mathcal{B}$ (risulta $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ perché, ragionando per assurdo, un eventuale vettore nella differenza insiemistica $\mathcal{B} \smallsetminus \mathcal{B}_0$ sarebbe **c.l.** dei vettori di $\mathcal{B}_0$ e ciò violerebbe l'indipendenza di $\mathcal{B}$).
Sia $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\vec{d}_1, ..., \vec{d}_k\}$. Come primo passo consideriamo i vettori $\{\vec{d}_1, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$, quindi applichiamo l'algoritmo dell'estrazione di una base. Iteriamo questo procedimento: ogni volta aggiungiamo un vettore di $\mathcal{B}'$ (inserendolo all'inizio) e applichiamo l'algoritmo. Alla fine arriveremo ad avere solamente i vettori di $\mathcal{B}'$. Quando aggiungiamo un vettore, passiamo da una base a un sistema dipendente di generatori, quindi, quando applichiamo l'algoritmo togliamo almeno un vettore. Poiché ad ogni passo aggiungiamo un vettore e ne togliamo almeno uno, i vettori di $\mathcal{B}'$ sono in numero minore o uguale a quelli di $\mathcal{B}$, cioè risulta $k \leq n$. Scambiando i ruoli tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ otteniamo $n \leq k$. In definitiva $n = k$. □

Definizione 8.28. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\mathcal{B}$ una base. Si definisce la dimensione di V ponendo

$$\dim V \quad := \quad n \quad = \quad \text{“numero degli elementi di } \mathcal{B}\text{''} .$$

Sottolineiamo che la definizione ha senso (è ben posta) perché, in virtù della Proposizione 8.27, tale numero <u>non</u> dipende dalla particolare base $\mathcal{B}$ che abbiamo a disposizione.

Esercizio 8.29. Siano

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base di $V := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Esercizio 8.30. Verificare che gli insiemi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad , \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituiscono due basi dello stesso sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 8.31. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Si determini un'altra base di W.

Esercizio 8.32. Determinate le coordinate del vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\}$ quando:

$$a) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8.33. Si consideri lo spazio vettoriale $V := \operatorname{Span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Estrarre dall'insieme $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ una base $\mathcal{B}_V$ di V, verificare che $\vec{v} \in V$ e determinare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_V$, quando:

$$a) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$c) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -45 \\ 38 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -473 \\ 189 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -473 \\ 189 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8.34. Determinare la dimensione di $\operatorname{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ quando:

$$a) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nell'introduzione a questo paragrafo abbiamo accennato a molti esempi di spazi vettoriali (spazi di funzioni, di successioni eccetera), poi di fatto mentre da un lato discutevamo concetti e teoremi astratti, come unico esempio trattavamo l'esempio dello spazio $\mathbb{R}^n$. Nella parte finale di questo paragrafo trattiamo l'esempio dello spazio dei polinomi e l'esempio dello spazio delle matrici.

Esempio 8.35. Lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a d è uno spazio vettoriale di dimensione $d+1$ (quindi finita), l'insieme

$$\mathcal{B}_V \quad = \quad \{1,\, x,\, x^2,\, ...,\, x^d\}$$

costituisce una base di V.

I polinomi possono essere sommati tra loro e possono essere moltiplicati per una costante, nonché tutte le proprietà della Definizione 8.8 sono soddisfatte. Questo spazio vettoriale non è finitamente generato, lo è il sottospazio dei polinomi di grado limitato dall'intero d (che l'insieme dei polinomi aventi tale limitazione sul grado sia un sottospazio dello spazio di tutti i polinomi è evidente: la somma di polinomi di grado limitato da d è anch'essa un polinomio di grado limitato da d, stessa cosa per il prodotto di un tale polinomio per una costante). In effetti l'insieme $\mathcal{B}_V$ è una base di V per ragioni banali: i polinomi in V sono espressioni del tipo $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$, dove $a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$, ovvero combinazioni lineari dei polinomi $1, x, x^2, ..., x^d$. L'unicità della scrittura garantisce l'indipendenza dell'insieme $\mathcal{B}_V$ (in merito alla dimostrazione dell'indipendenza di $\mathcal{B}_V$ vale la pena essere più precisi ed osservare che dipende dal modo in cui si introducono i polinomi: se si introducono i polinomi come espressioni formali non c'è assolutamente nulla da dimostrare, mentre se si introducono i polinomi come funzioni reali di variabile reale del tipo $a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$ tale indipendenza si riduce al fatto che la funzione $p(x)$ è la funzione nulla se e solo se gli a_i sono tutti nulli).

Esercizio 8.36. Verificare che l'insieme W dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 3 che si annullano in $x = 2$, cioè soddisfacenti la condizione $p(2) = 0$, costituisce uno spazio vettoriale, determinarne la dimensione ed una base.

Soluzione. Dati $p, q \in W$ si ha $(\alpha p + \beta q)(2) = \alpha p(2) + \beta q(2) = 0$, ovvero $\alpha p + \beta q \in W$. Questo prova che W è un sottospazio dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e pertanto è esso stesso uno spazio vettoriale (cfr. Def. 8.9 e Oss. 8.10).

Per trovarne una base possiamo ragionare come segue: i polinomi in W soddisfano la condizione $p(2) = a_0 + 2a_1 2 + 4a_2 + 8a_3 = 0$, ovvero $a_0 = -2a_1 2 - 4a_2 - 8a_3$. Quindi i polinomi in W sono i polinomi del tipo $-2a_1 - 4a_2 - 8a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ essendo a_1, a_2, a_3 liberi di assumere qualsiasi valore. In definitiva

$$\mathcal{B}_W \quad := \quad \left\{ -2+x\,,\ -4+x^2\,,\ -8+x^3 \right\}$$

è una base di W. In alternativa, avremmo potuto dire (evitando qualsiasi calcolo)

$$\mathcal{B}'_W \quad := \quad \left\{ x-2\,,\ (x-2)^2\,,\ (x-2)^3 \right\}$$

è una base di W semplicemente perché i vettori indicati appartengono a W, sono indipendenti per ragioni di grado, generano W per ragioni di dimensione (se non lo generassero si avrebbe $\dim W > 3$ il che è impossibile essendo W un sottospazio strettamente contenuto in uno spazio di dimensione 4).

Osservazione. Se l'esercizio ci avesse chiesto di scrivere una base dello spazio U dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 6 soddisfacenti le condizioni $p(2) = p(5) = p(11) = 0$, per trovarne una base utilizzando il primo metodo avremmo dovuto risolvere un complicato sistema di 3 equazioni in 7 incognite (essendo 7 la dimensione dello spazio di tutti i polinomi di grado minore o uguale a 6), mentre, utilizzando il secondo metodo avremmo potuto affermare immediatamente che

$$\mathcal{B}_U \ := \ \left\{(x–2)(x–5)(x–11),\ (x–2)^2(x–5)(x–11),\ (x–2)^3(x–5)(x–11),\ (x–2)^4(x–5)(x–11)\right\}$$

è una base di U (senza bisogno di fare calcoli!). Infatti, i polinomi indicati sono indipendenti per ragioni di grado (come nell'esercizio). D'altro canto ognuna delle tre condizioni $p(2) = 0$, $p(5) = 0$, $p(11) = 0$ fa scendere almeno di uno la dimensione, quindi si avrà $\dim U \leq 4$ e l'insieme indipendente $\mathcal{B}_U$ genererà U per ragioni di dimensione.

Una precisazione in merito all'affermazione "ognuna delle tre condizioni $p(2) = 0$, $p(5) = 0$,

$p(11) = 0$ fa scendere almeno di uno la dimensione". Il polinomio $(x-2)(x-5)$ si annulla per $x = 2$ ed $x = 5$ ma non per $x = 11$ (stessa cosa se permutiamo i ruoli dei tre numeri in questione), questo ci dice che imponendo una alla volta le condizioni in questione ad ogni passo si trova uno spazio strettamente contenuto nel precedente e pertanto dimostra quanto affermato.

Esempio 8.37. Fissati due interi m ed n, lo spazio $M_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale di dimensione mn (quindi finita), l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici $\Delta_{i,j}$ nulle ovunque tranne che nell'elemento di posto i, j dove hanno un 1 costituisce una base di $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Per intenderci, ad esempio, l'insieme

$$\mathcal{B}_{M_{3,2}(\mathbb{R})} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituisce una base di $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
Infatti, le matrici in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con m ed n interi fissati) possono essere sommate tra loro e possono essere moltiplicate per una costante, nonché tutte le proprietà della Definizione 8.8 sono soddisfatte. Il fatto che l'insieme $\mathcal{B}$ costituisca una base di $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è anch'esso immediato (ogni matrice 3×2 la possiamo scrivere, in modo unico, come **c.l.** delle sei matrici indicate ed è evidente che ciò si generalizza al caso $m \times n$ con m ed n arbitrari).

Si noti che, nella sostanza, lo spazio vettoriale delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$ non è molto diverso dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{nm}$, i due spazi differisco solo per come sono disposti gli elementi (sono entrambi tabelle di numeri), ad esempio

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^4 \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(ciononostante sono oggetti distinti, non vanno confusi).

Esercizio 8.38.
a) Provare che l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ è un sottospazio di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
b) Determinare la dimensione ed una base dello spazio delle matrici simmetriche 2×2.

Esercizio 8.39. Stabilire, nei casi che seguono, se W è un sottospazio vettoriali di V e, in caso di risposta affermativa, determinare la dimensione di W.

i) $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid \det A = 0 \}$;

ii) $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid \operatorname{traccia} A = 0 \}$;

iii) $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$, $W = \left\{ A \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = 0 \right\}$;

iv) $V = M_{n,m}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid X \cdot A = 0 \}$
(essendo $X \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ una matrice fissata a priori);

v) $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid A \cdot A = 0 \}$

vi) $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid \text{esiste un intero } k \text{ tale che } A^k = 0 \}$

vii) $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid \text{esiste un intero } k \text{ tale che } A^k = 0 \}$

viii) $V = M_{3,3}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid A \text{ è antisimmetrica, cioè } {}^tA = -A \}$

ix) $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$, $W = \{ A \in V \mid A \text{ è antisimmetrica, cioè } {}^tA = -A \}$

dove, data una matrice A quadrata, A^k denota il prodotto $A \cdot \ldots \cdot A$ (k-volte), mentre $\operatorname{traccia} A$ denota la somma degli elementi sulla diagonale.

§9. Rango di una matrice.

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice.

Definizione 9.1. Un *minore* estratto da A è una matrice quadrata ottenuta cancellando alcune righe ed alcune colonne di A, l'*ordine* di una matrice quadrata è il numero delle sue righe. Il *rango* di A, che indicheremo con $\operatorname{rg} A$, è il massimo degli ordini dei minori invertibili.

Esempio 9.2. Un minore di $A = \begin{pmatrix} -14 & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & 2 \\ 5 & -1 & 7 & -9 \\ -9 & \mathbf{-4} & \mathbf{11} & -7 \end{pmatrix}$ è la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ ottenuta cancellando la seconda riga, la prima colonna e la quarta colonna di A. Poiché $\det B \neq 0$, il rango di A è maggiore o uguale a 2. A priori, non possiamo dire altro.

Osservazione 9.3. Data una matrice A, se una riga è combinazione lineare di certe altre righe, a maggior ragione continuerà ad esserlo se in A cancelliamo alcune colonne.

Lemma 9.4. Sia A una matrice. Le righe (ovvero colonne) di A individuate da un minore invertibile sono indipendenti. In particolare, il rango di A non può superare né il numero massimo di righe indipendenti né il numero massimo di colonne indipendenti.

Dimostrazione. Per l'osservazione 5.12, le righe di un minore invertibile sono indipendenti. D'altro canto, per l'osservazione 9.3, le righe di A coinvolte da tale minore sono indipendenti (se per assurdo fossero dipendenti, sarebbero dipendenti anche le righe del minore). Ciò prova che il rango di A non può superare il numero massimo di righe indipendenti.
Poiché possiamo scambiare ovunque (anche nell'osservazione 9.3) il termine "riga" col termine "colonna", lo stesso risultato vale anche per le colonne. □

Vedremo che valgono dei risultati più forti: se una riga di una matrice è combinazione lineare delle altre, ai fini del calcolo del rango può essere eliminata; da un insieme di righe indipendenti è possibile estrarre un minore invertibile; il rango di una matrice è uguale al numero massimo di righe indipendenti. Cfr. Teorema 9.6 e Corollario 9.8.

Tornando all'esempio 9.2, poiché la terza riga di A è uguale alla somma delle prime due, non è possibile trovare 3 righe indipendenti e pertanto il rango di A non può essere maggiore o uguale a 3. D'altro canto, avendo già visto che $\operatorname{rg} A \geq 2$, si ha $\operatorname{rg} A = 2$.

Lemma 9.5. Se S è una matrice a scala, i quattro numeri

$$p := \text{numero dei pivot} \quad (\text{cfr. Def. } 2.4),$$

$$r := \operatorname{rg}(S), \qquad \rho_r := \mathit{max}\ \text{righe indip.}, \qquad \rho_c := \#\, \mathit{max}\ \text{col. indip.}$$

sono uguali tra loro.

Dimostrazione. Direi che basta guardare com'è fatta una matrice a scala (si veda l'esempio sotto)! ...entriamo nel dettaglio.
Di sicuro il rango di S non può superare il numero di righe non nulle (uguale al numero dei pivot). Quindi $r \leq p$ (e $\rho_r \leq p$). D'altro canto la matrice che si ottiene cancellando le righe nulle e le colonne che non corrispondono ad alcun pivot è una matrice quadrata, di ordine uguale al numero delle righe non nulle di A, triangolare superiore, con gli elementi sulla diagonale che sono non nulli, e quindi invertibile. Questo dimostra la disuguaglianza opposta e, visto il Lemma 9.4, che le righe, come pure le colonne, corrispondenti ai pivot sono indipendenti. Quindi $r = p = \rho_r$, $p \leq \rho_c$. Infine, le colonne non corrispondenti ai pivot possono essere scritte come c.l. di quelle corrispondenti ai pivot e pertanto si ha anche $\rho_c \leq p$ (per esercizio, convincersene). □

Esempio. Consideriamo la matrice a scala

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 6 & 7 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{8} & 9 & \mathbf{10} & \mathbf{11} & 12 & 13 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & -3 & -4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-5} & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le colonne seconda, terza, quinta e sesta sono quelle dei pivot. Cancellando la quinta riga, la prima, la quarta, la settima e l'ottava colonna si ottiene il minore invertibile di ordine massimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} .$$

Pertanto, si ha $\operatorname{rg} A = 4$.

Teorema 9.6. *Il rango* $\operatorname{rg} A$ *di una matrice* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *coincide con*

i) *il numero massimo di righe indipendenti di* A*;*

ii) *il numero massimo di colonne indipendenti di* A*.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto (Lemma 9.4) che

$$\operatorname{rg}(A) \leq \# \, max \text{ righe indip.} \quad , \qquad \operatorname{rg}(A) \leq \# \, max \text{ col. indip.}$$

D'altro canto, posto $k = \rho_c(A)$ uguale al numero massimo di colonne indipendenti e indicata con C la matrice ottenuta considerando un insieme massimale di k colonne indipendenti di A, dal fatto che il sistema lineare $C \cdot \vec{x} = \vec{0}$ non ha soluzioni non banali (non ci stanchiamo di ripetere che il prodotto $C \cdot \vec{x}$ non è altro che la combinazione lineare di coefficienti $x_1, ..., x_k$ delle colonne di C) e dalla teoria svolta studiando i sistemi lineari, segue che il sistema ha k equazioni indipendenti, ovvero C ha almeno k righe indipendenti, e che il determinante della matrice costituita da tali k righe di C è non nullo. In particolare, $\operatorname{rg}(A) \geq k$. Stessa cosa per il numero massimo di righe indipendenti $\rho_r(A)$: basta scambiare i ruoli di righe e colonne (ovvero considerare la trasposta di A). □

Osservazione 9.7. I passi dell'E.G. non mutano né il numero massimo di righe indipendenti, né il numero massimo di colonne indipendenti, né tantomeno il rango. Infatti, come già sototlineato più volte, i passi dell'E.G. non mutano le relazioni tra le colonne di una matrice, a maggior ragione non mutano il numero massimo di colonne indipendenti (che certe colonne siano indipendenti equivale a dire che tra esse non ci sono relazioni non banali). Pertanto, dal Teorema 9.6 segue che anche il rango di una matrice è invariante rispetto alle operazioni dell'E.G., come pure il numero massimo di righe indipendenti. Quindi, un modo per calcolare il rango di una matrice è quello di effettuare la riduzione a scala e poi contare il numero dei pivot (equivalentemente, delle righe non nulle).

Corollario 9.8. Data una matrice A,

i) da h righe indipendenti è possibile estrarre un minore invertibile di ordine h;

ii) se una riga di A è combinazione lineare delle altre, ai fini del calcolo del rango può essere eliminata;

Analoghi risultati valgono per le colonne.

Dimostrazione. Nella dimostrazione del Teorema 9.6 abbiamo visto che se ci sono k colonne indipendenti, allora da queste si può estrarre un minore invertibile di ordine k. Da questo risultato, letto per la trasposta di A, segue la i).

La ii) segue dall'osservazione 9.7. Infatti, se una riga ρ è combinazione lineare delle altre, con un passo dell'E.G. può essere sostituita con la riga nulla e pertanto eliminata. $\square$

Riassumendo e andando al cuore di quanto visto per dimostrare il Teorema 9.6 ed il Corollario 9.8, data una matrice A abbiamo quattro numeri

$$r := \mathrm{rg}(A)\,, \qquad \rho_r := \mathit{max} \text{ righe indip. di } A\,, \qquad \rho_c := \#\, \mathit{max} \text{ col. indip. di } A$$
$$p := p(S) = r(S) = \rho_r(S) = \rho_c(S) \ \ \text{(cfr. Lemma 9.5)},$$

dove S è una qualsiasi riduzione a scala di A. Si tratta di dimostrare che questi numeri sono uguali tra loro. Le disuguaglianze $r \leq \rho_r$ e $r \leq \rho_c$ valgono per ragioni elementari (Lemma 9.4). D'altro canto $p = \rho_c(S) = \rho_c(A)$, questo perché vale il già menzionato risultato più forte che non mi stanco di ripetere: tra le colonne di A ci sono le stesse identiche relazioni che ci sono tra le colonne di S. Si noti che essendo p uguale a $\rho_c(A)$, un numero che non coinvolge S, si ha che p non dipende dalla particolare matrice a scala S trovata, cioè non dipende dalla riduzione a scala effettuata. D'altro canto si ha anche $\rho_r(A) = \rho_r(S)$ (questi due numeri sono il numero massimo di equazioni indipendenti di due sistemi lineari equivalenti). Quindi $\rho_r(A) = \rho_c(A)$ (in quanto entrambi uguali a p).
A questo punto la strada è in discesa: abbiamo $\rho_r(X) = \rho_c(X)$ per ogni matrice X, in particolare ciò vale per la matrice A' costituita da $\rho_r(A)$ righe indipendenti di A per cui, da A', possiamo estrarre $\rho_r(A) = \rho_r(A') = \rho_c(A')$ colonne indipendenti. Il corrispondente minore (che è anche un minore di A) sarà una matrice quadrata di ordine $\rho_r(A)$ avente colonne indipendenti e, per questa ragione (cfr. proprietà del determinante), invertibile.

Esercizio 9.9. Determinare il rango delle matrici che seguono.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.10. Determinare il rango delle matrici che seguono al variare di k.

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & k+2 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ k-1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 3 \\ 0 & 0 \\ 3k & 9 \\ 2k & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k-1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2k-1 & 3 \\ 0 & 0 & k & 3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4-k & 1 & 0 \\ -2 & k+2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 3k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k-6 & 3k & 2k+12 \\ 0 & 0 & -1 & k+4 & -3 & 2k+8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & -4 & 12 \\ -9 & k & -3k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & k & k & k & k & k \\ 0 & 0 & k & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k^2+k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^3+k^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1-k \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \\ k & k \end{pmatrix}.$$

Sebbene la riduzione a scala rappresenti il modo più rapido per calcolare il rango di una matrice è bene conoscere un importante risultato noto come “Teorema degli Orlati”. Per affermare che il rango di una matrice è maggiore o uguale di un certo intero k è sufficiente trovare un minore invertibile di ordine k. D'altro canto per limitare dall'alto il rango di una matrice, ad esempio per provare che questo è minore o uguale di k, dovremmo verificare che tutti i minori di ordine maggiore o uguale di $k+1$ non siano invertibili. Il teorema che segue ci dice, rendendo meno pesante tale verifica, che è sufficiente guardare solo “alcuni” minori della nostra matrice: quelli ottenuti “orlando” un minore invertibile.

Teorema 9.11 (degli orlati). *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice e sia B un minore invertibile di ordine k. Se i minori di ordine $k+1$ contenenti B non sono invertibili allora*

$$\operatorname{rg}(A) \quad = \quad k$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che se il rango di A è maggiore di k allora esiste un minore invertibile di ordine $k+1$ contenente il minore B.
Sia V lo spazio generato dalle colonne di A. Risulta $\dim V \geq k+1$. D'altro canto le colonne individuate da B sono indipendenti e, non potendo generare V, non generano almeno una delle colonne esterne a B. In questo modo individuiamo $k+1$ colonne indipendenti contenenti le colonne individuate da B. Sia ora A' la matrice costituita da queste colonne. Questa ha rango $k+1$ (Teorema 9.6) e contiene B come suo minore invertibile. Applicando lo stesso argomento di prima, ma questa volta ragionando per righe, individuiamo $k+1$ righe di A' che sono indipendenti nonché contengono le righe di B.
Le $k+1$ righe e colonne di A così individuate costituiscono un minore come richiesto. □

Si noti che l'argomento esposto non solo dimostra l'esistenza di un minore invertibile di ordine $k+1$ contenente B ma esibisce anche un algoritmo per individuarlo.

Come dimostra l'esercizio che segue, punto a), il passaggio “restrizione ad A'” è fondamentale.

Esercizio 9.12.

a) Scrivere una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ avente due righe indipendenti, due colonne indipendenti, il cui minore M individuato da quelle due righe e colonne **non** è invertibile.

b) Dimostrare che se A è una matrice soddisfacente le condizioni in a), allora risulta (necessariamente) $\operatorname{rango} A = 3$, $\operatorname{rango} M = 1$.

Esercizio. Sia A una matrice 7×8 e sia B un minore invertibile di ordine 4. Verificare che ci sono 1380 minori di ordine maggiore o uguale a 5 (1176 di ordine 5, 196 di ordine 6, 8 di ordine 7), dei quali solamente 12 di ordine 5 contenenti B ...un bel risparmio!

§10. Sottospazi di uno spazio vettoriale.

Definizione 10.1. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Si definiscono la loro *somma* e la loro *intersezione* ponendo

$$\begin{array}{lcl} U + W & := & \{ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U, \ \vec{w} \in W \} \\ U \cap W & := & \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in U, \ \vec{v} \in W \} \end{array}$$

Proposizione 10.2. *Gli insiemi* $U+W$ *e* $U \cap W$ *sono entrambi sottospazi vettoriali di* V.

Dimostrazione. Basta verificare che soddisfano la proprietà (8.9′′). Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dati $\vec{h}, \vec{k} \in U+W$ possiamo scrivere $\vec{h} = \vec{u}_1 + \vec{w}_1$, $\vec{k} = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$. Risulta:

$$\begin{aligned} \vec{h}, \vec{k} \in U+W \implies \lambda\vec{h} + \mu\vec{k} &= \lambda(\vec{u}_1 + \vec{w}_1) + \mu(\vec{u}_2 + \vec{w}_2) \\ &= (\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2) + (\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2) \in U+W ; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\vec{x}, \vec{y} \in U \cap W \implies \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in U, \ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in W \implies \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in U \cap W . \qquad \square$$

Esercizio 10.3. Sia V uno spazio vettoriale e U, W due suoi sottospazi. Provare che $U+W = \mathrm{Span}\{U \cup W\}$, dove "$\cup$" denota l'unione di insiemi. Osservare che, in particolare, da questa proprietà ritroviamo che $U+W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Teorema 10.4 (formula di Grassmann)**.** *Sia* V *uno spazio vettoriale e siano* U, W *due suoi sottospazi. Le dimensioni di somma e intersezione di* U *e* W *sono legate dalla seguente formula*

$$\dim\big(U+W\big) \quad = \quad \dim U \ + \ \dim W \ - \ \dim\big(U \cap W\big)$$

Questa formula non va imparata a memoria, è intuitivamente ovvia: la dimensione dello spazio somma è uguale alla somma delle dimensioni meno un fattore correttivo che in un certo senso tiene conto delle "ripetizioni". Lo studente osservi l'analogia con l'ovvia formula di insiemistica $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$, dove A e B sono insiemi finiti e "#" indica il numero degli elementi di un insieme. L'analogia è ancora più evidente alla luce della seguente dimostrazione delle formula di Grassmann (che invitiamo quindi a non saltare).

Dimostrazione. Consideriamo una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\}$ di $U \cap W$ e completiamola ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_s\}$ di U nonché ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_t\}$ di W. Il teorema segue dal fatto che $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_s, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_t\}$ è una base di $U+W$: è chiaro che questi vettori generano $U+W$, d'altro canto sono anche indipendenti per l'esercizio che segue. Pertanto,

$$\dim(U+W) \ = \ r+s+t \ = \ (r+s)+(r+t)-r \ = \ \dim U + \dim W - \dim\big(U \cap W\big) . \qquad \square$$

Esercizio 10.5. Completare la dimostrazione del teorema precedente provando che non può esistere una relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_r\vec{b}_r + \alpha_{r+1}\vec{u}_1 + ... + \alpha_{r+s}\vec{u}_s + \alpha_{r+s+1}\vec{w}_1 + ... + \alpha_{r+s+t}\vec{w}_t \quad = \quad \vec{0} .$$

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ e due piani distinti U e W passanti per l'origine. Si osservi che la loro intersezione deve essere una retta, quindi ha dimensione 1, mentre il loro spazio somma, non potendo essere un piano è necessariamente tutto $\mathbb{R}^3$. Questo è in accordo con la formula di Grassmann:

$$\dim U + \dim W - \dim\big(U \cap W\big) \quad = \quad 2+2-1 \quad = \quad 3 \quad = \quad \dim\big(U+W\big) .$$

Osservazione 10.6. Per determinare un insieme di generatori dello spazio somma $U+W$ è sufficiente considerare l'unione di un insieme di generatori di U ed un insieme di generatori di W, per determinarne una base è quindi sufficiente applicare l'algoritmo dell'estrazione di una base 8.22 all'insieme considerato.

Osservazione 10.7. Per determinare l'intersezione $U \cap W$ bisogna invece risolvere un sistema di equazioni: se $U = \text{Span}\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_h\}$ e $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k\}$, l'intersezione $U \cap W$ è data dalle combinazioni lineari $\sum_{i=1}^{h} x_i\vec{u}_i$ $\big($ovvero dalle combinazioni lineari $\sum_{i=1}^{k} y_i\vec{w}_i\big)$, dove $x_1, ..., x_h, y_1, ..., y_k$ sono le soluzioni del sistema lineare di $n = \dim V$ equazioni (una per ogni coordinata) in $h+k$ incognite

$$\sum_{i=1}^{h} x_i\,\vec{u}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} y_i\,\vec{w}_i\ .$$

Esempio. Siano $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Risolvendo il sistema lineare

$$(\star) \qquad x_1\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad = \quad y_1\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4y_1 + y_2 \\ 5x_1 + x_2 = 3y_1 + 2y_2 \\ -7x_1 - x_2 = 8y_1 + y_2 \end{cases}, \qquad \text{si trova} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ y_1 = -t \\ y_2 = 3t \end{cases}$$

(dove t è un parametro libero, vedi paragrafo §3). Ne segue che

$$U \cap W \quad = \quad \left\{\vec{v} = t\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix} - 2t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} \quad = \quad \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}\right\}.$$

Si osservi che avremmo potuto anche utilizzare le espressioni a destra dell'uguaglianza $(\star)$:

$$U \cap W \quad = \quad \left\{\vec{v} = -t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix} + 3t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} \quad = \quad \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 10.8. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Determinate una base dello spazio somma $U+W$ ed una base dell'intersezione $U \cap W$ quando

$$a) \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\\3\end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix},\ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\2\end{pmatrix};$$

$$b) \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\6\\5\end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\\4\end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\\3\end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}4\\-2\\-1\\2\end{pmatrix};$$

$$c) \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, verificate che le dimensioni degli spazi trovati soddisfano la formula di Grassmann (se non la soddisfano c'è un errore in quello che avete fatto).
...attenzione all'esercizio (c)!

Esercizio 10.9. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{19}$. Determinate le possibili dimensioni della loro intersezione sapendo che $\dim U = 9$, $\dim W = 14$.

Esercizio 10.10. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^8$. Supponiamo che $\dim(U \cap W) = 3$ e che $\dim U = 6$. Provare che $3 \leq \dim W \leq 5$.

Esercizio 10.11. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

$$U_k = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 7-k \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Calcolare la dimensione dell'intersezione $U_k \cap W$ in funzione del parametro k;

b) scegliere un valore $\tilde{k}$ per il quale $U_{\tilde{k}} \cap W$ ha dimensione 1 e scrivere esplicitamente una base di $U_{\tilde{k}} \cap W$;

c) completare la base di $U_{\tilde{k}} \cap W$ trovata al punto $b)$ a una base di $U_{\tilde{k}}$.

Suggerimento: determinare la dimensione dello spazio somma $U_k + W$, quindi utilizzare la formula di Grassmann.

Esercizio 10.12. Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\vec{v}_k \in \mathbb{R}^4$ (dipendente dal parametro k) definiti come segue:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{v}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 4 \\ 3t \end{pmatrix}.$$

a) determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap V}$ dell'intersezione $U \cap V$;

b) determinare i valori del parametro t per i quali $\vec{v}_t$ appartiene allo spazio U nonché i valori per i quali $\vec{v}_t$ appartiene all'intersezione $U \cap V$;

c) completare la base di $U \cap V$ trovata al punto $a)$ a una base di $U + V$.

Il prossimo obiettivo è quello di caratterizzare la dimensione di uno spazio vettoriale (Teorema 10.13). Osserviamo che se conosciamo la dimensione di uno spazio vettoriale possiamo eseguire l'algoritmo dell'estrazione di una base 8.22 in modo più efficace: se sappiamo a priori che un certo "Span" ha dimensione k, una volta trovati k vettori indipendenti interromperemo l'esecuzione dell'algoritmo.

Consideriamo $W := \operatorname{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Possiamo disporre le coordinate dei vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$ in una matrice: definiamo una matrice in $M_{n,k}$ ponendo le coordinate del vettore $\vec{b}_i$ nella i^{-esima} colonna. La matrice appena introdotta è qualcosa del tipo

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & ... & \vec{b}_k \\ | & & | \end{pmatrix},$$

la chiameremo *matrice associata* ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$.

Teorema 10.13. *Consideriamo* $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *e la matrice* B *associata ai vettori* $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$ *. Si ha*

$$\dim W \quad = \quad \mathrm{rg} B \ .$$

Inoltre, se $i_1, ..., i_r$ *sono le colonne di* B *individuate da un minore invertibile di rango massimo* r *(vedi la definizione di rango), l'insieme* $\left\{\vec{b}_{i_1}, ..., \vec{b}_{i_r}\right\}$ *è una base di* W *.*

Dimostrazione. La dimensione di W è il numero massimo di vettori indipendenti dell'insieme $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\}$. Per il Teorema 9.6 questo numero è uguale al rango r di B. Inoltre, essendo le colonne di posto $i_1, ..., i_r$ indipendenti, i corrispondenti vettori devono costituire una base di W (si veda la parte finale della Proposizione 8.27). $\square$

Esempio. Consideriamo il sottospazio $V := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ è la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ è un minore invertibile di ordine tre ($\mathrm{rg} B = 3$), l'insieme di vettori $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4\right\}$ è una base di V.

Si osservi che lo spazio V di questo esempio è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3, quindi si ha $V = \mathbb{R}^3$. È un errore non accorgersene! ...ed una base di V tra le tante possibili è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10.14. Determinare dimensioni e basi degli spazi vettoriali degli esercizi 8.33 e 8.34 utilizzando il Teorema 10.13.

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ ed un suo sottospazio $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$. Possiamo rienunciare la definizione di "Span" dicendo che lo spazio W è l'insieme delle n^{-ple} $(x_1, ..., x_n)$ che soddisfano le equazioni

$$\text{(10.15)} \qquad \begin{cases} x_1 &=& b_{1,1} t_1 \ + \ ... \ + \ b_{1,r} t_r \\ & ... & \\ x_n &=& b_{n,1} t_1 \ + \ ... \ + \ b_{n,r} t_r \end{cases}$$

per qualche $t_1, ..., t_r \in \mathbb{R}$. Qui, come al solito, $B = (b_{i,j})$ è la matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$: per definizione, $b_{i,j}$ è la i^{-esima} coordinata di $\vec{b}_j$.

Definizione 10.16. Assumiamo che $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$ sia una base di W. Le equazioni (10.15) si chiamano *equazioni parametriche* dello spazio W e le variabili $t_1, ..., t_r$ si chiamano *parametri* o *coordinate*.

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ ed una matrice di coefficienti $\Lambda = \left(\lambda_{i,j}\right) \in M_{s,n}(\mathbb{R})$. Abbiamo visto (esempio 8.2) che l'insieme U delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\text{(10.17)} \qquad \Lambda \cdot \vec{x} \ = \ \vec{0} \ , \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \lambda_{1,1} x_1 \ + \ ... \ + \ \lambda_{1,n} x_n &=& 0 \\ ... & & \\ \lambda_{s,1} x_1 \ + \ ... \ + \ \lambda_{s,n} x_n &=& 0 \end{cases} ,$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 10.18. Le equazioni del sistema lineare omogeneo (10.17) si chiamano *equazioni cartesiane* dello spazio U.

Il passaggio da equazioni cartesiane a parametriche di un sottospazio W si effettua semplicemente risolvendo il sistema lineare. È sempre possibile anche effettuare il passaggio inverso, ovvero quello da equazioni parametriche a cartesiane. Questo significa che ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile in forma cartesiana. Il passaggio da equazioni parametriche a cartesiane si effettua "eliminando i parametri". Nei due esempi che seguono vediamo come si passa da equazioni cartesiane a parametriche e come si effettua il passaggio inverso.

Esempio. Per determinare delle equazioni parametriche del sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases},$$

si risolve il sistema lineare, quindi si scrivono le soluzioni nella forma (2.13′):

$$\left\{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x_1 & = & -3t_1 - 3t_2 \\ x_2 & = & 6t_1 \\ x_3 & = & -14t_2 \\ x_4 & = & -30t_2 \\ x_5 & = & 6t_2 \end{array} \right\}.$$

Le equazioni appena trovate sono equazioni parametriche dello spazio U.

Esempio 10.19. Per determinare delle equazioni cartesiane del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W \quad := \quad \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}, \qquad \text{dove} \quad \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

dopo aver verificato che $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ è una base di W, si scrive il sistema di equazioni

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_1 = 8t_1 + 3t_2 \\ x_2 = 6t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 9t_1 + 11t_2 \\ x_4 = 4t_1 + 5t_2 \end{cases},$$

quindi dalle ultime due equazioni si determina $t_1 = 5x_3 - 11x_4$, $t_2 = -4x_3 + 9x_4$. Sostituendo infine le espressioni trovate nelle prime due equazioni del sistema $(\star)$, si trovano le equazioni cartesiane di W:

$$\begin{cases} x_1 = 8(5x_3 - 11x_4) + 3(-4x_3 + 9x_4) \\ x_2 = 6(5x_3 - 11x_4) + 2(-4x_3 + 9x_4) \end{cases},$$

ovvero le equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 28x_3 + 61x_4 = 0 \\ x_2 - 22x_3 + 48x_4 = 0 \end{cases}.$$

La correttezza del procedimento visto si spiega facilmente: lo spazio W è lo spazio di quei vettori di $\mathbb{R}^4$ di coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 che soddisfano le relazioni $(\star)$, essendo t_1

e t_2 parametri liberi. Il sistema di equazioni $(\star)$ è equivalente al sistema costituito dalle 4 equazioni

$$(\star')\qquad \begin{cases} x_1 \ - \ 28x_3 \ + \ 61x_4 \ = \ 0 \\ x_2 \ - \ 22x_3 \ + \ 48x_4 \ = \ 0 \\ \qquad\quad 5x_3 - 11x_4 \ = \ t_1 \\ \qquad\ -4x_3 + 9x_4 \ = \ t_2 \end{cases} .$$

Questo significa che W è lo spazio di quei vettori di $\mathbb{R}^4$ di coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 che soddisfano le equazioni $(\star')$, essendo t_1 e t_2 parametri liberi. Ma a questo punto è chiaro che le equazioni $5x_3 - 11x_4 = t_1$ e $-4x_3 + 9x_4 = t_2$ le possiamo semplicemente cassare perché non aggiungono nulla: ci stanno dicendo che le espressioni $5x_3 - 11x_4$ e $-4x_3 + 9x_4$ possono assumere qualsiasi valore (chiaramente è fondamentale il fatto che t_1 e t_2 non compaiano in nessuna altra equazione).

Nell'esempio precedente abbiamo illustrato un procedimento che ci permette di passare da equazioni parametriche a equazioni cartesiane. A condizione di giustificare il fatto che è sempre possibile isolare i parametri, il caso generale è assolutamente identico.

Esercizio 10.20. Dimostrare che nel sistema di equazioni (10.15) è sempre possibile isolare i parametri.

Suggerimento: alla luce della Definizione 10.16, qual è il rango della matrice incompleta associata al sistema lineare (10.15), inteso come sistema lineare nelle incognite $t_1, ..., t_r$? ...quindi dedurre che è possibile trovare r equazioni indipendenti. Infine provare che da queste è sicuramente possibile isolare $t_1, ..., t_r$.

Osservazione. Sistemi diversi possono rappresentare lo stesso spazio, ad esempio il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases}$ ed il sistema $\begin{cases} 9x - 6y + z = 0 \\ -x + 9y + z = 0 \end{cases}$ definiscono la stessa retta dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10.21. Provare che i due sistemi dell'osservazione precedente sono equivalenti, quindi dedurre che definiscono la stessa retta. Risolvere i due sistemi, quindi trovare delle equazioni parametriche della retta che definiscono.

Esercizio 10.22. Determinare equazioni parametriche per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

$$U = \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}; \qquad V = \left\{ x_1 - 2x_3 = 0 \right.;$$

$$W = \left\{ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right.; \qquad H = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 10.23. Determinare equazioni parametriche per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

$$U = \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}; \qquad V = \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

$$W = \begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}; \qquad H = \left\{ x_1 - 2x_3 = 0 \right. .$$

Esercizio 10.24. Determinare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$W \;=\; \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad H \;=\; \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$K \;=\; \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Abbiamo visto che la dimensione dello spazio $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$ è uguale al rango della matrice B associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$ (Teorema 10.13). Anche quando uno spazio è definito da equazioni cartesiane sappiamo calcolarne la dimensione. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito da s equazioni cartesiane, ci si aspetta che la sua dimensione sia $\dim U = n - s$; questo perché ogni equazione "dovrebbe far scendere di uno la sua dimensione". Poiché potremmo avere delle equazioni ripetute più volte o che comunque non aggiungono nulla al sistema perché possono essere dedotte dalle altre, a priori possiamo solamente affermare che risulta $\dim U \geq n - s$. Vale il teorema che segue.

Teorema 10.25. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale definito dalle equazioni cartesiane*

$$\Lambda \cdot \vec{x} \;=\; \vec{0}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \lambda_{1,1} x_1 \;+\; ... \;+\; \lambda_{1,n} x_n \;=\; 0 \\ ... \\ \lambda_{s,1} x_1 \;+\; ... \;+\; \lambda_{s,n} x_n \;=\; 0 \end{cases}$$

Si ha

$$(10.25') \qquad \dim U \;=\; n \;-\; \mathrm{rg}\,\Lambda\,,$$

dove $\Lambda = \left(\lambda_{i,j}\right) \in M_{s,n}(\mathbb{R})$ è la matrice associata al sistema di equazioni.

Dimostrazione. Assodato che la dimensione di U è uguale al numero dei parametri liberi che compaiono in una risoluzione del sistema, il teorema segue da quello che sappiamo sui sistemi lineari e dal fatto che il rango di Λ è uguale al numero massimo di equazioni indipendenti (Teorema 9.6). □

Osservazione 10.26. Il prodotto $\Lambda \cdot \vec{x}$ è la combinazione lineare di coefficienti $x_1, ..., x_n$ delle colonne della matrice Λ. Ne segue che le soluzioni del sistema lineare $\Lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ sono[5] esattamente le relazioni tra le colonne di Λ. La (10.25′) ci dice che dati n vettori (le colonne di una matrice), la dimensione del loro span sommato alla dimensione dello spazio delle relazioni dà n. Sottolineiamo che poiché la riduzione a scala non muta la classe di equivalenza di un sistema lineare, le relazioni tra le colonne di una matrice coincidono con le relazioni tra le colonne di una sua riduzione a scala.

Esercizio. Verificare che le dimensioni degli spazi degli esercizi 10.22, 10.23 e 10.24 sono quelle previste dal Teorema 10.25.

Esercizio 10.27. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{19}$. Supponiamo che U sia definito da 4 equazioni cartesiane e che $\dim W = 10$. Provare le disuguaglianze che seguono:

$$6 \leq \dim(U \cap W) \leq 10\,, \qquad 15 \leq \dim(U + W) \leq 19\,.$$

Esercizio 10.28. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{15}$. Supponiamo che U sia definito da k equazioni cartesiane indipendenti, che $\dim(U \cap W) = 6$ e $\dim(U + W) = 11$. Determinare i possibili valori di k e le possibili dimensioni di W in funzione di k.

[5] Nel senso che, ad esempio, se 2, 3, 5 è una soluzione del sistema lineare in questione allora il doppia della prima colonna più tre volte la seconda più cinque volte la terza dà il vettore nullo.

§11. Sottospazi Affini di $\mathbb{R}^n$.

Abbiamo visto che i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono le soluzioni dei sistemi lineari omogenei. Ci domandiamo, cosa accade se consideriamo sistemi lineari non omogenei? Qual è la "struttura" dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare arbitrario? Una risposta alla prima domanda l'abbiamo data nel paragrafo § 2 studiando i sistemi lineari: l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare (arbitrario) è un insieme del tipo

$$\mathcal{S} \quad = \quad \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \vec{x} = t_1\vec{v}_1 + ... + t_k\vec{v}_k + \vec{c} \right\} \tag{11.1}$$

dove $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ (si veda l'inciso 2.10).

Definizione 11.2. Un insieme come quello descritto dalla (11.1) si chiama *sottospazio affine* di $\mathbb{R}^n$ e le equazioni ivi indicate (se i parametri non sono sovrabbondanti, ovvero se i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ sono indipendenti) si chiamano *equazioni parametriche*.

Come si può intuire dalla terminologia usata esistono degli oggetti matematici che si chiamano spazi affini, oggetti che volendo mantenere la trattazione a un livello elementare non tratteremo (non abbiamo una reale necessità di introdurli, li introduciamo solo alla fine paragrafo §16, approfondimenti, e solo per ragioni di completezza). Naturalmente,
i) i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ appena introdotti risultano essere spazi affini;
ii) ai fini dello studio dei sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ è sufficiente conoscere la Definizione 11.2.
Dunque, torniamo a quello che stavamo facendo.

Osservazione 11.3. I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono, in particolare, sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 11.4. Usando esclusivamente la (11.1), provare che un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se contiene l'origine.

Notazione 11.5. Dati un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$ e un vettore $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$V + \vec{c} \quad := \quad \left\{ \vec{v} + \vec{c} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{v} \in V \right\}$$

cioè $V + \vec{c}$ è l'insieme di tutti gli elementi in $\mathbb{R}^n$ che sono somma di $\vec{c}$ e un vettore in V.

Avvertenza 11.6. L'oggetto $V + \vec{c}$ è un insieme, quel "+" che vi compare non è una normale somma tra due elementi bensì parte integrante di una notazione:

$V + \vec{c}$ **è** l'insieme $\{\vec{v} + \vec{c} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{v} \in V\}$ e va trattato esattamente come tale.

Giusto per ribadire il concetto, ad esempio, sarebbe folle scrivere "$V + \vec{c} = V + \vec{c}\,'$ implica $\vec{c} = \vec{c}\,'$" (semplificando V!). Tuttavia, quanto segue ha senso (ed è corretto):

$$V + \vec{c} \;=\; V + \vec{c}\,' \qquad \Longleftrightarrow \qquad V \;=\; V + \vec{c}\,' - \vec{c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{c}\,' - \vec{c} \;\in\; V$$

Infatti, applicando la definizione (Notazione 11.4), stiamo dicendo quanto segue

$$\left\{ \vec{v} + \vec{c} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{v} \in V \right\} \;=\; \left\{ \vec{v} + \vec{c}\,' \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{v} \in V \right\}$$

$$\underset{(\spadesuit)}{\Longleftrightarrow} \qquad V \;=\; \left\{ \vec{v} + \vec{c}\,' - \vec{c} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{v} \in V \right\} \qquad \underset{(\clubsuit)}{\Longleftrightarrow} \qquad \vec{c}\,' - \vec{c} \;\in\; V$$

Analizziamo nel dettaglio ($\spadesuit$) e ($\clubsuit$). Nella prima riga abbiamo due insiemi, agendo su di essi con la stessa operazione, l'operazione di sommare $-\vec{c}$ ad ogni elemento, otteniamo i due insiemi a sinistra nella seconda riga, grazie all'invertibilità dell'operazione in questione otteniamo ($\spadesuit$). L'equivalenza ($\clubsuit$) segue dal fatto che V è uno spazio vettoriale, infatti, se vale l'uguaglianza a sinistra, scrivendo $\vec{v} + \vec{c}\,' - \vec{c} \in V$ per $\vec{v} = \vec{0}$ si ottiene $\vec{c}\,' - \vec{c} \in V$; viceversa se $\vec{c}\,' - \vec{c} \in V$ l'uguaglianza al centro è immediata).

Gli oggetti introdotti con la Notazione 11.5 sono i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Infatti, tornando alla (11.1) ed indicando con V l'insieme dei vettori del tipo $t_1\vec{v}_1+...+t_k\vec{v}_k$ (insieme che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, come sappiamo è lo spazio generato dai vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$), la (11.1) può essere riscritta nella forma

$$\mathcal{S} \quad = \quad V + \vec{c} \tag{11.7}$$

e può essere letta dicendo che $\mathcal{S}$ (sottospazio affine), si ottiene *traslando* V (sottospazio vettoriale), dove "traslando" significa proprio "ad ogni vettore di V sommo $\vec{c}$".

Abbiamo definito i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ come gli insiemi del tipo (11.1). Esattamente come già visto nel § 10, dato un insieme di tale tipo è possibile eliminare i parametri e scriverlo come spazio delle soluzioni di un sistema lineare. Questo significa che abbiamo la seguente caratterizzazione dei sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ (ovvero un secondo modo per introdurli):

Caratterizzazione 11.8. Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ se e solo se è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

La (11.7) non è altro che la formula già vista col Teorema di Struttura 3.11. Infatti, dato $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ (con V sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$), denotando con

$$A \cdot \vec{x} \ = \ \vec{b} \tag{$\star$}$$

un sistema lineare del quale $\mathcal{S}$ ne è l'insieme delle soluzioni, otteniamo che

i) $\vec{c}$ è una soluzione del sistema ($\star$);

ii) V è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema ($\star$);

iii) se $\vec{c}\,'$ è un'altra soluzione del sistema ($\star$), allora risulta anche $\mathcal{S} = V + \vec{c}\,'$.

Dimostrazione. La *i)* è una tautologia: dire che $\vec{c}$ soddisfa ($\star$) è come dire che $\vec{c} \in \mathcal{S}$, d'altro canto $\vec{c} = \vec{0} + \vec{c} \in V + \vec{c} = \mathcal{S}$. Gli elementi in V si ottengono sottraendo $\vec{c}$ a quelli di $\mathcal{S}$, pertanto la *ii)* segue dal fatto che la differenza di due soluzioni del sistema ($\star$) è una soluzione del sistema omogeneo associato (Inciso 3.10). Quanto alla *iii)* è sufficiente osservare che risulta $\mathcal{S} = V + \vec{c} = V + \vec{c}\,'$ (essendo $\vec{c}\,' - \vec{c} \in \mathcal{S} - \vec{c} = V$). □

In effetti non c'è nulla di veramente nuovo, il risultato enunciato non è altro che una rivisitazione del Teorema di Struttura 3.11.

Abbiamo visto che un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare e che lo spazio V introdotto con la (11.7) è il sottospazio (vettoriale) di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Questo ci dice che V dipende esclusivamente da $\mathcal{S}$. Naturalmente non era necessario scomodare i sistemi lineari, che V dipendesse esclusivamente da $\mathcal{S}$ lo potevamo dedurre direttamente dall'implicazione che segue:

$$V + \vec{c} \quad = \quad V' + \vec{c}\,' \qquad \Longrightarrow \qquad V \ = \ V' \tag{11.9}$$

(dove a sinistra dell'uguaglianza abbiamo due scritture di $\mathcal{S}$ nella forma (11.7), in particolare V e V' sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$).

Esercizio 11.10. Scrivere una dimostrazione diretta (che eviti i sistemi lineari) della (11.9).

Definizione 11.11. Sia $\mathcal{S}$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Le equazioni di un sistema lineare di cui $\mathcal{S}$ ne è l'insieme delle soluzioni si chiamano *equazioni cartesiane* di $\mathcal{S}$.

Esercizio 11.12. Scrivere equazioni cartesiane per i sottospazi affini r e π di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazioni parametriche

$$r \ : \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right. , \qquad \pi \ : \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right. .$$

Tornando alla (11.9), quanto osservato sopra, e cioè che lo spazio vettoriale V definito dalla (11.7) sia univocamente individuato da $\mathcal{S}$ (e che per questa ragione chiameremo spazio associato ad $\mathcal{S}$), suggerisce la definizione che segue:

Definizione 11.13. Sia $\mathcal{S}$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. La *dimensione* di $\mathcal{S}$ è la dimensione dello spazio vettoriale V ad esso associato:

$$\dim \mathcal{S} \quad := \quad \dim V$$

($\dim \mathcal{S} = k =$ "numero dei parametri delle sue equazioni parametriche", cfr. 11.1 e 11.2).

Sia $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Mentre, come già osservato, V è univocamente individuato da $\mathcal{S}$, l'elemento $\vec{c}$ non lo è, anzi, può essere sostituito con qualsiasi elemento in $\mathcal{S}$, in formule:

$$\mathcal{S} \quad = \quad V + \vec{s}\,, \qquad \forall\, s \in \mathcal{S}\,. \tag{11.14}$$

Infatti, la catena di equivalenze nell'avvertenza 11.6 può essere prolungata come segue:

$$V + \vec{c} = V + \vec{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{s} - \vec{c} \in V \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{s} \in V + \vec{c}\,.$$

Riepilogando gli ultimi risultati provati sopra, abbiamo la proposizione che segue.

Proposizione 11.15. *Sia* $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ *un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^n$*. Allora*

i) *lo spazio vettoriale* V *è univocamente determinato da* $\mathcal{S}$;

ii) *risulta* $V = \left\{ \vec{s} - \vec{s}\,' \;\middle|\; \vec{s},\, \vec{s}\,' \in \mathcal{S} \right\}$

iii) $\mathcal{S} \quad = \quad V + \vec{s}\,, \qquad \forall\, s \in \mathcal{S}\,.$

Dimostrazione. La *i*) e la *iii*) sono la (11.9) e la (11.14) provate sopra. Anche la *ii*) di fatto l'abbiamo già provata: per $\vec{s}\,'$ arbitrariamente fissato sappiamo che $V = \mathcal{S} - \vec{s}\,'$. □

Sottolineiamo che la *ii*) ci dice che gli elementi di V si ottengono come differenze di elementi di $\mathcal{S}$ (questa osservazione è alla base della definizione astratta di spazio affine che daremo nel paragrafo degli approfondimenti, cfr. Definizione 16.22).

Corollario 11.16. *Se due sottospazi affini di* $\mathbb{R}^n$ *hanno la stessa dimensione ed uno dei due è contenuto nell'altro, allora coincidono. In formule,*

$$\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}'\,, \quad \dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}' \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}'$$

($\mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S}'$ *denotano i due sottospazi*).

Dimostrazione. Siano $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ e $\mathcal{S}' = V' + \vec{c}\,'$. Poiché $\vec{c}\,' \in \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, per la Proposizione 11.15, proprietà *iii*), possiamo scrivere $\mathcal{S} = V + \vec{c}\,'$. D'altro canto abbiamo che $V + \vec{c}\,' \supseteq V' + \vec{c}\,' \Longrightarrow V \supseteq V'$. Infine, sappiamo che due spazi vettoriali della stessa dimensione, uno contenuto nell'altro, devono coincidere. Nel nostro caso ciò ci dice che si deve avere $V = V'$. In definitiva si ha $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. □

Definizione 11.17. I sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ vengono chiamati:

punti, se hanno dimensione 0;

rette, se hanno dimensione 1;

piani, se hanno dimensione 2.

Esempio. Nella terminologia appena introdotta, i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono i seguenti:

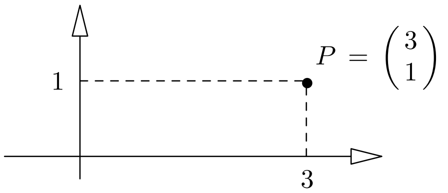
i) i punti (dimensione 0);

ii) le rette (dimensione 1);

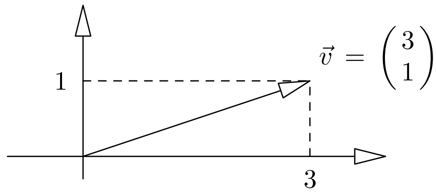
iii) i piani (dimensione 2);

iv) tutto $\mathbb{R}^3$ (dimensione 3).

Inciso 11.18. Sottolineiamo un piccolo cambiamento di linguaggio: non parliamo più di vettori, gli elementi di uno spazio affine li chiamiamo *punti* (sebbene si tratti sempre di elementi di $\mathbb{R}^n$). Questo cambio di linguaggio è la conseguenza naturale del vedere $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ come modelli naturali di retta, piano e spazio “fisico”. Questo punto di vista lo prenderemo nel capito II, quando, seguendo un approccio molto classico e vicino a quello adottato nei corsi di fisica, introduciamo gli spazi Euclidei in dimensione minore o uguale a 3, che sono spazi affini con della struttura in più che consente di misurare angoli e distanze. Lo stesso oggetto, ad esempio il piano $\mathbb{R}^2$ visto come piano affine bidimensionale ed $\mathbb{R}^2$ visto come spazio vettoriale di dimensione 2, assume due significati diversi. L’immagine mentale più consona a questi due oggetti viene rappresentata nella figura qui sotto.



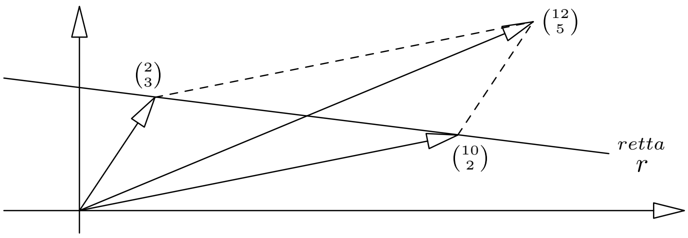
piano affine



piano vettoriale

Genericamente, in un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ la somma di due punti non è definita (nonostante lo spazio ambiente $\mathbb{R}^n$ sia anche uno spazio vettoriale). A riguardo notiamo che, ad esempio, i punti $\binom{2}{3}$ e $\binom{10}{2}$ appartengono alla retta (affine) r di equazione $x+8y-26 = 0$. Ma la loro “somma”, le cui coordinate “sarebbero” $\binom{12}{5}$, non vi appartiene (vedi figura).

(fig. 11.18′)



D’altro canto, sappiamo che gli elementi dello spazio vettoriale V si ottengono come differenza di elementi di $\mathcal{S}$, cfr. Proposizione 11.15, *ii*). Questo suggerisce l’idea che la differenza di due punti è comunque un vettore. In effetti esiste una costruzione astratta, che vedremo nel capitolo II, secondo la quale i vettori appaiono come oggetti rappresentati da segmenti orientati, ovvero “differenze di punti”. Ma a riguardo per ora non diciamo nulla. Comunque, per quel che riguarda quello che stiamo facendo ora, ricordiamoci che lavoriamo con $\mathbb{R}^n$, dove somme e differenze hanno sempre senso.

Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{R}^n$. Abbiamo quanto segue:

- *per due punti distinti passa una (ed una sola) retta*;
- *per tre punti non allineati passa un unico piano*;
- *per quattro punti non contenuti in un piano passa un unico spazio affine di dimensione 3.*

Queste “affermazioni famose”, per quanto intuitivamente ovvie, nel contesto della nostra trattazione[6] seguono dalla prossima Proposizione 11.17 e dall’osservazione 11.18 che la segue. Precisamente, la Proposizione 11.19 ci dà una descrizione della retta per due punti (caso $k = 2$), ovvero del piano per tre punti non allineati (caso $k = 3$) eccetera (in particolare garantendo “l’esistenza” di questi oggetti), l’osservazione 11.20 ci assicura l’unicità di questi oggetti.

[6] Dove, lo ribadiamo, punti, rette, piani eccetera sono quanto introdotto con le Definizioni 11.2, 11.13 e 11.17.

Proposizione 11.19. *Siano* $p_0, ..., p_k \in \mathbb{R}^n$ *dei punti. Lo spazio affine*

$$\mathcal{S} \quad = \quad V + p_0 \ , \qquad \textit{essendo } V \ := \ \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}\,, \ \ \vec{v}_i \ := \ p_i - p_0\,,$$

è il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ *contenente i* p_i *(cioè è contenuto in ogni altro sottospazio affine contenente tutti i* p_i*). Risulta*

$$\dim \mathcal{S} \quad \leq \quad k$$

($\dim\mathcal{S} = k$ *se i punti non sono contenuti in alcun sottospazio affine di dimensione* $k-1$*).*

Osservazione 11.20. La minimalità di $\mathcal{S}$ asserita nella Proposizione 11.19, cioè il fatto che $\mathcal{S}$ è contenuto in ogni altro sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ contenente i nostri punti, alla luce del Corollario 11.16 ci dice che se $\mathcal{S}'$ è un altro sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ contenente i nostri punti e $\dim\mathcal{S}' = \dim\mathcal{S}$, allora

$$\mathcal{S}' \quad = \quad \mathcal{S}\ .$$

Il ragionamento appena fatto lo possiamo sintetizzare come segue:

$$\mathcal{S}' \ni p_0, ..., p_k \quad \underset{(\text{minimalità di } \mathcal{S})}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S} \quad \underset{(\text{corollario } 11.16\ )}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{S}' \ = \ \mathcal{S}$$

(le ipotesi sono che $\mathcal{S}'$ è un sottospazio affine della stessa dimensione di quella di $\mathcal{S}$).

Dimostrazione (della Proposizione 11.19). Lo spazio affine $V + \vec{p}_0$ contiene p_0 e tutti i p_i (si ottengono ri-sommando p_0 ai $\vec{v}_i$). D'altro canto, se uno spazio affine $V' + \vec{c}$ contiene tutti i p_i, allora V' deve contenere tutti i $\vec{v}_i$ e pertanto risulta

$$V' + \vec{c} \quad = \quad V' + p_0 \quad \supseteq \quad V + p_0$$

dove l'uguaglianza segue dalla (11.14) e l'inclusione segue dal fatto che V' contiene dei generatori di V. Ciò prova la prima parte della proposizione.
Secondo la Definizione 11.13 risulta $\dim\mathcal{S} = \dim V$. Essendo V generato da k vettori, si ha $\dim V \leq k$. Quindi $\dim\mathcal{S} \leq k$. Infine, l'affermazione tra parentesi segue dal fatto che escludendo per iptesi che i punti non siano contenuti in un sottospazio di dimensione strettamente minore di k ed essendo $\mathcal{S}$ un sottospazio, non si può avere $\dim\mathcal{S} < k$. □

Esercizio 11.21. Scrivere equazioni parametriche per i sottospazi affini indicati

- $r \subseteq \mathbb{R}^2$ passante per i punti $p_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ passante per i punti $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Definizione 11.22. Due sottospazi affini $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ di $\mathbb{R}^n$ si dicono *paralleli*, ed in questo caso scriviamo $\mathcal{S} \,/\!/\, \mathcal{T}$, se uno dei due spazi vettoriali associati è contenuto nell'altro:

$$\mathcal{S} \,/\!/\, \mathcal{T} \qquad \Longleftrightarrow \qquad V \ \subseteq \ W \quad \text{oppure} \quad W \ \subseteq \ V\ ,$$

dove $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ e $\mathcal{T} = W + \vec{d}$.

Proposizione 11.23. *Siano* $\mathcal{S}$ *e* $\mathcal{T}$ *sottospazi affini di* $\mathbb{R}^n$*. Se sono paralleli, la loro intersezione insiemistica è l'insieme vuoto oppure uno dei due è contenuto nell'altro.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ è l'insieme vuoto non cè nulla da dimostrare. Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ contengono entrambi un elemento $\vec{e}$, per la (11.14) possiamo scrivere $\mathcal{S} = V + \vec{e}$ e $\mathcal{T} = W + \vec{e}$. Ma a questo punto è evidente che l'inclusione $V \subseteq W$ implica l'inclusione $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ (lo stesso vale per l'inclusione opposta). □

Attenzione! La nozione introdotta consente di parlare di parallelismo anche tra spazi affini di dimensione diversa (naturalmente, contenuti nello stesso ambiente $\mathbb{R}^n$): ha senso domandarsi se una retta e un piano sono paralleli. Tuttavia, la nozione di parallelismo è transitiva solo a condizione di restringersi al caso di spazi affini della stessa dimensione. A riguardo, i due esempi che seguono dimostrano la non transitività (il secondo non coinvolge spazi di dimensione zero, cioè punti):

i) due spazi affini (anche) non paralleli, sono entrambi paralleli a ogni punto!

ii) in $\mathbb{R}^3$, il piano di equazione cartesiana $x = 0$ non è parallelo al piano di equazione cartesiana $y = 0$, eppure sono entrambi paralleli all'asse z (:= retta di equazioni parametriche $x = 0,\ y = 0,\ z = t$).

Esercizio 11.24. Siano $\mathcal{S} = V + \vec{c}$ e $\mathcal{T} = W + \vec{d}$ due spazi affini. Provare che sono entrambi paralleli allo spazio affine $V \cap W$ (sottolineiamo che $V \cap W$, come ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, è anche uno spazio affine, ed è non vuoto).

Esercizio 11.25. Provare che se ci si restringe a spazi della stessa dimensione, la nozione di parallelismo è transitiva. Cioè che se $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{S}''$ sono spazi affini della stessa dimensione e se $\mathcal{S} // \mathcal{S}'$ nonché $\mathcal{S}' // \mathcal{S}''$, allora $\mathcal{S} // \mathcal{S}''$.

Esercizio 11.26. Si considerino lo spazio affine $\mathbb{R}^3$, la retta r dell'esercizio (11.12) ed il piano τ, dipendente dal parametro k, di equazione cartesiana $x + y + kz = 1$. Determinare i valori del parametro k per i quali risulta $r // \tau$.

Esercizio 11.27. Scrivere l'equazione del piano affine in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto di coordinate $2, -1, 5$ e parallelo al piano di equazione $x + y + z = 1$.

Lo studio dell'algebra lineare, l'approccio algebrico alla geometria, l'approccio centrato su $\mathbb{R}^n$, ovvero sulle coordinate, la volontà di mantenere basso il livello di astrazione, ha il vantaggio, come dire, della concretezza (sicuramente utile in un corso di geometria elementare). D'altro canto tutto questo ci ha portato a introdurre solo una classe di esempi di spazi affini (i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ appunto) e a non dare una definizione astratta di spazio affine, con tutte le limitazioni che ciò comporta. Cerchiamo di rimediare un po' a questa carenza negli approfondimenti (cfr. §16, sezione "spazi affini"). Per il momento ci limitiamo a dire che un piano affine[7] si identifica con $\mathbb{R}^2$ mediante la scelta di un sistema di riferimento, in questo senso la geometria del piano affine è lo studio di quelle proprietà di $\mathbb{R}^2$ che sono invarianti per i cosiddetti *cambiamenti di riferimento affine*, cioè le funzioni

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice invertibile. Poiché $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, cioè F non conserva le coordinate dell'origine, il piano affine di fatto non ha un'origine, così come non ce l'ha la retta r della figura (11.18$'$) o, ad esempio, non ce l'ha il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x + y - 2z + 7 = 0$. Non avere un'origine di fatto è la ragione per la quale non possiamo sommare i punti e, sostanzialmente, ciò che rende gli spazi affini differenti dagli spazi vettoriali.

[7] Ci concentriamo sul piano solo per fissare le idee, in realtà quello che stiamo dicendo vale in dimensione arbitraria.

§12. Applicazioni lineari.

Una funzione definita su un insieme A, che assume valori in un insieme B, è una legge f che ad ogni elemento di A associa un elemento di B (nel cap. 0, §2 vengono richiamati i concetti di dominio, codominio, grafico, fibra, funzione iniettiva, suriettiva, biunivoca). Le applicazioni lineari sono funzioni dove dominio e codominio sono spazi vettoriali, che soddisfano la proprietà di essere *lineari*:

Definizione 12.1. Siano V e W due spazi vettoriali. Una *applicazione lineare*

$$\begin{aligned} L\ :\quad V &\longrightarrow W \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{w} \end{aligned}$$

è una funzione, che soddisfa le due proprietà:

$$(12.1')\qquad \begin{aligned} L(\vec{v}+\vec{u}) &= L(\vec{v})+L(\vec{u})\,, \qquad \forall\ \vec{v},\,\vec{u}\in V\,; \\ L(\lambda\cdot\vec{v}) &= \lambda\cdot L(\vec{v})\,, \qquad \forall\ \vec{v}\in V\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Vedremo che le funzioni che soddisfano la (12.1′), in termini di sistemi di coordinate su V e W, sono descritte da polinomi omogenei di primo grado. In termini geometrici, il loro grafico è una retta se V ha dimensione 1, un piano se V ha dimensione 2, eccetera (riguardo questo punto mi limiterò a dire qualcosa negli approfondimenti, § 16). Questo è il motivo per il quale le funzioni che soddisfano la (12.1′) si chiamano "lineari". Osserviamo che la (12.1′) può essere scritta in un'unica relazione:

$$(12.2)\qquad L(\alpha\vec{v}+\beta\vec{u}) = \alpha L(\vec{v})+\beta L(\vec{u})\,, \qquad \forall\ \vec{v},\,\vec{u}\in V\,,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Esercizio 12.3. Dimostrare che la (12.1′) e la (12.2) sono equivalenti.

Torniamo alla definizione. Questa ci dice che una applicazione lineare è una funzione che "rispetta" le operazioni su V e W : dati due vettori in V, l'immagine della loro somma (operazione in V) è uguale alla somma (operazione in W) delle loro immagini, l'immagine di un multiplo di un vettore è quel multiplo dell'immagine del vettore.

Ora, diamo brutalmente un'altra definizione generale, subito dopo studiamo l'esempio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Definizione 12.4. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare. Si definiscono *nucleo* e *immagine* di L, che si indicano rispettivamente scrivendo $\ker L$ (dall'inglese "kernel" = "nucleo") ed $\mathrm{Im}\,L$ (dall'inglese "image" = "immagine"), ponendo

$$\begin{aligned} \ker L &:= \big\{\vec{v}\in V \,\big|\, L(\vec{v})=\vec{0}\big\}\,; \\ \mathrm{Im}\,L &:= \big\{\vec{w}\in W \,\big|\, \vec{w}=L(\vec{v}) \ \text{ per qualche } \ \vec{v}\in V\big\}\,. \end{aligned}$$

Sottolineiamo che i vettori del nucleo di L sono quei vettori in V che vengono mandati nel vettore nullo, quindi $\ker L = L^{-1}(\vec{0})$ è la fibra del vettore nullo di W. I vettori nell'immagine di L, come la parola stessa suggerisce (e coerentemente con la definizione data nei richiami, cfr. cap. 0), sono quei vettori $\vec{w}\in W$ che soddisfano la condizione che segue: esiste almeno un vettore $\vec{v}\in V$ al quale L associa $\vec{w}$.

Definizione 12.5. Consideriamo gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$. Si definisce l'applicazione L_A associata ad una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\begin{aligned} L_A\ :\qquad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove, come sempre, "·" denota il prodotto righe per colonne tra matrici.

Proposizione 12.6. *La funzione* L_A *appena introdotta è lineare.*

Dimostrazione. Infatti, per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne,

$$\begin{array}{rcccccccl} L_A(\vec{v} + \vec{w}) & = & A \cdot (\vec{v} + \vec{w}) & = & A \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{w} & = & L_A(\vec{v}) + L_A(\vec{w}) \ , \\ L_A(\lambda \vec{v}) & = & A \cdot (\lambda \vec{v}) & = & \lambda \big(A \cdot \vec{v} \big) & = & \lambda L_A(\vec{v}) \ . \end{array}$$

per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Esempio. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccl} L_A \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Osserviamo che svolgendo il prodotto righe per colonne si ottiene

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{nonché} \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

ovvero nelle colonne della matrice A ci sono scritte le coordinate delle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio. Sia L_A l'applicazione lineare dell'esempio. Calcolare $L_A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Esempio. Determiniamo ora nucleo e immagine dell'applicazione lineare L_A dell'esempio precedente. Per definizione,

$$\ker L_A \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ L_A(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 5\alpha + \beta = 0 \end{cases}$, troviamo $\alpha = \beta = 0$, quindi il nucleo di L_A è costituito esclusivamente dal vettore nullo: $\ker L_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I vettori dell'immagine di L_A sono tutti i vettori in $\mathbb{R}^3$ del tipo $\begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix}$, dove α e β sono "parametri liberi"; pertanto, ricordando la definizione di "Span", si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L_A \quad &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} \ \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \quad \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad = \quad \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} . \end{aligned}$$

I risultati trovati nell'esempio si generalizzano. Innanzi tutto, vista la Definizione 12.5 è del tutto evidente che vale l'osservazione che segue.

Osservazione 12.7. Si consideri $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Le coordinate dell'immagine dello $i^{\text{-esimo}}$ vettore $\vec{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono scritte nella $i^{\text{-esima}}$ colonna di A.

Osservazione 12.8. Anche i conti visti nell'esempio precedente si generalizzano: data $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} L_A \;&=\; \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{m,j} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \right\} \\
&=\; \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \;...\; + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \right\} \\
&=\; \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \;...,\; \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Questo prova che l'immagine di L_A è lo "Span delle colonne della matrice A". In particolare, per il Teorema 10.13 si ha

$$\dim \operatorname{Im} L_A \;=\; \operatorname{rg} A \tag{12.9}$$

Per quel che riguarda l'iniettività e la suriettività di L_A vale la proposizione che segue.

Proposizione 12.10. *Si consideri* $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. *Si ha che*

i) L_A *è iniettiva se e solo se* $\ker L_A = \{\vec{0}\}$ *;*

ii) L_A *è suriettiva se e solo se* $\operatorname{rg} A = m$ (*che è la massima possibile*).

Dimostrazione. Poiché $L_A(\vec{0}) = \vec{0}$, l'iniettività di L_A implica $\ker L_A = \{\vec{0}\}$.
Viceversa, se ci sono due vettori distinti $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ che hanno la stessa immagine $\vec{w}$, si ha $L_A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = L_A(\vec{v}_1) - L_A(\vec{v}_2) = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}$, ovvero $\ker L_A \neq \{\vec{0}\}$.
Ora proviamo l'affermazione *ii*). Per l'osservazione precedente, l'immagine di L_A è lo "Span" dei vettori costituiti dalle colonne di A e la dimensione di tale "Span" uguaglia il rango di A per la formula (12.9). Infine, $\operatorname{Im} L_A = \mathbb{R}^m$ se e solo se $\dim \operatorname{Im} L_A = m$. □

Abbiamo visto che $\operatorname{Im} L_A$ è uno "Span", in particolare è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Questo risultato si generalizza all'affermazione che l'immagine di una applicazione lineare tra spazi vettoriali (qualsiasi) è un sottospazio vettoriale del codominio. L'affermazione analoga vale anche per il nucleo di una applicazione lineare. In definitiva, vale la proposizione che segue.

Proposizione 12.11. *Sia* $L : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare. Si ha che*

i) $\ker L$ *è un sottospazio di* V ;

ii) $\operatorname{Im} L$ *è un sottospazio di* W .

Dimostrazione. È sufficiente verificare che sussiste la condizione (8.9″): le **c.l.** di vettori nel nucleo hanno anch'esse immagine nulla, quindi appartengono al nucleo; analogamente, le **c.l.** di vettori nell'immagine, in quanto immagini di **c.l.** di vettori nel dominio, appartengono anch'esse all'immagine. □

Definizione 12.12. Il *rango* di un'applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ è la dimensione della sua immagine:

$$\operatorname{rango} L \quad = \quad \dim \operatorname{Im} L$$

Osserviamo che questa definizione è coerente con la formula (12.9): il rango dell'applicazione L_A (def. 12.12) coincide col rango della matrice A (def. 9.1).

Proposizione 12.13. *Sia* $L : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare. Si ha che*

$$\dim V \quad = \quad \dim \operatorname{Im} L \; + \; \dim \ker L \qquad (12.13')$$

Questa Proposizione segue dalla Proposizione 12.14 enunciata più avanti.

Osservazione. Nel caso di una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ questa identità è una rilettura dell'identità del Teorema 10.25. Infatti, in questo caso risulta $\dim V = n$, $\operatorname{Im} L =$ "Span colonne di A", $\ker L =$ "Spazio delle soluzioni del sistema lineare $A\vec{x} = \vec{0}$".

Proposizione 12.14. *Sia* $L : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare. Se completiamo una base* $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s\}$ *di* $\ker L$ *ad una base* $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_r\}$ *di* V, *l'insieme di vettori* $\{L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\}$ *è una base di* $\operatorname{Im} L$.

Dimostrazione. Chiaramente, $\operatorname{Span}\{L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\} = \operatorname{Span}\{\vec{0}, ..., \vec{0}, L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\}$ $= \operatorname{Span}\{L(\vec{b}_1), ..., L(\vec{b}_s), L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\} = \operatorname{Im} V$, questo perché $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_r\}$ è una base di V. D'altro canto, se i vettori $L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)$ fossero linearmente dipendenti, ovvero se esistessero dei coefficienti (non tutti nulli) $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tali che $\sum \lambda_i L(\vec{c}_1) = \vec{0}$, per la linearità di L si avrebbe anche $L\big(\sum \lambda_i \vec{c}_1\big) = \vec{0}$, quindi si avrebbe $\sum \lambda_i \vec{c}_1 \in \ker L = \operatorname{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s\}$. Questo non è possibile perché, per ipotesi, i vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_r$ sono indipendenti. $\square$

Esercizio. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si determini una base di $\ker L$, si completi la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$, si verifichi che le immagini dei vettori che sono stati aggiunti per effettuare tale completamento costituiscono una base dell'immagine di L.

Esercizio. Per ognuna delle matrici che seguono, si consideri l'applicazione lineare associata e se ne determini una base del nucleo ed una base dell'immagine.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Dall'uguaglianza (12.13′) segue che $\dim \operatorname{Im} L = \dim V$ se e solo se $\dim \ker L = 0$ (ovvero se e solo se L è iniettiva). Quindi, nell'ipotesi che si abbia $\dim V = \dim W$, l'applicazione lineare $L : V \to W$ è suriettiva se e solo se è iniettiva.

Proposizione 12.15. *Consideriamo l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in se stesso associata alla matrice A, $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le affermazioni che seguono sono equivalenti tra loro:*

i) L_A *è suriettiva;*

ii) L_A *è iniettiva;*

iii) $\operatorname{rg} A = n$.

Ad una matrice $A \in M_{m,n}$ abbiamo associato una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Viceversa, data una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è possibile trovare una matrice che la rappresenta (detta matrice associata ad L):

Proposizione 12.16. *Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare. Denotando con A la matrice le cui colonne sono le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ risulta*

$$L \quad = \quad L_A \,. \tag{12.16′}$$

In definitiva c'è una corrispondenza biunivoca

$$\Big\{ \text{ matrici in } M_{m,n}(\mathbb{R}) \Big\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \Big\{ \text{ applicazioni lineari } L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Big\} \,.$$

Dimostrazione. Dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ scriviamo $\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{e}_i$. Si ha $L(\vec{v}) = L(\sum \alpha_i \vec{e}_i) = \sum \alpha_i L(\vec{e}_i) = \sum \alpha_i L_A(\vec{e}_i) = L_A(\sum \alpha_i \vec{e}_i) = L_A(\vec{v})$ (si osservi che le tre uguagliane al centro seguono dalla linearità di L, dalla definizione di A e dalla linearità di L_A). Quanto appena provato, cioè che risulta $L(\vec{v}) = L_A(\vec{v})$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dimostra la (12.16′).

La seconda parte della proposizione segue dalla prima: per l'osservazione 12.7, a matrici distinte associamo applicazioni lineari distinte, ovvero la legge che alla matrice A associa la trasformazione L_A (Def. 12.5) è iniettiva, l'uguaglianza $L = L_A$ ci dice che la legge che ad L associa la matrice A costruita come nell'enunciato della proposizione inverte tale legge. □

Esempio 12.17. La matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla relazione $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y + 7z \\ 2x + y + z \\ 3x - 4y + 5z \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Per scriverla è stato sufficiente considerare le immagini dei vettori della base canonica (cfr. Proposizione 16), ovvero prendere i coefficienti di x, y, z nella descrizione di L.

Già osservammo (osservazione 3.4) che il prodotto righe per colonne tra matrici "codifica l'operazione di sostituzione", pertanto, modulo l'identificazione qui sopra, il prodotto righe per colonne tra matrici corrisponde alla composizione[8] di applicazioni lineari. Lo ripetiamo:

Proposizione. *Siano $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due applicazioni lineari. Ha senso considerare la composizione*

$$L_B \circ L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \,.$$

Si ha

$$L_B \circ L_A \quad = \quad L_{B \cdot A} \,. \tag{12.18}$$

[8] La composizione di funzione si effettua sostituendo: siano A, B e C tre insiemi, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni, sia quindi $b = f(a)$ e $c = g(b)$, la composizione $g \circ f : A \to C$ viene definita ponendo $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b)$, cioè sostituendo!

Da notare che, in particolare, la (12.18) dimostra che la composizione $L_B \circ L_A$ è anch'essa un'applicazione lineare. Questo risultato si generalizza:

Proposizione. *Siano* $L : V \to W$ *ed* $M : W \to U$ *due applicazioni lineari. La composizione*

$$\begin{array}{rcccc} M \circ L : & V & \longrightarrow & U \\ & \vec{v} & \mapsto & M\big(L(\vec{v})\big) \end{array}$$

è lineare.

Dimostrazione. Si deve verificare che $M \circ L$ soddisfa la (12.2). Essendo L ed M lineari si ha $M\big(L(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)\big) = M\big(\lambda_1 L(\vec{v}_1) + \lambda_2 L(\vec{v}_2)\big) = \lambda_1 M\big(L(\vec{v}_1)\big) + \lambda_2\big(L(\vec{v}_2)\big)$. □

Esempio. Consideriamo le due applicazioni lineari (si veda l'esempio 17 del paragrafo §4: le matrici sono le stesse)

$$\begin{array}{rcccc} L : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} M : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

La composizione $M \circ L$ è l'applicazione (verificarlo)

$$\begin{array}{rcccc} T : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 11 \\ 2 & -31 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice di questa composizione coincide con il prodotto della matrice associata ad M per la matrice associata ad L (verificarlo).

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcoli, e si descriva esplicitamente (secondo le notazioni della Definizione 12.5),

$$L_A\,, \qquad L_A \circ L_A\,, \qquad L_A \circ L_A \circ L_A\,, \qquad \big(L_A\big)^k = L_A \circ ... \circ L_A \text{ (ripetuto k volte).}$$

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcoli, e si descriva esplicitamente,

$$L_A \circ L_B\,, \quad L_B \circ L_A\,, \quad L_A \circ L_B \circ L_C\,, \quad L_A \circ L_A \circ L_A\,, \quad L_B \circ L_C \circ L_C\,, \quad L_C \circ L_{(C^{-1})}\,, \quad L_{(A^3)}\,.$$

Esercizio. Per ognuna delle applicazioni dell'esercizio precedente si determini l'immagine del vettore di coordinate $2,\ -1,\ 3$.

Osservazione. L'identità $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definita ponendo $\mathcal{I}(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall\, \vec{x}$, è chiaramente una applicazione lineare nonché è rappresentata dalla matrice identica I_n.

Osservazione. Supponiamo di avere una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e supponiamo che L_A sia una funzione biunivoca. Allora, l'inversa (insiemistica) della funzione

L_A è una applicazione lineare nonché è l'applicazione lineare associata alla matrice A^{-1} (inversa di A). Infatti, per la (12.18),

$$L_A \circ L_{A^{-1}} \;=\; L_{A\cdot A^{-1}} \;=\; L_{I_n} \;=\; \mathcal{I}\,.$$

Osservazione 12.19. Consideriamo ora il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ e l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$. Chiaramente, le soluzioni del sistema lineare sono i vettori della fibra (i.e. immagine inversa) di $\vec{b}$. In particolare, la compatibilità del sistema equivale alla proprietà $\vec{b} \in \operatorname{Im} L_A$. Alla luce di questa considerazione, del fatto che l'immagine di L_A è lo "Span delle colonne della matrice A" (osservazione 12.8) e del Teorema 9.2, abbiamo il teorema che segue.

Teorema 12.20 (di Rouché-Capelli). *Sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con $\widetilde{A}$ la matrice completa associata a questo sistema lineare. Le affermazioni che seguono sono equivalenti.*

i) $A\vec{x} = \vec{b}$ *è compatibile;*
ii) $\vec{b} \in \operatorname{Im} L_A$*;*
iii) $\vec{b} \in \operatorname{Span}\{$"colonne di A"$\}$*;*
iv) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$.

Notazione 12.21. Sia $A \in M_{n,m}$ una matrice. In seguito, scriveremo anche:

i) $\ker A$, intendendo $\ker L_A$;
ii) $\operatorname{Im} A$, intendendo $\operatorname{Im} L_A$.

Esercizio 12.22. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare $L_A \circ L_A \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 12.23. Sia $L : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{11}$ una applicazione lineare rappresentata da una matrice $A \in M_{11,7}(\mathbb{R})$ di rango 5. Calcolare $\dim \ker L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.

Esercizio 12.24. Sia $L : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare e sia $W \subseteq \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6. Provare che $\dim\big(\ker L \cap W\big) \geq 1$.

C'è una applicazione lineare che merita di essere menzionata. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V. Le coordinate di un vettore in V sono una n^{-pla} di numeri, quindi possiamo considerare la seguente funzione

$$C_{\mathcal{B}_V} \; : \; \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{v} & \mapsto & \text{“coordinate di } \vec{v}\text{”} \end{array} \tag{12.25}$$

Osservazione 12.26 La funzione $C_{\mathcal{B}_V}$ è lineare. Infatti, banalmente si ha

$$\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{v}_i \;, \quad \vec{u} = \sum \beta_i \vec{v}_i \;, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \vec{v} + \vec{u} = \sum (\lambda_i + \mu_i)\vec{v}_i \\ \lambda\vec{v} = \sum (\lambda\alpha_i)\vec{v}_i \end{cases}$$

(dove le somme sono tutte somme per i che va da 1 a n), ovvero le coordinate di una somma di vettori sono la somma delle coordinate dei singoli vettori e le coordinate del prodotto di un vettore per una costante sono le coordinate di quel vettore moltiplicate per quella costante.

§13. Trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale: autovalori e autovettori.

Concentriamo la nostra attenzione sulle applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in se stesso dette anche trasformazioni di $\mathbb{R}^n$.

Per cominciare con un esempio, consideriamo la seguente *dilatazione*

$$\begin{array}{rccccc} L\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

È abbastanza chiaro cosa fa questa applicazione: prende il piano e lo dilata nella direzione dell'asse delle ascisse. Si osservi che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha per immagine il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ viene mandato in se stesso. Ma ora consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rccccc} M\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array}$$

Non è affatto chiaro a priori come si comporta questa applicazione, ma basta accorgersi del fatto che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha per immagine il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, mentre il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ viene mandato in se stesso, per rendersi conto che questa applicazione è molto simile alla precedente. Infatti, esattamente come la precedente applicazione, anche M dilata il piano in una direzione e lascia fissati i punti della retta ortogonale a tale direzione, solo che questa volta la direzione lungo la quale stiamo dilatando il piano non è quella dell'asse delle ascisse bensì è quella della retta $x = y$.

Queste considerazioni suggeriscono che per comprendere la geometria di una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è importante vedere se ci sono delle direzioni privilegiate, ovvero dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ che vengono mandati in se stessi, più precisamente è importante domandarsi se esistono dei sottospazi sui quali L agisce in un modo particolarmente semplice: è la moltiplicazione per una costante λ. In Fisica, Chimica e Ingegneria le "direzioni privilegiate" hanno un ruolo fondamentale, ad esempio possono rappresentare assi di rotazione, direzioni privilegiate all'interno di un materiale e molto altro. Noi non discuteremo le applicazioni, per mancanza di tempo e perché in questo corso vogliamo concentrarci su questioni algebriche.

Definizione 13.1. Sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e supponiamo che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{w}_0 \neq \vec{0}$, tali che

$$(13.1') \qquad L(\vec{w}_0) \quad = \quad \lambda \vec{w}_0 \ .$$

In questo caso diciamo che λ è un *autovalore* della trasformazione L e che lo spazio

$$W_\lambda \quad := \quad \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; L(\vec{w}) = \lambda \vec{w} \right\}$$

ne è il relativo *autospazio.* I vettori (non nulli) $\vec{w}$ che soddisfano la $(13.1')$ si chiamano *autovettori* (di L e di autovalore λ).

Esercizio 13.2. Verificare che l'insieme W_λ definito sopra soddisfa le condizioni $(8.9')$, e pertanto è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio possono riferirsi anche ad una matrice quadrata A: se λ è un autovalore della trasformazione L_A (cfr. Def. 12.5), è lecito dire (per definizione) che λ è un autovalore della matrice A, eccetera.

In questo paragrafo discutiamo il problema della determinazione degli autovalori e dei corrispondenti autospazi di una trasformazione di $\mathbb{R}^n$. Prima di procedere però osserviamo che la definizione si può dare più in generale:

Definizione 13.3. Sia V uno spazio vettoriale e sia

$$T \ : \quad V \longrightarrow V$$

una trasformazione lineare. Se esistono $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$(13.3') \qquad T(\vec{v}) \quad = \quad \lambda \vec{v} \ ,$$

diciamo che $\vec{v}$ e λ sono rispettivamente un *autovettore* e un *autovalore* di T.

Anche la tesi dell'esercizio 13.2 si generalizza: l'insieme dei vettori che soddisfano la (13.3′) è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 13.4. Verificare che l'insieme V_λ dei vettori che soddisfano la (13.3′) è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 13.5. Lo spazio dei vettori che soddisfano la (13.3′) si chiama *autospazio* associato all'autovalore λ e si denota con V_λ.

Osservazione 13.6. Scrivendo la (13.3′) nella forma $T(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = 0$, ovvero nella forma $\big(T - \lambda\mathcal{I}\big)(\vec{v}) = 0$, dove $\mathcal{I} : V \to V$ denota l'identità (trasformazione che manda ogni vettore in se stesso), si evince che l'autospazio V_λ è il nucleo della trasformazione $T - \lambda\mathcal{I}$:

$$(13.6') \qquad V_\lambda \quad = \quad \ker(T - \lambda\mathcal{I}) \, .$$

Vogliamo sottolineare che, in particolare, se $\vec{v}$ è un autovettore, allora tutti i suoi multipli (non nulli) sono anch'essi autovettori, relativamente allo stesso autovalore.

...vi sarete accorti che V_λ, in quanto nucleo di una applicazione lineare, è sicuramente un sottospazio V. Questo risolve l'esercizio 13.4 e, a maggior ragione, l'esercizio 13.2!

Definizione 13.7. L'insieme degli autovalori di T si chiama *spettro* di T.

Osservazione 13.8. Alla luce della Definizione 13.3 e di quanto appena osservato, il valore λ è un autovalore di T se e solo se il nucleo $\ker(T - \lambda\mathcal{I})$ contiene almeno un vettore non nullo, ovvero se e solo se tale nucleo ha dimensione strettamente positiva:

$$\lambda \text{ è un autovalore di } T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim\ker\big(T - \lambda\mathcal{I}\big) \ > \ 0 \ .$$

Abbiamo visto che un autovettore rappresenta una direzione privilegiata, ovvero una direzione lungo la quale T è una dilatazione. Il relativo autovalore λ è il coefficiente di tale dilatazione. E' del tutto evidente che lo stesso vettore $\vec{v}$ non può essere autovettore per due autovalori distinti (l'esercizio 13.11 vi chiede di dimostrare questa affermazione!). Un po' meno evidente è la proprietà secondo la quale autovettori corrispondenti a autovalori distinti sono sicuramente indipendenti:

Teorema 13.9. *Autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti.*

Inciso 13.10. Stiamo utilizzando l'aggettivo "indipendente" relativamente a dei sottospazi di uno spazio vettoriale piuttosto che relativamente a dei vettori di uno spazio vettoriale.

Si tratta solo di una questione di linguaggio, la definizione è quella ovvia: diciamo che i sottospazi W_1, ..., W_k di uno spazio vettoriale V sono indipendenti se presi comunque dei vettori non nulli $\vec{w}_{i_1} \in W_{i_1}$, ..., $\vec{w}_{i_r} \in W_{i_r}$ si ha che $\vec{w}_{i_1}$, ..., $\vec{w}_{i_r}$ sono vettori indipendenti. Negli approfondimenti, paragrafo § 16, proponiamo un esercizio utile (esercizio 16.9).

Come già accennato, il Teorema 13.9 generalizza il risultato dell'esercizio che segue. Può essere dimostrato per induzione sul numero degli autospazi che si considerano, la dimostrazione la svolgiamo negli approfondimenti (§ 16).

Esercizio 13.11. Provare che due autospazi corrispondenti a due autovalori distinti sono indipendenti (i.e. la loro intersezione è il vettore nullo).

Torniamo a considerare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (in realtà, tutto quello che stiamo per dire ha perfettamente senso anche per le trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale astratto).

Definizione 13.12. Il *polinomio caratteristico* di L_A è il polinomio

$$P_{L_A}(\lambda) \qquad := \qquad \det\left(A - \lambda I\right)$$

dove I denota la matrice identica.

Naturalmente, per definizione, ci si può riferire direttamente alla matrice A: si può dire "il polinomio caratteristico di A" e si può scrivere $P_A(\lambda)$, intendendo sempre $\det(A - \lambda I)$.

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, si ha

$$P_A(\lambda) \quad = \quad \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \quad = \quad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 1 \\ -1 & 7 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \quad -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 19\lambda + 3\,.$$

Esercizio. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vedremo (Lemma 15.14 e oss. 15.16) che il polinomio caratteristico è un invariante delle trasformazioni lineari, questo significa che anche i suoi coefficienti lo sono e che in particolare devono avere un significato geometrico. Ora cerchiamo di capire cosa si può dire a priori, almeno algebricamente, sui coefficienti di $P_A(\lambda)$. Innanzi tutto osserviamo che λ compare n volte e che compare sulla diagonale, questo significa che sicuramente $P_A(\lambda)$ comincia con $(-\lambda)^n$. Inoltre, il termine noto di un qualsiasi polinomio si ottiene valutando il polinomio in zero. Nel nostro caso, sostituendo $\lambda = 0$ nella (13.12) si ottiene $\det A$, quindi il termine noto di $P_A(\lambda)$ è $\det A$. Un altro coefficiente interessante è quello di $(-\lambda)^{n-1}$: sebbene la formula del determinante di una matrice sia complessa, domandandoci quali sono i termini di grado $n-1$ in λ, ci accorgiamo che questi si ottengono facendo scontrare i vari $a_{i,i}$ con i restanti $-\lambda$ sulla diagonale e quindi che il coefficiente di $(-\lambda)^{n-1}$ vale $a_{1,1} + ... + a_{n,n}$, espressione che denotiamo con $\operatorname{tr} A$ (*traccia* di A, def. 13.14). In definitiva risulta

$$P_A(\lambda) \quad = \quad (-\lambda)^n + \operatorname{tr} A \cdot (-\lambda)^{n-1} + ... + \det A\,, \tag{13.13}$$

Definizione 13.14. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice, la somma degli elementi sulla diagonale principale si definisce la *traccia* di A:

$$\operatorname{tr} A \quad := \quad a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} .$$

Osservazione 13.15. Consideriamo sempre $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. L'osservazione 13.8 ci dice che il valore λ è un autovalore di L_A se e solo se il nucleo della trasformazione $L_A - \lambda\mathcal{I}$ ha dimensione strettamente positiva. D'altro canto, poiché la matrice associata all'applicazione lineare $L_A - \lambda\mathcal{I}$ è la matrice $A - \lambda I_n$ (questo è ovvio, se non vi sembra ovvio dimostratelo! ...e scrivete qualche esempio), il valore λ è un autovalore di L_A se e solo se il determinante della matrice $A - \lambda I_n$ vale zero. In altri termini, lo spettro di L_A (Definizione 13.7) è l'insieme delle radici del polinomio caratteristico:

$$\text{spettro}\big(L_A\big) \quad = \quad \text{“insieme delle radici del polinomio caratteristico”}.$$

Questo significa che abbiamo uno strumento per determinare gli autovalori di una trasformazione lineare: scriviamo il polinomio caratteristico e ne troviamo le radici. Una volta trovati gli autovalori la strada è in discesa: i relativi autospazi si determinano utilizzando la (13.6′).

Nell'esempio che segue determiniamo autovalori e autospazi di una trasformazione di $\mathbb{R}^2$.

Esempio. Consideriamo la trasformazione lineare, associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{array}{cccccc} L : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + 4y \end{pmatrix} \end{array}$$

e calcoliamone gli autovalori ed i relativi autospazi. Per prima cosa scriviamo il polinomio caratteristico:

$$P_L(\lambda) \quad := \quad \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad = \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad = \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 ;$$

poi ne calcoliamo le radici, che sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. A questo punto determiniamo il nucleo della matrice (ovvero della corrispondente trasformazione) $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e della matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha $\ker \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nonché $\ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi, ci sono due autovalori: 2 e 3; i relativi autospazi sono l'autospazio $V_2 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e l'autospazio $V_3 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ora introduciamo due numeri associati a un autovalore.

Definizione 13.16. Sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia λ un autovalore di L_A. Si pone

$$\begin{aligned} \mu_g(\lambda) &:= \dim \ker (L_A - \lambda \mathcal{I}_d) = \dim V_\lambda ; \\ \mu_a(\lambda) &:= \text{“molteplicità di } \lambda \text{ come soluzione di } P_A(\lambda) = 0\text{”}. \end{aligned}$$

Queste due quantità si chiamano, per definizione, rispettivamente *molteplicità geometrica* e *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ.

Nell'esempio che precede la Definizione 13.16, entrambi gli autovalori hanno molteplicità algebrica e geometrica uguale a uno.

Vale il seguente risultato fondamentale.

Teorema 13.17. *Le molteplicità geometrica $\mu_g(\lambda)$ e algebrica $\mu_a(\lambda)$ di un autovalore λ di una trasformazione lineare soddisfano la relazione*

$$\mu_g(\lambda) \quad \leq \quad \mu_a(\lambda) \ .$$

Questo teorema lo dimostriamo nel paragrafo §16.

Esercizio. Calcolare autovalori e autospazi delle matrici che seguono (calcolare anche le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione 13.18. Supponiamo che $\vec{v}$ sia un autovettore di A e che λ ne sia il relativo autovalore. Per ogni intero $k \geq 0$ si ha

$$A^k\,\vec{v} \quad = \quad \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{volte}}\,\vec{v} \quad = \quad \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{k-1\ \text{volte}}\,\lambda\vec{v} \quad = \quad \ldots \quad = \quad \lambda^k\,\vec{v}$$

Esercizio 13.19. Verificare che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolarne il relativo autovalore e determinare $A^2\vec{v}$, $A^3\vec{v}$, $A^5\vec{v}$, $A^{14}\vec{v}$.

§14. Matrice rappresentativa di una applicazione lineare.

Abbiamo visto che se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione lineare, allora esiste una matrice A tale che $L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (cfr. Prop. 12.16). Tale matrice "descrive numericamente" la nostra funzione L e la possiamo utilizzare per rispondere a molte domande che la riguardano.

Data una applicazione lineare tra spazi vettoriali astratti $L : V \to W$ vorremmo ugualmente poterla "descrivere numericamente". Questo è possibile, vediamo in che modo si realizza una tale descrizione. Se fissiamo una base $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ di V e una base $\mathcal{B}_W = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ di W, abbiamo un sistema di coordinate su V ed uno su W, quindi possiamo considerare la funzione che alle coordinate di un vettore associa le coordinate della sua immagine, funzione che per sottolineare questo aspetto denotiamo con L_{coord}. D'altro canto le coordinate di un vettore in V sono una n^{-pla} di numeri, così come le le coordinate di un vettore in W sono una m^{-pla} di numeri, quindi L_{coord} è una funzione definita su $\mathbb{R}^n$, che assume valori in $\mathbb{R}^m$. Schematizzando, fissate delle basi per V e W,

ad $\begin{array}{rcl} L : V & \longrightarrow & W \\ \vec{v} & \mapsto & L(\vec{v}) \end{array}$ associamo $\begin{array}{rcl} L_{coord} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{\lambda} & \mapsto & \text{“coordinate del vettore } L(\sum \lambda_i \vec{v}_i)\text{”} \end{array}$

Notiamo che essendo i $\vec{v}_i$ i vettori della base di V, il vettore numerico $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v} := \sum \lambda_i \vec{v}_i$. Ciò significa che abbiamo la seguente chiave di lettura per la funzione L_{coord}:

"alle coordinate di un vettore associa le coordinate della sua immagine".

Esercizio 14.1. Dimostrare che la funzione $L_{coord} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione lineare.

Questo esercizio, è sostanzialmente una tautologia... ma va ugualmente svolto! (Si veda il capitolo dedicato alle soluzioni degli esercizi).

La funzione L_{coord}, come ogni funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ e come ricordato nell'incipit di questo paragrafo, è la moltiplicazione per una matrice. Si pone:

Definizione 14.2. La matrice associata all'applicazione lineare $L_{coord} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si chiama *matrice rappresentativa* di L rispetto alle basi fissate.

Esempio 14.3. Sia V lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Consideriamo la funzione $D : V \longrightarrow V$ che ad un polinomio associa la sua derivata. Cerchiamo la matrice rappresentativa di D rispetto alla base $\mathcal{B}_V = \{1, x, x^2\}$. Le coordinate del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ sono la terna a, b, c. Quanto alla sua derivata abbiamo $Dp(x) = b + 2cx$, di coordinate $b, 2c, 0$ (attenzione all'ordine). Ne segue che

a $\begin{array}{rcl} D : V & \longrightarrow & V \\ p(x) & \mapsto & Dp(x) \end{array}$ associamo $\begin{array}{rcl} D_{coord} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Poiché $\begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (cfr. esempio 12.17), la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice rappresentativa di D rispetto alla base $\mathcal{B}_V = \{1, x, x^2\}$.

Data un'applicazione lineare $L : V \to W$ e fissate basi $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ di W, corrispondentemente abbiamo la matrice rappresentativa M di L. Poiché il vettore delle coordinate di $\vec{v}_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}_V$ è il vettore $\vec{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ (convincersene) e poiché il prodotto $M \cdot \vec{e}_i$ restituisce la i^{-esima} colonna di M, alla luce del fatto che per definizione stessa di matrice rappresentativa si deve avere

$$(14.4) \qquad M \cdot \text{“}Coord_{\mathcal{B}_V}\ \vec{v}\text{”} \quad = \quad \text{“}Coord_{\mathcal{B}_W}\ L(\vec{v})\text{”}\ , \quad \forall\ \vec{v} \in V\,,$$

e pertanto, in particolare, ciò dovrà valere per il vettore $\vec{v}_i$, si deduce quanto segue:

Osservazione 14.5. La i^{-esima} colonna di M è il vettore delle coordinate di $L(\vec{v}_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}_W$.

Ribadiamo l'osservazione 14.5 e quanto spiegato sopra in altri termini: vale la catena di uguaglianze

$$i^{-esima} \text{ colonna di } M \quad = \quad M \cdot \vec{e}_i \quad = \quad M \cdot \text{“}Coord_{\mathcal{B}_V}\ \vec{v}_i\text{”} \quad = \quad \text{“}Coord_{\mathcal{B}_W}\ L(\vec{v}_i)\text{”}$$

(essendo $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore della base canonica di posto i).

Naturalmente, la matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche $\mathcal{B}_{Can(\mathbb{R}^n)}$ e $\mathcal{B}_{Can(\mathbb{R}^m)}$ (cfr. § 8), dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L_A\ : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} \end{array}$$

coincide con la matrice A. Questo semplicemente perché le coordinate di un vettore rispetto $\mathcal{B}_{Can(\mathbb{R}^n)}$ di un vettore di $\mathbb{R}^n$ coincidono col vettore stesso (stessa cosa per $\mathbb{R}^m$).

Osservazione 14.6. Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{B}_V$ una base di V e $\mathcal{B}_W$ una base di W. Sia inoltre A la matrice rappresentativa di L rispetto tali basi. Si ha

$$\text{rango}\, L \underset{(\text{def. } 12.12)}{=} \dim \operatorname{Im} L \quad = \quad \dim \operatorname{Im} L_{coord} \underset{(12.9)}{=} \text{rango}\, A\,.$$

dove l'uguaglianza al centro è immediata: un vettore appartiene all'immagine di L se e solo se il vettore delle sue coordinate appartiene all'immagine di L_{coord} nonché ad una base di $\operatorname{Im} L$ corrisponde (tramite il passaggio a coordinate) una base di $\operatorname{Im} L_{coord}$.

Da notare che, in particolare, matrici rappresentative (rispetto a basi diverse) della stessa applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ hanno necessariamente lo stesso rango. Infatti, la nozione "rango di L" (cfr. Definizione 12.12) è intrinseca: non ha nulla a che vedere con la scelta di basi di V e W.

§15. Problema della diagonalizzazione.

Consideriamo uno spazio vettoriale V ed una trasformazione lineare $T : V \to V$. Abbiamo visto che se fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ di V, corrispondentemente abbiamo delle coordinate su V (cfr. Osservazione 8.18 e Definizione 8.19). Dal paragrafo precedente sappiamo che T è rappresentata dalla matrice A (rispetto alla base $\mathcal{B}$) se

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{b}_i \ , \qquad \text{dove} \ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} := A \cdot \vec{\lambda} \, ,$$

cioè se $A \cdot \vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $T(\vec{v})$, essendo $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v}$. In altre parole, premesso che una base $\mathcal{B}$ di V determina un sistema di coordinate su V, ovvero una identificazione di V con $\mathbb{R}^n$, si ha che T è rappresentata dalla matrice A se accade che T, vista come trasformazione di $\mathbb{R}^n$, è la moltiplicazione per la matrice A. Di nuovo, in altre parole: visto che $\mathbb{R}^n$ è lo spazio delle coordinate di V, si ha che T è rappresentata dalla matrice A se la legge che alle coordinate di un vettore associa le coordinate dell'immagine di quel vettore è data dalla moltiplicazione per la matrice A.

Nota. Quando $V = \mathbb{R}^n$ e $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, la trasformazione T è rappresentata dalla matrice A se e solo se $T = L_A$ (cfr. Definizione 12.5).

Inciso. Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la matrice rappresentativa, di una applicazione lineare $T : V \to W$, associata ad una base del dominio V ed una base del codominio W. Nel caso delle trasformazioni lineari, essendo $V = W$ si sceglie sempre la stessa base per dominio e codominio (questo non tanto perché sceglierle diverse e peraltro cambiarle significherebbe gestire quattro basi per lo stesso spazio vettoriale, ma perché altrimenti si arriverebbe a matrici geometricamente poco significative).

Il problema della diagonalizzazione è il seguente: dati V e T come sopra, trovare (se possibile) una base di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è una matrice diagonale. Prima di procedere caratterizziamo le trasformazioni rappresentate da una matrice diagonale.

Osservazione 15.1. Siano V e T come sopra e sia $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ una base di V. Si ha che T è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\Delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) \qquad := \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix} .$$

se e solo se

$$T(\vec{b}_i) \quad = \quad \alpha_i \vec{b}_i \ , \quad \forall\, i \ .$$

Si noti che, nella situazione indicata, in particolare i vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$ sono autovettori della trasformazione T (di autovalori $\alpha_1, ..., \alpha_n$).

Quanto appena osservato dimostra la proposizione che segue.

Proposizione 15.2. *Siano V e T come sopra. La trasformazione T è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori.*

Questa proposizione e l'osservazione che la precede riducono il problema della diagonalizzazione al problema della ricerca di una base di autovettori, problema che sappiamo affrontare con gli strumenti visti nel paragrafo § 13. A questo punto è naturale porsi le domande che seguono:

Cosa hanno in comune due matrici che rappresentano la stessa trasformazione (rispetto a basi diverse)? È possibile scrivere una formula che le lega?

La Proposizione 15.6 e le osservazioni che seguono rispondono alle nostre domande. In inciso, negli approfondimenti (paragrafo § 16) vedremo, in generale, come cambia la matrice rappresentativa di una applicazione lineare $L : V \to W$ quando si cambia la base del dominio e/o del codominio.

Consideriamo una trasformazione lineare L di uno spazio vettoriale V. Siano date due basi di V che chiamiamo "vecchia" e "nuova" (e chiamiamo "vecchio" e "nuovo" i rispettivi sistemi di coordinate). Premettiamo che alla luce di quanto visto nel paragrafo precedente ed in particolare della caratterizzazione (14.4), scrivere la matrice rappresentativa di L rispetto ad una base fissata equivale a conoscere la funzione che alle coordinate di un vettore $\vec{v}$ associa le coordinate della sua immagine $L(\vec{v})$. Ora, assumendo di conoscere la matrice rappresentativa di L rispetto alla vecchia base, ovvero la legge che alle vecchie coordinate di un vettore $\vec{v}$ associa le vecchie coordinate della sua immagine $L(\vec{v})$, siamo in grado di scrivere un mero algoritmo che consente di passare dalle nuove coordinate di un vettore $\vec{v}$ alle nuove coordinate della sua immagine $L(\vec{v})$:

(15.3)
siano date le nuove coordinate di un vettore $\vec{v}$,
i) *determiniamo le vecchie coordinate di $\vec{v}$;*
ii) *determiniamo le vecchie coordinate di $L(\vec{v})$;*
iii) *determiniamo le nuove coordinate di $L(\vec{v})$.*

Il passaggio *ii)* lo sappiamo già eseguire: consiste nella moltiplicazione per la matrice rappresentativa rispetto alla vecchia base. Ci domandiamo come eseguire i passaggi *i)* e *iii)*, ovvero come effettuare i cambi di coordinate. La risposta è nelle Proposizioni 15.4 e 15.7 che seguono. Per rendere un po' meno astratta la trattazione e per semplificare il discorso iniziamo considerando il caso dove $V = \mathbb{R}^n$ e dove la vecchia base in questione è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dunque, vale il risultato che segue.

Proposizione 15.4. *Si considerino $\mathbb{R}^n$, la sua base canonica $\mathcal{C}an = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ e la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$. Sia B la matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$. Allora, la moltiplicazione per B fa passare da coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ a coordinate canoniche. In altri termini, se $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, allora $B \cdot \vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate canoniche di $\vec{v}$ (cioè $\vec{v}$ stesso).*

Dimostrazione. Dire che $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ significa dire che $\vec{v} = \sum \lambda_i \vec{b}_i$. Vista la definizione di B e di prodotto righe per colonne si ha $\sum \lambda_i \vec{b}_i = B \cdot \vec{\lambda}$ □

Osservazione 15.5. Naturalmente il passaggio inverso, ovvero il passaggio da coordinate canoniche a coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ si effettua moltiplicando per la matrice B^{-1}.

A questo punto abbiamo una prima risposta alle domande che ci siamo posti.

Proposizione 15.6. *Sia $L = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare (quindi A è la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$). Sia $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^n$. Sia B la matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$. La matrice che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice*

$$X = B^{-1} \cdot A \cdot B \qquad (15.6')$$

Dimostrazione. Per definizione di matrice rappresentativa trovare X significa descrivere la legge che alle coordinate $\lambda_1, ..., \lambda_n$ di un vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa le coordinate

di $L(\vec{v})$, sempre rispetto a $\mathcal{B}$. Questa legge è descritta dall'algoritmo (15.3). Denotato con $\vec{\lambda}$ il vettore delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, per la Proposizione 15.4 il passaggio *i*) è la moltiplicazione per B e pertanto restituisce $B \cdot \vec{\lambda}$, come già osservato il passaggio *ii*) è la moltiplicazione per A, che quindi restituisce $A \cdot (B \cdot \vec{\lambda})$, infine per l'osservazione 15.5 il passaggio *iii*) è la moltiplicazione per B^{-1}, che quindi restituisce $B^{-1} \cdot (A \cdot (B \cdot \vec{\lambda}))$.
In definitiva, poiché la legge che al vettore $\vec{\lambda}$ delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa le coordinate di $L(\vec{v})$ (sempre rispetto alla base $\mathcal{B}$) è la funzione che a $\vec{\lambda}$ associa $B^{-1} \cdot (A \cdot (B \cdot \vec{\lambda}))$, si ha che $B^{-1} \cdot A \cdot B$ è la matrice cercata. □

Abbiamo considerato $\mathbb{R}^n$ ed abbiamo assunto che una delle due basi era quella canonica. In effetti anche nel caso generale di una trasformazione di uno spazio vettoriale astratto V la formula che lega le matrici rappresentative rispetto a basi diverse è identica alla (15.6′). Infatti, possiamo ripetere i risultati visti nel caso generale:

Proposizione 15.7. *Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, ..., \vec{c}_n\}$ e $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, ..., \vec{d}_n\}$ due sue basi (che chiamiamo "vecchia" e "nuova"), B la matrice delle coordinate dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia base (la i^{esima} colonna di B è il vettore delle coordinate di $\vec{d}_i$ rispetto alla base $\mathcal{C}$). Allora, la moltiplicazione per B fa passare da coordinate nuove a coordinate vecchie.*

Proposizione 15.8. *Siano V, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, B come nella Proposizione precedente. Sia $T : V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare e siano A ed X la matrice rappresentativa di T rispetto a $\mathcal{C}$ e quella rispetto a $\mathcal{D}$. Allora*

$$X \quad = \quad B^{-1} \cdot A \cdot B \tag{15.8′}$$

Dimostrazione (*della Proposizione* 15.7). Se $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di un vettore $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{D}$, allora

$$\vec{v} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \vec{d}_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{h=1}^{n} b_{h,\,i}\vec{c}_h \right) \;=\; \sum_{h=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{h,\,i}\, \lambda_i \right)}_{(\star)} \vec{c}_h \,.$$

Visto che il coefficiente $(\star)$ è esattamente il prodotto tra la h^{-esima} riga di B ed il vettore $\vec{\lambda}$ si ha che $B \cdot \vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. □

Dimostrazione (*della Proposizione* 15.8). Come nella dimostrazione della Proposizione 15.6, vista la Proposizione 15.7, i tre passi dell'algoritmo (15.3) corrispondono, nell'ordine, alla moltiplicazione per B, la moltiplicazione per A, la moltiplicazione per B^{-1}. □

Quanto visto si può riassumere nello schemino che segue ("nu", "ve" e "co" stanno rispettivamente per "nuove", "vecchie" e "coordinate", la freccia "$\rightsquigarrow$" indica il passaggio):

$$\underbrace{X \cdot \overbrace{\vec{\lambda}}^{nu.co.(\vec{v})}}_{\rightsquigarrow\ nu.co.(T(\vec{v}))} \quad = \quad \underbrace{B^{-1} \cdot \underbrace{A \cdot \underbrace{B \cdot \overbrace{\vec{\lambda}}^{nu.co.(\vec{v})}}_{\rightsquigarrow\ ve.co.(\vec{v})}}_{\rightsquigarrow\ ve.co.(T(\vec{v}))}}_{\rightsquigarrow\ nu.co.(T(\vec{v}))}$$

Attenzione: La formula $X = B^{-1}{\cdot}A{\cdot}B$ può anche essere scritta nella forma $A = B{\cdot}X{\cdot}B^{-1}$, come pure nella forma $A = C^{-1}{\cdot}X{\cdot}C$, ovvero $X = C{\cdot}A{\cdot}C^{-1}$, essendo ora C la matrice di passaggio da vecchie a nuove coordinate, cioè essendo $C = B^{-1}$. Tutto questo può creare molta confusione, ma non ci si deve spaventare: una volta compresa l'essenza della formula, l'unico dubbio che può venire riguarda i ruoli giocati dai due sistemi di coordinate. Bene, le possibilità sono due e c'è un trucco per non sbagliarsi mai. Vedendo il prodotto per una matrice come funzione che ad un vettore numerico associa un altro vettore numerico, l'input della stessa sono coefficienti da dare alle colonne mentre l'output sono c.l. delle colonne, quindi se nelle colonne della matrice di un cambiamento di base ci sono le coordinate dei vettori di una base $\mathcal{B}$ (rispetto un'altra base), allora l'input "naturale" sono coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ (e l'output saranno coordinate rispetto l'altra base). Scrivendo la formula del cambiamento di base coerentemente con questo principio è impossibile confondersi.

Osservazione 15.9. Siamo partiti da una trasformazione lineare $T : V \to V$ ed abbiamo visto che la formula che lega le due matrici rappresentative A ed X (rispetto a due basi diverse) è la formula $X = B^{-1}{\cdot}A{\cdot}B$. Naturalmente la stessa formula ha un'altra chiave di lettura: data $T : V \to V$, di matrice rappresentativa A rispetto a una base fissata, si ha che $X = B^{-1}{\cdot}A{\cdot}B$ è la matrice rappresentativa di T rispetto a un'altra base (la base corrispondente al cambio di coordinate associato alla moltiplicazione per B).

Di conseguenza, possiamo affermare che due matrici rappresentano la stessa trasformazione lineare rispetto a basi diverse se e solo se sono coniugate (Proposizione 15.10 e Definizione 15.11 seguenti):

Proposizione 15.10. *Due matrici A, $A' \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ rappresentano la stessa trasformazione lineare rispetto a basi diverse se e solo se esiste una matrice invertibile C tale che*

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C \tag{15.10$'$}$$

Definizione 15.11. Due matrici A e A' come nella (15.10′) si dicono *coniugate*.

Torniamo al problema della diagonalizzazione. Alla luce di quanto abbiamo visto, e in particolare della Proposizione 15.10, abbiamo la seguente osservazione

Osservazione 15.12. La trasformazione lineare $L = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice A è coniugata a una matrice diagonale, cioè se e solo se esiste una matrice invertibile C tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è una matrice diagonale.

Il problema della diagonalizzazione di una matrice A è il problema di trovare una matrice invertibile C tale che $A' = C^{-1}{\cdot}A{\cdot}C$ è diagonale. Risolviamo il seguente problema:

Problema 15.13. Trovare una matrice invertibile B che diagonalizza la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$P_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12,$$

ne calcoliamo le due radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, quindi determiniamo i due autospazi V_2 e V_6 :

$$V_2 = \ker\big(A - 2I\big) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$V_6 = \ker\big(A - 6I\big) = \ker\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice B, associata agli autovettori trovati, è la matrice che diagonalizza A: si ha

$$B^{-1} \cdot A \cdot B \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

o meglio,

$$(15.13') \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

Osservazione. Sia T la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice A, e sia Δ la matrice che rappresenta T rispetto alla base di autovettori $\{\vec{v}_2, \vec{v}_6\}$. La spiegazione geometrica del risultato ottenuto è la seguente: si ha $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (infatti $T(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2 + 0\vec{v}_6$ e $T(\vec{v}_6) = 0\vec{v}_2 + 6\vec{v}_6$), d'altro canto, per la Proposizione 15.6 si ha anche $\Delta = B^{-1}AB$.

Avvertenza. Nel risolvere il problema posto abbiamo effettuato delle scelte: abbiamo scelto di considerare $\lambda = 2$ come primo autovalore e $\lambda = 6$ come secondo autovalore; relativamente ai due autovalori trovati, abbiamo scelto gli autovettori

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente avremmo potuto considerare $\lambda = 6$ come primo autovalore e $\lambda = 2$ come secondo autovalore, nonché, ad esempio, $\vec{v}_6{}' = \binom{-4}{4}$, $\vec{v}_2{}' = \binom{3}{1}$. Seguendo queste scelte avremmo trovato

$$(15.13'') \qquad \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Verificare le uguaglianze (15.13′) e (15.13″).

Ora enunciamo un lemma molto importante.

Lemma 15.14. Se A ed A' sono due matrici coniugate (e.g. $A' = B^{-1} \cdot A \cdot B$), hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Dimostrazione. Si ha $P_{A'}(\lambda) = \det\big(A' - \lambda I\big) = \det\big(B^{-1} \cdot A \cdot B - \lambda I\big) = \det\big(B^{-1} \cdot A \cdot B - B^{-1} \cdot \lambda I \cdot B\big) = \det\big[B^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot B\big] = \det B^{-1} \cdot \det\big(A - \lambda I)\big) \cdot \det B = \det\big(A - \lambda I\big) = P_A(\lambda)$. □

In particolare, tutti i coefficienti del polinomio caratteristico sono invarianti per coniugio. Poiché il termine noto ed il coefficiente di $(-\lambda)^{n-1}$ sono rispettivamente determinante e traccia, infatti $\det\big(A - \lambda I\big) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\mathrm{tr}(A) + \ldots + \det(A)$, si ha il seguente corollario.

Corollario 15.15. Se A ed A' sono due matrici coniugate, si ha

$$\det A \quad = \quad \det A' \,; \qquad\qquad \mathrm{tr}\, A \quad = \quad \mathrm{tr}\, A'$$

(ricordiamo che la traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale).

Nel paragrafo § 13 sostanzialmente abbiamo introdotto il polinomio caratteristico come oggetto associato a una matrice (cfr. Definizione 13.12). Il Lemma 15.14 è importante perché ci consente di vedere il polinomio caratteristico come oggetto associato a una trasformazione lineare. Vediamo meglio:

Osservazione 15.16. Data una trasformazione lineare T di uno spazio vettoriale V, possiamo scegliere una base di V. Corrispondentemente possiamo considerare la matrice A rappresentativa di T rispetto alla base scelta, quindi possiamo considerare il polinomio caratteristico di A. Se effettuiamo una scelta diversa, o, se preferite, se cambiamo la nostra scelta, otteniamo una matrice A' coniugata alla matrice A. Ora, il Lemma 15.14 ci dice che matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico. Questo significa che il polinomio caratteristico **non** dipende dalla base di V che abbiamo scelto:

Data una trasformazione lineare T di uno spazio vettoriale V, ha perfettamente senso parlare di polinomio caratteristico di T, quindi scrivere $P_T(\lambda)$, pur senza avere in mente la scelta di una base.

Il fatto che $P_T(\lambda)$ ha senso e dipende solo dalla geometria di T (lo ripetiamo, non dipende dalla base di V che scegliamo per calcolarlo) ci dice che tutti i coefficienti di $P_T(\lambda)$ devono avere una interpretazione geometrica. In particolare, determinante e traccia devono avere una interpretazione geometrica (cfr. Corollario 15.15, cfr. anche §16):

ha senso scrivere $\det T$, come pure ha senso scrivere $\operatorname{tr} T$, pur senza avere in mente la scelta di una base.

Torniamo al problema della diagonalizzazione. Facciamo una premessa. Se

$$\Delta(\delta_1, ..., \delta_n) \qquad := \qquad \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale, i δ_i sono gli autovalori di Δ e determinante e traccia di Δ sono rispettivamente uguali a prodotto e somma degli autovalori δ_i :

$$\det\Delta \quad = \quad \delta_1 \cdot ... \cdot \delta_n \quad , \qquad\qquad \operatorname{tr}\Delta \quad = \quad \delta_1 + ... + \delta_n \,.$$

Inoltre, le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore δ coincidono, e sono uguali al numero di volte che il valore δ compare tra i valori $\delta_1, ..., \delta_n$ (questo è evidente, se non vi sembra evidente dimostratelo per esercizio).

Corollario 15.17. Se A è una matrice diagonalizzabile,

i) il determinante $\det A$ è uguale al prodotto degli autovalori di A;

ii) la traccia $\operatorname{tr} A$ è uguale alla somma degli autovalori di A;

iii) le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore coincidono.

E' bene ripeterlo: quando si calcola la somma degli autovalori (così come quando se ne calcola il prodotto), se un autovalore ha molteplicità μ, deve essere ripetuto μ volte.

Avvertenza 15.18. Il Corollario 15.17 non deve essere frainteso/usato male:

- inizia con un "se", la diagonalizzabiltà di una matrice **non** è affatto equivalente alle proprietà *i*), *ii*) e *iii*). Si veda l'esempio (15.18′).
- al fine di provare che una data matrice è diagonalizzabile mi devo solo preoccupare di stabilire l'esistenza di una base di autovettori (cfr. Prop. 15.2). In un certo senso, delle proprietà *i*), *ii*) e *iii*) non me ne importa nulla! ...si veda l'esempio (15.18″).

Esempio 15.18′. Le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 11 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

soddisfano le proprietà i), ii) e iii) del Corollario 15.17. Ciò nonostante nessuna di esse è diagonalizzabile. Lo studente verifichi quanto affermato. Il motivo per il quale le matrici indicate non sono diagonalizzabili è che "non possiedono abbastanza autovalori"[9].

Esempio 15.18″. Dovendo stabilire se le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_k = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

sono diagonalizzabili (e per quali valori del parametro k) procediamo come segue:
risulta $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = (2-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda)$, sapendo che ad autovalori distinti corrispondono autospazi indipendenti, di sicuro troviamo due autovettori indipendenti (uno per l'autovalore 2 ed uno per l'autovalore 3) e ci domandiamo se è possibile trovarne 3; la risposta dipenderà dalla molteplicità geometrica dell'autovalore 2 (che può valere 1 o 2, da notare che l'autovalore 3 non può esserci d'aiuto, avendo molteplicità algebrica 1 avrà necessariamente anche molteplicità geometrica 1, Teorema 13.17). Scrivendo $A-2I$ e $B-2I$ vediamo che la prima non ha righe proporzionali (ha rango 2, quindi nucleo di dimensione 3-2=1), mentre la seconda ha rango 1 (nucleo di dimensione 3-1=2). Ne segue che A non è diagonalizzabile e che B invece lo è.
Riguardo alla matrice C_k il discorso è simile. Risulta $P_C(\lambda) = (4-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(k-\lambda)$, ne segue che per k diverso da 4 e 1 abbiamo tre autovalori distinti (4, 1 e k), quindi tre autovettori indipendenti, e C_k, è diagonalizzabile. Per $k = 4$ e per $k = 1$ scriviamo C_k quindi procediamo esattamente come abbiamo fatto per le matrici A e B (troveremo $\mathrm{rg}(C_4 - 4I) = 1$ e $\mathrm{rg}(C_1 - I) = 2$, ovvero che C_4 è diagonalizzabile e C_1 non lo è). In definitiva: "C_k è diagonalizzabile" $\iff k \neq 1$.

Dimostrazione (del Corollario 15.17). Per ipotesi, la matrice A è coniugata ad una matrice diagonale Δ. Per la premessa, la matrice Δ soddisfa i), ii) e iii). D'altro canto A e Δ hanno lo stesso polinomio caratteristico, in particolare, hanno stessi autovalori e relative molteplicità algebriche e geometriche (queste ultime coincidono per ragioni geometriche: perché A e Δ rappresentano la stessa trasformazione lineare), stessa traccia e stesso determinante. Ne segue che anche A soddisfa i), ii) e iii). □

Il polinomio caratteristico di una matrice A è un polinomio di grado uguale all'ordine di A, trovarne le radici può essere difficile (e spesso è anche faticoso il solo scrivere il polinomio caratteristico). Quindi, trovare gli autovalori di A, può essere un problema. Nelle applicazioni pratiche questo problema viene spesso aggirato usando il Corollario 15.17. Vediamo un esempio:

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 4 & -11 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ e sia $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$.

a) trovare un valore τ per il quale il vettore $\vec{v}_\tau$ è un autovettore di A; **b)** determinare il corrispondente autovalore λ nonché le molteplicità algebrica e geometrica di λ;

[9] Va detto che se si lavora sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (si veda l'appendice), già la proprietà iii) da sola è equivalente alla diagonalizzabiltà, questo segue dal Teorema Fondamentale dell'algebra: sui complessi, il polinomio caratteristico si decompone in fattori di primo grado, quindi il suo grado (che è uguale all'ordine della matrice) è uguale alla somma delle molteplicità delle sue radici (ricordiamo che tali radici sono gli autovalori della matrice). Questo vale per le molteplicità algebriche, assumendo l'ipotesi che molteplicità algebriche e geometriche coincidano, anche la somma delle molteplicità geometriche uguaglia l'ordine della matrice e, alla luce del fatto che autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti, ciò garantisce l'esistenza di una base di autovettori. Da notare che lo stesso discorso non si può fare quando si lavora sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali perché un polinomio a coefficienti reali può contenere fattori di secondo grado che non si decompongono.

c) trovare, se esistono, una matrice $C \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale $\Delta \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tali che $C^{-1} \cdot A \cdot C = \Delta$.

Soluzione. Calcoliamo il prodotto $A \cdot \vec{v}_t$: $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 4 & -11 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-22 \\ -2t-6 \\ 2-6t \end{pmatrix}$.

Il vettore $\vec{v}_t$ è un autovettore di A se esiste un valore λ per il quale risulti

$$\begin{pmatrix} t-22 \\ -2t-6 \\ 2-6t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema indicato troviamo $\lambda = -5$, $\tau = 2$.
L'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -5$ è il nucleo della matrice

$$A + 5I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

ovvero è lo spazio delle soluzioni dell'equazione $2x - 3y - z = 0$ (le tre righe della matrice indicata sono chiaramente proporzionali tra loro, quindi il sistema omogeneo associato si riduce ad una sola equazione). Risolvendo questa equazione troviamo una base dell'autospazio V_{-5} : si ha $\mathcal{B}_{V_{-5}} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Questo significa che V_{-5} ha dimensione 2 (quindi, per definizione di molteplicità geometrica, la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = -5$ vale 2.

Se la matrice A è diagonalizzabile, anche la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = -5$ deve essere uguale a 2 nonché la somma degli autovalori deve essere uguale a -24 (che è la traccia della matrice A). In questo caso c'è un altro autovalore, che indicheremo con μ, ed è dato dall'equazione $-24 = -5 - 5 + \mu$, dalla quale troviamo $\mu = -14$, quindi -14 avrà molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1 e -5 avrà effettivamente molteplicità algebrica uguale a 2 (la somma delle molteplicità, di quelle algebriche come pure di quelle geometriche, non può superare 3). In questo caso l'autospazio V_{-14} associato all'autovalore $\mu = -14$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $(A + 14I)\vec{x} = \vec{0}$, ovvero è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale sistema lineare ammette infinite soluzioni, questo conferma che -14 è effettivamente un autovalore e che la situazione è quella descritta.

Risolvendo tale sistema troviamo che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dell'autospazio V_{-14}.

Infine, C e Δ sono rispettivamente la matrice di una base di autovettori e la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori: $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$. □

Esercizio. Per ognuna delle matrici che seguono, determinare gli autovalori e calcolarne le relative molteplicità algebriche e geometriche. Osservare che nessuna soddisfa la proprietà *iii*) del Corollario 15.17, quindi dedurre che sono tutte matrici **non** diagonalizzabili.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{(sapendo che } -2 \text{ è un autovalore)}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Sia V lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 93 e sia $D : V \longrightarrow V$ la funzione derivata. Determinare tutti gli autovalori di D e, per ognuno di essi, una base del corrispondente autospazio (cfr. esempio 14.3).

Soluzione. Lavorare con un sistema di coordinate (cfr. esempio 14.3) vorrebbe dire cercare autovalori ed autospazi di una matrice 94×94!
...percorriamo una strada diversa: usiamo direttamente le definizioni.
Il polinomio $p(x)$ è un autovettore se e solo se risulta $Dp(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Sappiamo che il grado di $Dp(x)$ è minore del grado di $p(x)$, quindi non potrà esserne un multiplo non nullo. In altri termini, nessun valore diverso da 0 può essere un autovalore. L'equazione $Dp(x) = 0$ è soddisfatta solamente dai polinomi costanti. In definitiva: $\lambda = 0$ è l'unico autovalore e l'insieme $\{1\}$ è una base del corrispondente autospazio.

$\square$

Concludiamo il paragrafo vedendo come la "geometria" può essere utilizzata per risolvere un problema algebrico: quello di calcolare la potenza n-esima A^n di una matrice A.

Sia $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ una matrice. Vista la natura del prodotto righe per colonne il calcolo di A^n risulta difficile per n grande o arbitrario. Esiste però un metodo che sostanzialmente riduce il problema a quello di trovare una matrice "semplice" coniugata ad A. L'idea è quella di considerare A come trasformazione lineare di $\mathbb{R}^k$, scriverla rispetto ad una base conveniente quindi passare alla composizione con se stessa n-volte ed infine passare alla matrice che rappresenta quest'ultima rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^k$. Nell'esercizio svolto 15.20 vediamo come calcolare la potenza A^n di una matrice diagonalizzabile A. Prima di procedere deve essere ben chiaro quanto segue:

i) **non** esistono formule generali per la potenza n-esima A^n;
ii) se Δ è una matrice diagonale il calcolo di Δ^n è immediato (esercizio 15.19).

Esercizio 15.19. Verificare che la potenza Δ^n di una matrice diagonale Δ è la la matrice (sempre diagonale) delle potenze $n^{\text{-esime}}$ degli elementi di Δ.

Si osservi alla luce dell'osservazione 13.18 non potrebbe essere diversamente: indicando con m l'ordine di Δ ed interpretandola come trasformazione di $\mathbb{R}^m$, cioè considerando L_Δ come nella Def. 12.5), la formula (12.18) ci dice che la potenza Δ^n corrisponde (cfr. Prop. 12.16) alla composizione $L_\Delta \circ ... \circ L_\Delta$ (n-volte). D'altro canto, sempre per l'osservazione 13.18, la base canonica di $\mathbb{R}^m$ è una base di autovettori della composizione in questione (come lo è per la trasformazione L_Δ stessa) ed i corrispondenti autovalori sono le potenze n-esime di quelli di L_Δ.

Esercizio 15.20. Sia $A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{80}.

Soluzione. Naturalmente potremmo armarci di pazienza e svolgere semplicemente il prodotto di A per se stessa 80 volte. No, percorriamo un'altra strada: consideriamo la trasformazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e ne troviamo le direzioni privilegiate, utilizzando queste calcoliamo la composizione $L_A \circ ... \circ L_A$ (80-volte), infine scriviamo la matrice rappresentativa di questa composizione.

Il polinomio caratteristico della trasformazione L_A è il polinomio

$$\det \begin{pmatrix} 11-\lambda & 6 \\ -18 & -10-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

quindi gli autovalori di L_A sono i valori $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$. I corrispondenti autospazi sono

$$V_2 \;=\; \ker(A-2I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -18 & -12 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\}\ ;$$

$$V_{-1} \;=\; \ker(A+I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}\ .$$

Rispetto alla base di autovettori $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ la trasformazione L_A è rappresentata dalla matrice diagonale degli autovalori $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la composizione $L_A \circ ... \circ L_A$ (80-volte) è rappresentata (sempre rispetto alla base di autovettori) dalla matrice $\Delta^{80} = \begin{pmatrix} 2^{80} & 0 \\ 0 & (-1)^{80} \end{pmatrix}$ (vedi esercizio 15.19).
A questo punto, effettuando un cambiamento di base troviamo la matrice che rappresenta $L_A \circ ... \circ L_A$ (80-volte) rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ (tale matrice è A^{80}):

$$A^{80} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{80} & 0 \\ 0 & (-1)^{80} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 2^{82}-3 & 2^{81}-2 \\ -3\cdot 2^{81}+6 & -3\cdot 2^{80}+4 \end{pmatrix}$$

$\square$

Non abbiamo voluto dirlo prima... ma da un punto di vista algebrico quello che abbiamo fatto è assolutamente elementare: diagonalizzando A si trova $\Delta = B^{-1}\cdot A\cdot B$, dove $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice di una base di autovettori, $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori. Quindi,

$$A \;=\; B\cdot\Delta\cdot B^{-1}\ ,$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Dall'equazione $A = B\cdot\Delta\cdot B^{-1}$ ricaviamo A^{80} :

$$\begin{aligned} A^{80} &= \left(B\cdot\Delta\cdot B^{-1}\right)^{80} \;=\; B\cdot\Delta\cdot\cancel{B}^{-1}\cdot\cancel{B}\cdot\Delta\cdot\cancel{B}^{-1}\cdot\cancel{B}\cdot\Delta\cdot\cancel{B}^{-1}\cdot ...\cdot\cancel{B}\cdot\Delta\cdot B^{-1} \\ &= B\cdot\Delta^{80}\cdot B^{-1} \end{aligned}$$

(il vantaggio è che, essendo Δ una matrice diagonale, la potenza Δ^{80} la sappiamo calcolare: basta elevare alla 80 gli elementi sulla diagonale).

§16. Approfondimenti.

Sostanzialmente, questo paragrafo completa i paragrafi precedenti. Qui raccogliamo alcune generalizzazioni e alcune osservazioni riguardanti gli argomenti trattati finora che per una qualche ragione non abbiamo voluto inserire prima. I motivi di una tale scelta possono essere diversi, i risultati che abbiamo scelto di rimandare a questo paragrafo possono essere di diverso tipo: più avanzati; che collegano e mettono insieme argomenti diversi; marginali sebbene interessanti; strumentali sebbene non indispensabili; piuttosto tecnici, il cui inserimento avrebbe inutilmente appesantito il discorso o semplicemente distolto l'attenzione da quello che si stava facendo; risultati che sebbene comprensibili anche a uno stadio precedente della trattazione non sarebbero stati apprezzati nella misura adeguata. Naturalmente la lettura di questo paragrafo richiede da parte dello studente uno sforzo maggiore!

Iniziamo col discutere alcuni risultati sulle permutazioni, risultati strumentali ad una trattazione più approfondita di quelli che sono gli aspetti algebrici del determinante.

Sulle permutazioni.

Definizione 16.1. Sia I un insieme. Una *permutazione* di I è una funzione biunivoca

$$\sigma : \quad I \longrightarrow I$$

Il nome "permutazione" viene dal fatto che posso pensare che gli elementi del mio insieme abbiano una posizione e che io li stia spostando, o meglio, permutando (porto l'elemento i nel posto che era occupato da $\sigma(i)$, la biunivocità mi garantisce "un posto a disposizione" per ogni elemento).

Fissati $a, b \in I$, la permutazione di I definita da $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$ e che lascia invariati tutti gli altri elementi di I si chiama *scambio*. Tale scambio lo denoto con $\sigma_{a,\,b}$.

Ogni permutazione di un insieme finito può essere ottenuta effettuando un certo numero di scambi, ovvero può essere scritta come composizione di scambi. Il numero di scambi che intervengono in una tale scrittura non è ben definito, ma il suo essere pari o dispari lo è. Questo fatto, che dimostro tra poco, permette di dare la definizione che segue.

Definizione 16.2. Data una permutazione σ di un insieme finito I si definisce il suo segno $\epsilon(\sigma)$ ponendo $\epsilon(\sigma) = 1$ se σ è ottenibile come composizione di scambi in numero pari, $\epsilon(\sigma) = -1$ se σ è ottenibile come composizione di scambi in numero dispari.

Ad esempio, dati $a, b, c \in I$, abbiamo $\sigma_{a,\,b} = \sigma_{b,\,c} \circ \sigma_{a,\,b} \circ \sigma_{a,\,c}$, dove "$\circ$" denota la composizione di funzioni. Notiamo che abbiamo scritto uno scambio come composizione di tre scambi.

Un corollario interessante, e che ci servirà, del fatto che il segno di una permutazione è ben definito è il seguente:

Corollario 16.4 Dato un insieme, ogni scambio può essere scritto esclusivamente come composizione di un numero dispari di scambi.

Faccio notare che, tornando a considerare insiemi i cui elementi occupano una posizione e assumendo di numerare queste posizioni, si ha che la permutazione che scambia due elementi scelti in modo arbitrario può essere scritta utilizzando un solo scambio e, essendo 1 dispari, esclusivamente come composizione di un numero dispari di scambi, e quindi, a maggior ragione, esclusivamente come composizione di un numero dispari di scambi di elementi adiacenti. ...tanto per fissare le idee e passare a quello che ci interessa:

Esercizio 16.5. Data una matrice, scrivete lo scambio della prima riga con la quarta come composizione di 5 scambi di righe adiacenti (con meno è impossibile); scrivete lo scambio della prima riga con la quinta come composizione di 7 scambi di righe adiacenti (con meno è impossibile).

Dimostrazione (del fatto che il segno di una permutazione è ben definito). L'inversa di $\sigma_{a,\,b}$ è sempre $\sigma_{a,\,b}$, quindi l'inversa di una composizione di scambi è la composizione degli stessi scambi ordinati a partire dall'ultimo. Quindi, se due composizioni di scambi $s_1 \circ ... \circ s_k$ e $r_1 \circ ... \circ r_h$ producono la stessa permutazione σ, possiamo scrivere la permutazione identica nella forma $\sigma \circ \sigma^{-1} = s_1 \circ ... \circ s_k \circ r_h \circ ... \circ r_1$. Di conseguenza, sarà sufficiente dimostrare che la trasformazione identica può essere scritta esclusivamente come composizione di un numero pari di scambi (infatti, $k+h$ è pari se e solo se k ed h sono entrambi pari oppure entrambi dispari). Ora, ragioniamo per induzione sul numero di elementi dell'insieme I. Sia dunque $I = \{a,\, 1,\, 2,\, ...,\, n\}$ e sia $t_1 \circ ... \circ t_m$ una composizione di scambi uguale alla permutazione identica di I. Dobbiamo provare che m è pari. Definiamo $J = \{1,\, 2,\, ...,\, n\}$ e fissiamo un ordine per il posto occupato dagli elementi di I. Ad ogni t_i associamo la permutazione p_i di J indotta sull'ordine dei suoi elementi, ad esempio se $t_i = (\mathbf{3},\, 4,\, 2,\, \mathbf{a},\, 1,\, 5) \mapsto (\mathbf{a},\, 4,\, 2,\, \mathbf{3},\, 1,\, 5)$ allora $p_i = (3,\, 4,\, 2,\, 1,\, 5) \mapsto (4,\, 2,\, 3,\, 1,\, 5)$. Osserviamo che p_i non è necessariamente uno scambio. Posto $\ell_i =$ "lunghezza del salto di posizione di a", p_i è uno scambio se $\ell_i = 0$, i.e. t_i non coinvolge l'elemento a, e si può scrivere come composizione di $\ell_i - 1$ scambi se $\ell_i \geq 1$ (t_i coinvolge a). Poiché ogni elemento di I dopo la sua passeggiata torna nella sua posizione iniziale abbiamo che $\sum \ell_i$ è pari nonché la composizione delle p_i è l'identità. A questo punto abbiamo concluso: posto $\alpha_i = 1$ se $\ell_i = 0$ e posto $\alpha_i = \ell_i - 1$ se $\ell_i \neq 0$, abbiamo che $m = \sum_{i=1}^{m} 1$ è pari se e solo se $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ è pari. D'altro canto, quest'ultimo numero è uguale al numero di scambi di una scrittura della permutazione identica di J, numero che, essendo J un insieme che ha meno elementi di I, è necessariamente pari per l'ipotesi induttiva. □

Sugli aspetti algebrici del determinante.

Sia $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata di ordine n. Dalla (5.2′) si evince che $\det A$ è un polinomio negli $a_{i,j}$. Affermo che i monomi che lo costituiscono sono, a meno del segno, tutti i prodotti di n elementi della matrice che stanno sia su righe che su colonne distinte. Questa affermazione segue di nuovo dalla (5.2′). Ragioniamo per induzione: premesso che quanto affermato è banalmente vero per le matrici 1×1, visto che nella (5.2′) il termine $a_{1,j}$ si scontra con $\det C_{1,j}$ (per ogni $i,\, j$), essendo $C_{1,j}$ la matrice ottenuta cancellando proprio la riga e la colonna corrispondente a $a_{1,j}$, questo termine non può scontrarsi con termini che stanno sulla sua stessa riga o colonna. D'altro canto anche nei monomi di $\det C_{1,j}$ non possono esserci due termini che stanno sulla stessa riga o colonna (questa volta per l'ipotesi induttiva). Quindi, di fatto, in ogni $a_{1,j} \cdot \det C_{1,j}$ non ci sono prodotti con due elementi sulla stessa riga o colonna. Inoltre, come già osservato, $\det A$ è un polinomio costituito da $n!$ monomi (di grado n) ed i monomi di grado n che si possono scrivere considerando prodotti di elementi che stanno su righe e colonne distinte sono esattamente[10] in numero uguale ad $n!$ (n fattoriale). Di conseguenza, necessariamente, $\det A$ deve contenerli tutti.

Con un pizzico di lavoro in più, che a questo punto però ce lo risparmiamo per non appesantire il discorso, non è difficile comprendere anche quali sono i segni davanti a tali monomi e in definitiva provare la prossima proposizione.

---

[10] Questa affermazione segue dalla teoria delle permutazioni. Infatti, le scelte di n elementi su righe e colonne distinte si ottengono scegliendo un elemento da ogni colonna, ovvero una riga per ogni colonna, senza però poter scegliere due volte la stessa riga. Considerando la prima colonna abbiamo n scelte a disposizione, considerando la seconda colonna ne abbiamo $n-1$, considerando la terza colonna ne abbiamo $n-2$ e così via. In definitiva abbiamo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ scelte a disposizione. Notiamo che tali scelte sono sequenze $\{i_1,\, ...,\, i_n\}$ (essendo i_j la riga scelta per la colonna j), trattandosi di sequenze senza ripetizioni corrispondono alle permutazioni dell'insieme $\{1,\, ...,\, n\}$.

Proposizione 16.6. *Si abbia* $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Si ha*

$$\det(A) \quad = \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \ , \tag{16.6$'$}$$

dove $\mathcal{S}_n$ *è l'insieme delle permutazioni dei primi* n *interi* $\{1, ..., n\}$, *e dove* $\epsilon(\sigma)$ *è il segno della permutazione* σ.

Lo studente non si deve spaventare perché non dovrà mai impelagarsi con il formalismo di questa formula. Il motivo per cui abbiamo voluto enunciarla è per ribadire lo straordinario "ordine" della funzione determinante. In particolare, per ribadire, usando il linguaggio di una formula, la (16.6′) appunto, il fatto già menzionato che il determinante è il polinomio (omogeneo, di grado n) nelle variabili $a_{i,j}$ i cui monomi che lo costituiscono sono (a meno del segno) i prodotti di n elementi della matrice che stanno sia su righe che su colonne distinte.

Un altro vantaggio della (16.6′) è che è possibile ricondurvi entrambe le formule nella (5.4′). Infatti, fissato un valore di k entrambe le espressioni nella (5.4′), così come la (5.2′) e per gli stessi motivi, si vedano le considerazioni che precedono la Proposizione 16.6, coincidono con la (16.6′) a meno dei segni davanti i vari monomi. Ragionando per induzione non è difficile verificare che anche i segni sono gli stessi.

Quanto detto dimostra la Proposizione 5.4: il determinante di una matrice può essere calcolato mediante lo sviluppo di Laplace rispetto a una qualsiasi riga o colonna.

Ora passiamo ad un altro aspetto della funzione determinante. L'antisimmetria e la multilinearità (Lemmi 5.7 e 5.8), insieme al fatto che il determinante della matrice identica vale 1, oltre ad essere proprietà importanti ed utili hanno il pregio di caratterizzare il determinante, più precisamente vale la proposizione che segue.

Proposizione 16.7. *Esiste una unica funzione* F *definita su* $M_{n,n}(\mathbb{R})$ *tale che*

i) F *è multilineare rispetto alle righe di* $M_{n,n}(\mathbb{R})$;

ii) F *è antisimmetrica rispetto alle righe di* $M_{n,n}(\mathbb{R})$;

iii) $F(I_n) = 1$, *dove* I_n *è la matrice identica.*

Tale funzione è la funzione determinante.

Dimostrazione. Per quel che riguarda l'esistenza di una tale F è stato già detto tutto: la funzione determinante soddisfa *i*), *ii*) e *iii*).
L'unicità segue dal fatto che è possibile calcolare il determinante di una matrice qualsiasi utilizzando unicamente le proprietà *i*), *ii*) e *iii*). Vediamo come: sia dunque A una matrice e sia F una funzione che soddisfa le proprietà *i*), *ii*) e *iii*). In particolare, le varie proprietà che sono soddisfatte dalla funzione F ci dicono come cambia $F(A)$ quando effettuiamo uno dei passi dell'eliminazione di Gauss (2.1). A questo punto l'osservazione che conclude la dimostrazione è il fatto che tramite i passi dell'eliminazione di Gauss (2.1) è possibile trasformare qualsiasi matrice in una matrice che ha una riga di zeri oppure nella matrice identica. Nel primo caso si ha $F(A) = 0$ (segue dalla multilinearità, il ragionamento è quello fatto quando abbiamo dimostrato la 5.11.*d*). Nel secondo caso siamo ugualmente in grado di dire quanto vale $F(A)$: basta che ci ricordiamo delle costanti (non nulle) che avremo fatto intervenire nell'applicare l'E.G. che trasforma A nella matrice identica e del numero degli eventuali scambi di righe effettuati. Si osservi che usiamo l'ipotesi $F(I_n) = 1$. Poiché in entrambi (tutti) i casi siamo stati capaci di calcolare $F(A)$ utilizzando solo le proprietà che avevamo a disposizione, F è unica. □

Come applicazione dei risultati visti, vediamo due dimostrazioni del teorema di Binet. Una premessa: alla fine del paragrafo § 5 abbiamo osservato che come conseguenza del teorema di Binet il determinante di una matrice invertibile non può annullarsi. Tuttavia questo risultato non lo abbiamo utilizzato. Dunque, siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici. Si vuole dimostrare che $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Dimostrazione #1 (del teorema di Binet). Distinguiamo due possibilità:
Caso i): $\det A = 0$. Per l'osservazione (5.12), le righe di A sono dipendenti. Lo stesso accade per il prodotto $A \cdot B$, che avrà anch'esso determinante nullo di nuovo per la (5.12).
Caso ii): $\det A \neq 0$. Nel paragrafo § 3 abbiamo introdotto le matrici elementari ed abbiamo osservato che le moltiplicazioni a sinistra per le matrici elementari sono equivalenti ai passi dell'E.G.. D'altro canto sappiamo che tramite l'E.G. possiamo trasformare A nella matrice identica, questo significa che è possibile scrivere $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_h$, dove le E_i sono matrici elementari. Quindi per ragioni induttive è sufficiente dimostrare che $\det(E \cdot B) = \det E \cdot \det B$, essendo E una matrice elementare. L'espressione $\det E \cdot \det B$ è facile da calcolare: i determinanti delle matrici elementari di tipo i), ii) e iii) (cfr. def. 3.16) valgono rispettivamente λ, 1 e -1. D'altro canto la moltiplicazione per una matrice elementare E, ora vista come operazione su B, è un passo dell'E.G., e le affermazioni (5.11 a), (5.11 b) e (5.11 c) ci dicono che il termine $\det(E \cdot B)$ vale quanto desiderato. Questo conclude la dimostrazione. □

Nota: non abbiamo voluto appesantire la dimostrazione ma, ad essere precisi, scrivere $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_h$ richiede un minimo di lavoro: la Proposizione 2.1 ci dice che possiamo scrivere $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_j \cdot T$, dove le E_i sono matrici elementari e T è una matrice a scala, quindi (trattandosi di una matrice quadrata) triangolare. D'altro canto, poiché $\det A \neq 0$ per ipotesi, T è una matrice triangolare senza zeri sulla diagonale e, sempre con i passi dell'E.G., può essere trasformata nell'identità così come abbiamo fatto nell'esempio 6.3.

Dimostrazione #2 (del teorema di Binet). Il caso in cui $\det B = 0$ lo trattiamo come nella dimostrazione precedente (una colonna di $A \cdot B$ sarà **c.l.** delle altre, quindi il determinante del prodotto $A \cdot B$ sarà nullo). Assumendo $\det B \neq 0$, consideriamo la funzione

$$F(M) \quad := \quad \frac{\det(M \cdot B)}{\det B} .$$

Per la Proposizione 16.7 è sufficiente provare che questa funzione soddisfa le proprietà i), ii) e iii) ivi indicate. La iii) è ovvia; la ii) segue dal fatto che scambiare due righe di M equivale a scambiare due righe del prodotto $M \cdot B$; la i) vale per un motivo analogo: se fissiamo tutti gli elementi di M eccetto quelli sulla j^{-esima} riga, che indicherò con $\vec{r}$, la funzione $\vec{r} \mapsto$ "j^{-esima} riga di $M \cdot B$" è lineare. □

Sull'inversa di una matrice.

Nel paragrafo §4 abbiamo enunciato la seguente proposizione (Proposizione 4.3).

Proposizione. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Si ha che $A \cdot B = I_n$ se e solo se $B \cdot A = I_n$. L'inversa di una matrice, se esiste, è unica.*

Ora la dimostriamo utilizzando solamente gli strumenti che avevamo a disposizione a quel punto della trattazione.

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che, potendo scambiare i ruoli di A e B, è sufficiente dimostrare che se $A \cdot B = I_n$ allora $B \cdot A = I_n$. Questo segue da tre affermazioni:

i) se $A \cdot B = I_n$, allora $B \cdot A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ per ogni $\vec{w}$ del tipo $\vec{w} = B \cdot \vec{x}$;

ii) ogni elemento $\vec{w} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ è del tipo indicato;

iii) se $X \cdot \vec{w} = \vec{w}$ per ogni $\vec{w}$ allora X è la matrice identica I_n.

La i) è facile: si ha $B \cdot A \cdot (B \cdot \vec{x}) = B \cdot (A \cdot B) \cdot \vec{x} = B \cdot I_n \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{x}$.

La $ii)$ è più sottile: si deve dimostrare che, per ogni $\vec{w} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, il sistema lineare $B \cdot \vec{x} = \vec{w}$ è necessariamente compatibile. Ora, immaginiamo di effettuare la riduzione a scala di B. Se per assurdo il sistema in questione è incompatibile, la riduzione a scala di B (matrice incompleta associata al sistema) deve produrre una riga di zeri. D'altro canto B è quadrata, quindi avendo una riga di zeri ha meno di n pivot, quindi le soluzioni del sistema omogeneo $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ dipendono da almeno un parametro libero. Ma questo è assurdo perché il sistema $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ammette al più una sola soluzione, infatti $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ implica $\vec{x} = A \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (abbiamo moltiplicato a sinistra per A e usato l'ipotesi $A \cdot B = I_n$).

Infine, la $iii)$ è ovvia. □

Ora rileggiamo il tutto in termini di applicazioni lineari. Interpretiamo A e B come trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$, dunque consideriamo

$$L_A : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \qquad\qquad L_B : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

(cfr. Definizione 12.5). La condizione $A \cdot B = I_n$ si traduce nella condizione che la composizione $L_A \circ L_B$ è l'applicazione identica. La proposizione, oltre a valere per $\mathbb{R}^n$, continua a valere per spazi vettoriali dei quali $\mathbb{R}^n$ ne è un modello (cioè per gli spazi vettoriali finitamente generati, che sono gli unici che abbiamo studiato):

Proposizione 16.8. *Siano T ed S due trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Indichiamo con $\mathcal{I} : V \to V$ l'identità. Si ha che*

$$T \circ S = \mathcal{I} \qquad \text{se e solo se} \qquad S \circ T = \mathcal{I} .$$

Anche la dimostrazione di questa proposizione è una rilettura della dimostrazione vista sopra. Si osservi che $i')$, $ii')$ e $iii')$ sono la traduzione di $i)$, $ii)$ e $iii)$.

Dimostrazione. Potendo scambiare i ruoli di T ed S, è sufficiente dimostrare che se $T \circ S = \mathcal{I}$ allora $S \circ T = \mathcal{I}$. Questo segue da tre affermazioni:

$i')$ se $T \circ S = \mathcal{I}$ allora la restrizione di $S \circ T$ all'immagine di S è l'identità;

$ii')$ S è suriettiva;

$iii')$ se $\big(S \circ T\big)(\vec{v}) = \vec{v}$ per ogni $\vec{v} \in V$, allora $S \circ T = \mathcal{I}$.

La $i')$ è facile: se $\vec{u}$ appartiene all'immagine di S, e.g. $\vec{u} = S(\vec{v})$, si ha

$$(S \circ T)(\vec{u}) = \big(S \circ T\big)(S(\vec{v})) = S\big((T \circ S)(\vec{v})\big) = S\big(\mathcal{I}(\vec{v})\big) = S(\vec{v}) = \vec{u} .$$

La $ii')$ è più sottile: essendo $T \circ S$ l'identità, abbiamo che S è iniettiva (se per assurdo esistesse $\vec{v} \neq \vec{0}$ tale che $S(\vec{v}) = \vec{0}$ si avrebbe anche $\vec{v} = \mathcal{I}(\vec{v}) = T(S(\vec{v})) = \vec{0}$). Poiché S è iniettiva, deve essere necessariamente anche suriettiva (vedi l'osservazione a pagina 48).

La $iii')$ è una tautologia. □

Abbiamo sempre lavorato con spazi vettoriali di dimensione finita (ovvero finitamente generati). Enunciando la Proposizione 16.8 abbiamo voluto sottolineare questa ipotesi perché nel caso degli spazi vettoriali di dimensione infinita la tesi della proposizione è falsa. In effetti, in dimensione infinita $i')$ e $iii')$ continuano a valere (e le dimostrazioni non cambiano). Ma la $ii')$ non vale più, si può solamente dire che S è iniettiva e T è suriettiva. In dimensione infinita "l'invertibilità a destra" non implica "l'invertibilità a sinistra". E non è difficile fornire un controesempio: sia V lo spazio vettoriale di tutti i polinomi, $T : V \to V$ la trasformazione che al polinomio $p(x)$ associa la sua derivata, sia inoltre $S : V \to V$ la trasformazione che al polinomio $p(x)$ associa l'integrale $\int_0^x p(\cdot)$ (che è anch'esso un polinomio). Le trasformazioni T ed S sono entrambe lineari (per esercizio, lo si verifichi). Si ha $T \circ S = \mathcal{I}$ (se prima integro e poi derivo ritrovo il polinomio dal quale ero partito), ma la composizione $S \circ T$ fa fuori le costanti, infatti $S \circ T$ è l'applicazione che al polinomio $p(x)$ associa il polinomio $p(x) - p(0)$ (questo è facile, verificatelo!).

Vale la pena osservare che questo discorso appartiene a un contesto più ampio, quello dell'insiemistica: siamo A e B due insiemi e siamo $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni. Supponiamo che la composizione $g \circ f$ sia l'identità su A. Allora:

- f è iniettiva;
- g è suriettiva;
- la restrizione della composizione $f \circ g$ all'immagine di f è l'identità.

Se inoltre B è un insieme finito[11] di cardinalità non superiore a quella di A, allora f e g sono entrambe biunivoche nonché sono l'una l'inversa dell'altra, in particolare $f \circ g$ è l'identità su B.

Esercizio. Dimostrare le affermazioni precedenti (un po' di insiemistica non fa mai male).

Nel § 6 abbiamo visto che (Teorema 6.1) una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$ e che, se A è invertibile, si ha

$$(\star) \qquad \left(A^{-1}\right)_{i,j} \quad = \quad (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} \,,$$

dove $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la $j^{\text{-esima}}$ riga e la $i^{\text{-esima}}$ colonna. Ora dimostriamo quanto affermato.

Dimostrazione. Come già osservato nel §6, il non annullarsi del determinante è una condizione necessaria per l'invertibilità di A. Quindi, sarà sufficiente dimostrare che il prodotto di A per la matrice indicata in $(\star)$ è la matrice identica. Verifichiamo quindi che $A \cdot X = I_n$, essendo X la matrice $X_{i,\,j} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A}$. L'elemento di posto $i,\, j$ della matrice in questione è

$$\begin{aligned}
\big(A \cdot X\big)_{i,\,j} \quad &= \quad \sum_{t=1}^{n} A_{i,\,t} \cdot X_{t,\,j} \quad = \quad \sum_{t=1}^{n} A_{i,\,t} \cdot \left((-1)^{t+j} \cdot \frac{\det C_{j,t}}{\det A} \right) \\
&= \quad \frac{1}{\det A} \sum_{t=1}^{n} A_{i,\,t} \cdot \big((-1)^{t+j} \cdot \det C_{j,t} \big)
\end{aligned}$$

Ora, guardando meglio l'espressione trovata ci accorgiamo che questa ha la faccia uno sviluppo di Laplace, più precisamente, sotto il segno di sommatoria c'è lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice ottenuta sostituendo la j^{esima} riga di A con la i^{esima} riga di A!!! Quindi,

se $j = i$ si ottiene $\frac{\det A}{\det A} = 1$; **se** $j \neq i$ si ottiene[12] $\frac{0}{\det A} = 0$.

...questa non è altro che la definizione della matrice identica! $\square$

---

[11] L'ipotesi di finitezza è necessaria, non basterebbe neanche supporre $B = A$. Riflettete sull'esempio $A = B = \mathbb{Z}$ (l'insieme dei numeri interi), $f(x) = 2x$, $g(x) = x/2$ se x è pari, $g(x) = 0$ se x è dispari.

[12] Viene 0 perché si tratta dello sviluppo del determinante di una matrice che ha due righe uguali.

Sull'indipendenza lineare degli autospazi.

Nel paragrafo §13 abbiamo affermato che

"*autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti*"

(cfr. Teorema 13.9). Ora dimostriamo quanto affermato.

Dimostrazione. Effettuiamo una dimostrazione per induzione sul numero degli autospazi in questione. Siano dunque $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ autovettori corrispondenti ad autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distinti. Assumiamo $k \geq 2$ (per $k = 1$ la tesi è banale) e che ogni insieme costituito da $k-1$ autovettori è un insieme indipendente di vettori (ipotesi induttiva). Si vuole dimostrare che $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ sono indipendenti. Ragioniamo per assurdo, supponiamo che esista una relazione non banale di coefficienti **tutti** non nulli (altrimenti abbiamo anche una relazione non banale tra meno di k autovettori e questo contraddice l'ipotesi induttiva)

$$(\star) \qquad c_1\vec{v}_1 + ... + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Poiché $T(c_1\vec{v}_1 + ... + c_k\vec{v}_k) = \lambda_1 c_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k c_k\vec{v}_k$, si ha anche

$$(\star') \qquad \lambda_1 c_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Sottraendo alla relazione $(\star')$ la relazione $(\star)$ moltiplicata per λ_k troviamo

$$(\lambda_1 - \lambda_k)c_1\vec{v}_1 + ... + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1}\vec{v}_{k-1} = \vec{0}$$

Essendo i λ_i distinti ed essendo i c_i non nulli, anche i prodotti $(\lambda_i - \lambda_k)c_i$ (per $i < k$) sono non nulli. In particolare si ha una relazione non banale tra i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}$. Questo contraddice il fatto che per ipotesi induttiva tali vettori sono indipendenti. $\square$

Esercizio 16.9. Sia V uno spazio vettoriale e siano $W_1, ..., W_k$ sottospazi di V. Dimostrare che i sottospazi $W_1, ..., W_k$ sono indipendenti (secondo la definizione data nell'inciso 13.10) se e solo se vale l'uguaglianza che segue

$$\dim\left(W_1 + ... + W_k\right) = \dim W_1 + ... + \dim W_k ,$$

dove $W_1 + ... + W_k$ è lo spazio somma (cfr. Definizione 10.1):

$$W_1 + ... + W_k := \left\{ \vec{w}_1 + ... + \vec{w}_k \,\middle|\, \vec{w}_i \in W_i \right\} \subseteq V .$$

Si noti che alcuni dei sottospazi W_i possono anche essere di dimensione zero, cioè costituiti solamente dal vettore nullo (rileggete con attenzione la definizione citata).

Sulla disuguaglianza $\mu_g(\alpha) \leq \mu_a(\alpha)$.

Come promesso nel §13, dimostriamo il Teorema 13.17. Stabiliamo una premessa.

La definizione di molteplicità algebrica di un autovalore (cfr. Definizione 13.16), è stata data per le trasformazioni di $\mathbb{R}^n$, ma alla luce dell'osservazione 15.16 è chiaro che si estende alle trasformazioni di uno spazio vettoriale astratto: data una trasformazione lineare T di uno spazio vettoriale astratto V, scriviamo la matrice rappresentativa di T rispetto a una base qualsiasi di V, quindi definiamo la molteplicità algebrica di un autovalore ponendola uguale alla sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico. Come dicevo, per l'osservazione 15.16, il polinomio caratteristico, e a maggior ragione la molteplicità in questione, **non** dipende dalla base di V che abbiamo scelto per scrivere la matrice rappresentativa di T. Naturalmente, anche la definizione di molteplicità geometrica si estende al caso di una trasformazione di uno spazio vettoriale astratto: la molteplicità geometrica di un autovalore è la dimensione del corrispondente autospazio.

Sia dunque V uno spazio vettoriale di dimensione n, sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare e sia α un autovalore. Si vuole dimostrare la disuguaglianza che segue (Teorema 13.17):

$$\mu_g(\alpha) \quad \leq \quad \mu_a(\alpha) \; .$$

Dimostrazione. Posto $d = \mu_g(\alpha)$, sia $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_d\}$ una base dell'autospazio V_α e sia

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_d, \vec{b}_{d+1}, ..., \vec{b}_n\}$$

un completamento di tale base a una base di V. Affermiamo che, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la trasformazione T è rappresentata da una matrice del tipo

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \star & \dots & \star \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix} ,$$

dove gli asterischi indicano numeri che non conosciamo e dove il blocco in alto a sinistra, quello dove appare α lungo la diagonale principale, è una matrice quadrata $d \times d$ (sotto questo blocco ci sono tutti zeri, le ultime $n-d$ colonne di A non le conosciamo). L'affermazione fatta si giustifica facilmente ricordando che nelle colonne di A troviamo le coordinate delle immagini dei vettori della base: nella prima colonna di A ci sono le coordinate di $T(\vec{v}_1) = \alpha \vec{v}_1$, eccetera.
A questo punto è chiaro che il polinomio caratteristico di A, è un polinomio del tipo indicato nella formula che segue:

$$\det\bigl(A - \lambda I\bigr) \quad = \quad \underbrace{(\alpha-\lambda)\cdot \ldots \cdot(\alpha-\lambda)}_{d \text{ volte}} \cdot q(\lambda) \; ,$$

dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado $n-d$ (del quale non sappiamo dire nulla). Questo ci garantisce che la molteplicità algebrica dell'autovalore α è maggiore o uguale a d. $\square$

Sulle applicazioni lineari e sull'uso delle matrici.

Siano V e W spazi vettoriali e sia $T : V \to W$ una applicazione lineare. Sia inoltre A la matrice rappresentativa di T relativa alle basi $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ di V e $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ di W. In termini delle coordinate associate a tali basi, il fatto che A rappresenta T, per definizione, significa che T è caratterizzata dalla proprietà che segue

La legge che alle coordinate di un vettore $\vec{v}$ associa le coordinate della sua immagine $T(\vec{v})$ è la moltiplicazione per la matrice A

(si osservi che, conseguentemente, le coordinate dell'immagine del vettore v_i sono scritte nella $i^{\text{-esima}}$ colonna di A).

Apriamo una breve parentesi per introdurre una nuova notazione. Il vettore $\vec{v} \in V$ di coordinate $\lambda_1, ..., \lambda_n$ e il vettore $\vec{w} \in W$ di coordinate $\beta_1, ..., \beta_m$, per definizione, sono rispettivamente i vettori

$$\vec{v} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \quad , \qquad \vec{w} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{w}_i \tag{16.10}$$

Queste espressioni la scriviamo utilizzando il formalismo del prodotto "righe per colonne" (capisco che possa dare fastidio scrivere una matrice i cui elementi sono vettori... ma qual è il problema! si tratta semplicemente di una notazione che mi consente di evitare di scrivere fastidiose sommatorie):

$$\vec{v} \;=\; \underline{v} \cdot \vec{\lambda} \quad , \qquad \vec{w} \;=\; \underline{w} \cdot \vec{\beta} \,, \tag{16.11}$$

dove abbiamo posto

$$\underline{v} := (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \,, \qquad \vec{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} , \qquad \underline{w} := (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m) \,, \qquad \vec{\beta} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} ,$$

e dove tutti i prodotti sono prodotti "righe per colonne". Lo ripetiamo: $\underline{v} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ e $\underline{w} = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ sono matrici *vettoriali* (risp. $1 \times n$ ed $1 \times m$), mentre $\vec{\lambda}$ e $\vec{\beta}$ sono matrici numeriche (risp. $n \times 1$ ed $m \times 1$).

Ora, per definizione di matrice rappresentativa, il fatto che A rappresenta T si traduce dicendo che le coordinate del vettore $T(\vec{v})$ sono date dal prodotto $A \cdot \vec{\lambda}$. Posto $\vec{w} := T(\vec{v})$, mantenendo la notazione precedente abbiamo

$$\vec{\beta} \;=\; A \cdot \vec{\lambda}$$

Quindi, usando la notazione (16.11), l'identità $T(\vec{v}) = \vec{w}$ la possiamo riscrivere come segue:

$$T\left(\underline{v} \cdot \vec{\lambda}\right) \;=\; \underline{w} \cdot A \cdot \vec{\lambda} \,,. \tag{16.12}$$

Ora che abbiamo scritto in termini più intrinseci chi è l'applicazione T, il problema di trovare la matrice rappresentativa A' di T rispetto a delle basi $\{\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_m\}$ di V e $\{\vec{w}'_1, ..., \vec{w}'_m\}$ di W è ridotto ad un semplice conto formale che coinvolge il prodotto tra matrici. Ricaveremo A' confrontando le due equazioni

$$T\left(\underline{v} \cdot \vec{\lambda}\right) \;=\; \underline{w} \cdot A \cdot \vec{\lambda} \;, \qquad T\left(\underline{v'} \cdot \vec{\lambda}'\right) \;=\; \underline{w'} \cdot A' \cdot \vec{\lambda}' \,. \tag{16.13}$$

Siano $B = (b_{i,j})$ e $C = (c_{i,j})$ le matrici che rispettivamente rappresentano il cambiamento di base su V e quello su W, i.e. $\vec{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \vec{v}_i$, $\vec{w}'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} \vec{w}_i$. Questo significa che posto $\underline{v'} = (\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_m)$, e posto $\underline{w'} = (\vec{w}'_1, ..., \vec{w}'_m)$, abbiamo

$$\underline{v'} \;=\; \underline{v} \cdot B \quad , \qquad \underline{w'} \;=\; \underline{w} \cdot C \,.$$

Si noti che nella $i^{\text{-esima}}$ colonna di B ci sono le coordinate di v'_i rispetto alla *vecchia* base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$; in particolare la moltiplicazione "$B\cdot$" trasforma le nuove coordinate di un vettore nelle vecchie. L'affermazione analoga vale per C.
Tramite queste uguaglianze e la 1^a delle equazioni (16.13) otteniamo

$$\begin{aligned} T\left(\underline{v}' \cdot \vec{\lambda}'\right) &= T\left((\underline{v} \cdot B) \cdot \vec{\lambda}'\right) \\ &= T\left(\underline{v} \cdot (B \cdot \vec{\lambda}')\right) \\ &= \underline{w} \cdot A \cdot (B \cdot \vec{\lambda}') \\ &= (\underline{w}' \cdot C^{-1}) \cdot A \cdot (B \cdot \vec{\lambda}') \quad = \quad \underline{w}' \cdot \left(C^{-1} \cdot A \cdot B\right) \cdot \vec{\lambda}' \,. \end{aligned}$$

Pertanto, confrontando l'equazione ottenuta con la 2^a delle equazioni (16.13) otteniamo

$$A' \quad = \quad C^{-1} \cdot A \cdot B \,. \tag{16.14}$$

In effetti la (16.14) può essere dedotta anche da un semplice ragionamento (confronta con la dimostrazione della Proposizione 15.6). Innanzi tutto ricordiamo che la moltiplicazione per A' è l'operazione che associa alle *nuove* coordinate di un vettore $\vec{v} \in V$, le *nuove* coordinate di $T(\vec{v}) \in W$. Ora, analogamente a quanto visto nel §15, l'operazione appena descritta può essere effettuata nel modo che segue: consideriamo *nuove* coordinate di $\vec{v}$ e

i) le trasformiamo nelle *vecchie* coordinate di $\vec{v}$ (moltiplicazione per B),

ii) moltiplichiamo quanto ottenuto per A (ottenendo le *vecchie* coordinate di $T(\vec{v})$),

iii) moltiplichiamo quanto ottenuto per C^{-1} (ottenendo le *nuove* coordinate di $T(\vec{v})$).

Dal fatto che l'esecuzione di *i*), *ii*) e *iii*) è la moltiplicazione per la matrice $C^{-1} \cdot A \cdot B$ otteniamo la (16.14).

Naturalmente, se $W = V$, si sceglie la stessa base su dominio e codominio di T (i.e. si sceglie $\underline{w} = \underline{v}$ nonché $\underline{w}' = \underline{v}'$). Pertanto si ha $C = B$ e l'uguaglianza (16.14) diventa l'uguaglianza già nota

$$A' \quad = \quad B^{-1} \cdot A \cdot B \,. \tag{16.15}$$

Inciso 16.16. Abbiamo visto (Osservazione 15.16 e Proposizione 15.10) che matrici coniugate rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse e viceversa. Di conseguenza, gli invarianti per coniugio dello spazio delle matrici corrispondono alle proprietà geometriche intrinseche delle trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale.
In particolare questo vale per il determinante di una trasformazione lineare (osservazione 15.16). Una discussione dell'interpretazione geometrica del determinante non è oggetto di questo corso, comunque due parole le vogliamo dire. L'interpretazione geometrica del determinante è la seguente:

il determinante misura di quanto la trasformazione in questione dilata "i volumi".
Ciò, addirittura, indipendentemente da come misuriamo distanze e volumi.

Spieghiamo. Dato uno spazio vettoriale V è possibile misurare distanze e angoli, e di conseguenza volumi, introducendo un *prodotto scalare definito positivo.* Con le nozioni a disposizione in questo testo, è possibile introdurre un modo di misurare distanze e angoli come segue: si scelga una base $\mathcal{B}_V$ di V, si identifichi V con lo spazio delle coordinate $\mathbb{R}^n$, quindi si consideri il prodotto scalare introdotto nel cap. II, § 7 (si vedano anche le definizioni II.7.3 e II.7.7). Ora, sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare e sia $\mathcal{V}$ il volume di una regione misurabile (ad esempio, un qualsiasi parallelepipedo), allora il volume dell'immagine di tale regione è uguale al prodotto $\mathcal{V} \cdot \det T$. Questo indipendentemente dal prodotto scalare a disposizione (ovvero dalla base $\mathcal{B}_V$ scelta), cioè da come misuriamo distanze e angoli. Quindi possiamo dire che $\det T$ è il coefficiente di dilatazione dei volumi pur senza avere in mente un modo di misurare distanze e angoli, quindi volumi. Attenzione, quanto detto vale solamente per i volumi, ad esempio non vale per la misura delle lunghezze: se $\vec{v}$ è un vettore, la lunghezza di $T(\vec{v})$, dipende anche dal prodotto scalare in questione (ovvero dalla base $\mathcal{B}_V$ scelta), cioè da come misuriamo le distanze, oltre che dalla lunghezza di $\vec{v}$ e dalla trasformazione T.

Sulla nozione di spazio proiettivo, una definizione alternativa.

In questa sezione facciamo delle considerazioni che ci portano a una definizione di spazio vettoriale alternativa a quella vista (la Definizione 8.8), cfr. Definizione 16.18. Ribadiamo la nostra convenzione stabilita subito dopo la Definizione 8.16:

Convenzione. Con la locuzione "spazio vettoriale" intendiamo sempre "spazio vettoriale finitamente generato" (cfr. Definizioni 8.8 e 8.16).

Nel §8 abbiamo introdotto gli spazi vettoriali come insiemi V sui quali sono definite due funzioni, una da $V\times V$ in V ed una da $\mathbb{R}\times V$ in V, che soddisfano una lista di proprietà. Più avanti abbiamo dimostrato che ogni spazio vettoriale è isomorfo ad un qualche $\mathbb{R}^n$, cioè che può essere identificato con un qualche $\mathbb{R}^n$ (cfr. Oss. 8.20 e Oss. 12.26). Una tale identificazione, chiamiamola ϕ, è una applicazione lineare biunivoca

$$\phi \ : \quad V \longrightarrow \mathbb{R}^n \ .$$

Questa definisce un sistema di coordiante su V, è la funzione "coordinate" (8.20) (ci preme ribadirlo). Un altro aspetto che vogliamo sottolineare è il seguente:

una tale funzione ϕ consente di ricostruire la struttura di V (come spazio vettoriale) a partire dalla struttura di $\mathbb{R}^n$:

$$\underset{\text{(operazioni in } V)}{\vec{v}+\vec{w} \ \text{ e } \ \lambda\cdot\vec{v}} \qquad \textit{sono i vettori di coordinate} \qquad \underset{\text{(operazioni in } \mathbb{R}^n)}{\phi(\vec{v})+\phi(\vec{w}) \ \text{ e } \ \lambda\cdot\phi(\vec{v})} \ .$$

Pertanto, non abbiamo bisogno della struttura vettoriale di V, la struttura di $\mathbb{R}^n$ di spazio vettoriale induce una struttura di spazio vettoriale su V. Detto in termini meno criptici, possiamo partire da un insieme V privo di struttura e una qualsiasi funzione biunivoca $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, quindi definire sul nostro insieme V le operazioni date da

$$(16.17) \qquad \vec{v}+\vec{w} \quad := \quad \phi^{-1}\big[\phi(\vec{v})+\phi(\vec{w})\big] \qquad \text{e} \qquad \lambda\cdot\vec{v} \quad := \quad \phi^{-1}\big[\lambda\cdot\phi(\vec{v})\big]$$

(sottolineiamo che le operazioni tra parentesi quadre sono operazioni in $\mathbb{R}^n$). Ciò suggerisce due considerazioni:

i) possiamo dire che $\mathbb{R}^n$ è un *modello* di spazio vettoriale di dimensione n;

ii) in prima approssimazione potremmo definire gli spazi vettoriali come insiemi, a priori privi di struttura, identificati con $\mathbb{R}^n$ tramite una funzione biunivoca.

La definizione suggerita in *ii)* è semplicemente sbagliata, nel senso che non definisce gli spazi vettoriali. Infatti, uno spazio vettoriale astratto, così com'è stato definito nel paragrafo §8, non si porta dietro una identificazione con $\mathbb{R}^n$, ovvero un sistema di coordinate, ovvero una base. Detto in termini equivalenti ai precedenti, la definizione suggerita in *ii)* ha il difetto di privilegiare una base di V rispetto alle altre: alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ corrisponde una base privilegiata di V. D'altro canto usare $\mathbb{R}^n$ come modello per definire gli spazi vettoriali può avere dei vantaggi, si deve solamente correggere il difetto di cui sopra. In inciso, questo difetto è un problema molto serio, ma andare a fondo su questo aspetto ci porterebbe lontano e non lo facciamo. Vediamo come ovviare a questo problema. L'idea è semplice: dare, invece di una sola identificazione $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, una famiglia di identificazioni $\mathcal{F} = \big\{\phi_i : V \longrightarrow \mathbb{R}^n\big\}$, così da non avere più una base privilegiata, l'idea è che "se ogni base è privilegiata, di fatto, nessuna lo è". Naturalmente si dovrà richiedere che le identificazioni della nostra famiglia $\mathcal{F}$ siano tra loro compatibili, nel senso che devono indurre tutte la stessa struttura di spazio vettoriale. Ciò, detto in termini forse più concreti, significa richiedere quanto segue: quando si usano le formule (16.17) per definire la somma ed il prodotto per gli scalari, cioè per definire le operazioni in V, deve essere indifferente usare ϕ_i piuttosto che ϕ_j. Tenendo presente che, a posteriori, ognuna delle nostre ϕ sarà un sistema di coordinate su V, la compatibilità di cui sopra si traduce nella richiesta che la composizione $\phi_i\circ\phi_j^{-1}$, funzione di $\mathbb{R}^n$ in se, sia un cambio di coordinate su V, ovvero sia la moltiplicazione per una matrice invertibile (cfr. Proposizione 15.7).

Finalmente, enunciamo la definizione di spazio vettoriale suggerita dalle considerazioni precedenti.

Definizione 16.18 (definizione alternativa di spazio vettoriale)**.** Uno spazio vettoriale è un insieme V sul quale sia definita una famiglia non vuota di funzioni biunivoche

$$\mathcal{F} \;=\; \big\{\phi:\; V \longrightarrow \mathbb{R}^n\big\}$$

che soddisfi

$$(16.18') \qquad \phi\circ\psi^{-1}(\mathbf{x}) \;=\; M\mathbf{x}\,, \qquad \forall\, \phi, \psi \in \mathcal{F}\,,\;\; \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\,,$$

dove M è una matrice invertibile $n\times n$ (che dipende da ϕ e ψ).

Il fatto che la Definizione 16.18 sia equivalente alla Definizione 8.8+ (quel "+" ha il significato di ricordarci che alla Definizione 8.8 abbiamo aggiunto la nostra convenzione) sostanzialmente si riduce alle considerazioni viste nell'inciso. Preferiamo comunque scrivere una dimostrazione più pulita e diretta dell'equivalenza delle due definizioni.

Dimostrazione (dell'equivalenza della Definizione 8.8+ e la Definizione 16.8).
Dato uno spazio vettoriale V (secondo la Definizione 8.8+), possiamo considerare come famiglia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le possibili funzioni coordinate (cfr. oss. 8.20). Se ϕ e ψ sono due sistemi di coordiante, come sappiamo il passaggio dalle une alle altre è la moltiplicazione per una matrice invertibile (Proposizione 15.7).
Viceversa, una coppia $(V, \mathcal{F})$ come nella Definizione 16.18, in particolare che soddisfi la condizione ivi considerata, è uno spazio vettoriale secondo la Definizione 8.8+. Infatti, usando una qualsiasi delle identificazioni $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ della nostra famiglia dotiamo l'insieme V di una somma e di un prodotto per gli scalari utilizzando le formule (16.17). Le operazioni su V appena introdotte non dipendono dalla identificazione scelta, in formule $\phi^{-1}\big[\phi(\vec{v})+\phi(\vec{w})\big] \;=\; \psi^{-1}\big[\psi(\vec{v})+\psi(\vec{w})\big]$ e $\phi^{-1}\big[\lambda\cdot\phi(\vec{v})\big] \;=\; \psi^{-1}\big[\lambda\cdot\psi(\vec{v})\big]$, $\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{F}$.
Proviamo la prima uguaglianza (la seconda è analoga). Risulta

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}\big[\phi(\vec{v})+\phi(\vec{w})\big] \;&=\; \phi^{-1}\big[\phi\,\psi^{-1}\,\psi(\vec{v})+\phi\,\psi^{-1}\,\psi(\vec{w})\big]\\
&=\; \phi^{-1}\big[\;M\;\psi(\vec{v}) \;+\; M\;\psi(\vec{w})\big]\\
&=\; \phi^{-1}\big[\;M\;\big(\psi(\vec{v})+\psi(\vec{w})\big)\big]\\
&=\; \phi^{-1}\;\phi\,\psi^{-1}\,\big(\psi(\vec{v})+\psi(\vec{w})\big) \qquad = \quad \psi^{-1}\,\big(\psi(\vec{v})+\psi(\vec{w})\big)
\end{aligned}$$

□

Naturalmente non abbiamo alcun bisogno di una nuova definizione di spazio vettoriale, la definizione data nel §8 è perfetta così com'è. Con le considerazioni precedenti si vuole semplicemente suggerire la strada per una definizione alternativa. Ci sembrava interessante illustrarla perché l'idea che c'è sotto è un'idea che può essere, e viene, utilizzata spesso e in contesti diversi per definire oggetti matematici. La ritroviamo nella sezione successiva, sezione dove definiamo gli spazi affini (per i quali è scomodo seguire la via assiomatica).

Spazi Affini [13]**.**

In questa sezione diamo due definizioni (equivalenti) di spazio affine.

La prima delle due è formulata in perfetta analogia con la Definizione "alternativa" di spazio vettoriale 16.18. Come nel caso degli spazi vettoriali, lo spazio $\mathbb{R}^n$ è il nostro "modello", solo che nel caso degli spazi affini tra i cambi di coordinate ammessi, diversamente dal caso degli spazi vettoriali, si includono anche le traslazioni. Precisamente, la condizione (16.18′) viene sostituita con la condizione

$$\phi \circ \psi^{-1}(\mathbf{x}) \quad = \quad M\mathbf{x} + \mathbf{b}\,, \qquad \forall\, \phi,\, \psi \,\in\, \mathcal{F}\,, \quad \mathbf{x} \,\in\, \mathbb{R}^n\,,$$

(l'elemento $\mathbf{b}$ è la nostra traslazione: è un elemento in $\mathbb{R}^n$ fissato, dipendente da ϕ e ψ, naturalmente M è sempre una matrice invertibile $n \times n$).

Definizione 16.19. Uno *spazio affine di dimensione* n è un insieme $\mathcal{A}$ sul quale sia definita una famiglia[14] non vuota di funzioni biunivoche

$$\mathcal{F} \;=\; \big\{\phi :\; \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n\big\}$$

che soddisfi

$$(\clubsuit) \qquad \phi \circ \psi^{-1}(\mathbf{x}) \quad = \quad M\mathbf{x} + \mathbf{b}\,, \qquad \forall\, \phi,\, \psi \,\in\, \mathcal{F}\,, \quad \mathbf{x} \,\in\, \mathbb{R}^n\,,$$

dove $\mathbf{b}$ ed M sono rispettivamente un elemento in $\mathbb{R}^n$ ed una matrice invertibile $n \times n$ (entrambi dipendenti da ϕ e ψ).
Inoltre, uno *spazio affine* è uno spazio affine di dimensione n per un qualche n.

Nel paragrafo §11 abbiamo introdotto i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ come gli spazi delle soluzioni dei sistemi lineari (arbitrari, cioè anche non omogenei). Naturalmente, i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ introdotti nel paragrafo §11 sono spazi affini secondo la Definizione 16.19.

Proposizione 16.20. *I sottospazi affini di* $\mathbb{R}^n$ (*Definizione 11.2*) *sono spazi affini.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Possiamo scrivere

$$\mathcal{S} \quad = \quad \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \vec{x} = t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k + \vec{c}\,\big\} \quad = \quad V + \vec{c}$$

dove V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ dipendente esclusivamente da $\mathcal{S}$, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ è una base di V (che denotiamo con $\mathcal{B}_v$) e $\vec{c}$ è un punto di $\mathcal{S}$ (cfr. Definizione 11.2 e Proposizione 11.7). I valori $t_1, \ldots, t_k$ parametrizzano $\mathcal{S}$, questo significa che la funzione

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & (t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & p(t_1, \ldots, t_k) \;:=\; t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k + \vec{c} \end{array}$$

è biunivoca, ovvero è invertibile. Consideriamo la corrispondente funzione inversa

$$\begin{array}{rccc} \phi_p: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & \vec{s} & \mapsto & (t_1, \ldots, t_k) \;:=\; p^{-1}(\vec{s}) \end{array}$$

(a un punto di $\mathcal{S}$ associa le corrispondenti coordinate). Definiamo la nostra famiglia $\mathcal{F}$ ponendo

$$\mathcal{F} \quad = \quad \{\,\text{“tutte le possibili } \phi_p : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^k\text{”}\,\}$$

(cosa che ci dirà che il nostro $\mathcal{S}$ è uno spazio affine di dimensione k ...non ci si confonda, qui n è la dimensione dell'ambiente $\mathbb{R}^n$).
Resta da capire cosa accade se cambiamo le nostre scelte, ovvero verificare la condizione ($\clubsuit$) della Definizione 16.19. A tal fine, sia

[13] In queste note la locuzione "spazio affine" significa "spazio affine reale di dimensione finita".

[14] Alcuni autori richiedono che la famiglia $\mathcal{F}$ sia *massimale*, cioè che se $\mathcal{F}'$ è un'altra famiglia di corrispondenze biunivoche, con $\mathcal{F}'$ contenente $\mathcal{F}$ e soddisfacente la proprietà ($\clubsuit$), allora $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Comunque questa richiesta è più che altro un'ossessione logica, ignoriamola.

$$\mathcal{S} \quad = \quad \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \vec{x} = s_1\vec{u}_1 + ... + s_k\vec{u}_k + \vec{d} \,\right\}$$

dove $\mathcal{B}_u = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}$ è un'altra base di V e $\vec{d}$ è un altro punto di $\mathcal{S}$. Sia quindi

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & (s_1, ..., s_k) & \mapsto & q(s_1, ..., s_k) \;:=\; s_1\vec{u}_1 + ... + s_k\vec{u}_k + \vec{d} \end{array}$$

la corrispondente parametrizzazione di $\mathcal{S}$ e

$$\phi_q : \quad \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

l'inversa di q.

Poniamo, per comodità di notazione $\mathbf{t} = {}^t(t_1, ..., t_k)$ e $\mathbf{s} = {}^t(s_1, ..., s_k)$ (sono vettori colonna). Affermiamo che risulta

$$\phi_p \circ \phi_q^{-1}(\mathbf{s}) \quad = \quad M\,\mathbf{s} \,+\, \mathbf{b} \tag{16.20$'$}$$

dove M è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_v$ (nella colonna i di M ci sono le coordinate di $\vec{u}_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}_v$) e $\mathbf{b}$ è il vettore delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}_v$ del vettore $\vec{d} - \vec{c} \in V$. Infatti, da un lato risulta

$$p\left(\phi_p \circ \phi_q^{-1}(\mathbf{s})\right) \quad = \quad \phi_q^{-1}(\mathbf{s}) \quad = \quad s_1\vec{u}_1 + ... + s_k\vec{u}_k + \vec{d}$$

d'altro canto, ricordando la formula del cambiamento di base di uno spazio vettoriale che nel caso del nostro V (e le nostre $\mathcal{B}_u$ e $\mathcal{B}_v$) è la formula

$$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \cdot M\,\mathbf{s} \quad = \quad (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k) \cdot \mathbf{s}\,, \quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^k\,,$$

e tenendo presente che per come è definito $\mathbf{b}$ si ha $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \cdot \mathbf{b} = \vec{d} - \vec{c}$, risulta

$$\begin{aligned} p\left(M\,\mathbf{s} + \mathbf{b}\right) \quad &= \quad (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \cdot \left(M\,\mathbf{s} + \mathbf{b}\right) + \vec{c} \\ &= \quad (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k) \cdot \mathbf{s} + \left(\vec{d} - \vec{c}\right) + \vec{c} \quad = \quad s_1\vec{u}_1 + ... + s_k\vec{u}_k + \vec{d} \end{aligned}$$

(il puntino "$\cdot$" è un normale prodotto formale righe per colonne, ha perfettamente senso nonostante, in ognuna delle 5 volte che lo abbiamo scritto, alla sua sinistra ci sia una matrice riga i cui elemeti sono vettori ed alla sua destra una matrice colonna i cui elemeti sono numeri). Essendo p invertibile abbiamo l'uguaglianza (16.20$'$) e, in definitiva, vale la condizione ($\clubsuit$) della Definizione 16.19. $\square$

Esempio 16.21. Il piano $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione

$$2x + 3y - 5z + 18 \quad = \quad 0 \tag{$\bigstar$}$$

(che <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ in quanto non passa per l'origine) è in modo naturale uno spazio affine secondo la Definizione 16.19: si considera la collezione di tutte le possibili soluzioni parametriche del sistema lineare ($\bigstar$)

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & p(t_1, t_2) \;:=\; p_0 + t_1\vec{v} + t_2\vec{w} \end{array}$$

e, come famiglia $\mathcal{F}$, si prende la collezione delle corrispondenti funzioni inverse

$$\begin{array}{rccl} \phi_p: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p & \mapsto & p^{-1}(t_1, t_2) \end{array}$$

(**n.b.** la funzione che a $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ associa $p(t_1, t_2) \in \mathcal{H}$ è biunivoca, quindi invertibile).

Esercizio. Si verifichi che se

$$p(t_1, t_2) \;=\; p_0 + t_1\vec{v} + t_2\vec{w} \qquad \text{e} \qquad q(s_1, s_2) \;=\; q_0 + s_1\vec{u} + s_2\vec{z}$$

sono due soluzioni generali del sistema ($\bigstar$) allora il legame "tra le s e le t", precisamente la funzione $\phi_p \circ \phi_q^{-1} = p^{-1} \circ q$, è una funzione di primo grado, cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \; + \; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che vale la condizione (♣) della Definizione 16.19.

Naturalmente l'esempio 16.21 non ha nulla di speciale: come abbiamo avuto già modo di dire, le soluzioni di sistemi non omogenei, che nel paragrafo § 11 abbiamo chiamato "sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$", sono spazi affini secondo la Definizione 16.19.

I sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ non hanno un'origine, come il nostro $\mathcal{H}$ di equazione (★). Detto in termini molto vaghi, uno spazio affine è uno spazio vettoriale dove sono ammesse le traslazioni (che <u>non</u> sono applicazioni lineari, spostano il vettore nullo). Ciò suggerisce l'idea di vedere gli spazi affini come "spazi vettoriali sui quali ci si è dimenticati dov'è l'origine", ovvero suggerisce l'idea di dare la definizione alternativa (questa non più vaga ma rigorosa) che segue:

Definizione 16.22 (alternativa alla 16.19). Uno spazio affine è una terna $(\mathcal{A},\ W,\ \Psi)$, dove $\mathcal{A}$ è un insieme, W è uno spazio vettoriale di dimensione finita e Ψ è una funzione

$$\Psi : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow W$$

tale che

i) per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ fissato, si ha che la funzione
$$\psi_{\mathbf{a}} : \mathcal{A} \longrightarrow W\,, \quad \psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \;:=\; \Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{x})\,,$$
è biunivoca;

ii) vale la regola di Chasles $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + \Psi(\mathbf{b},\, \mathbf{c}) \;=\; \Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{c})\,,\ \ \forall\, \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\, \in\, \mathcal{A}.$

Dalla regola di Chasles seguono rapidamente altre due proprietà:

iii) $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = \vec{0}\,,\ \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A}$ $\quad(\vec{0} \in W$ denota il vettore nullo di $W)$;

iv) Ψ è antisimmetrica, cioè $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, -\Psi(\mathbf{b},\, \mathbf{a})\,,\ \forall\, \mathbf{a},\, \mathbf{b}\, \in \mathcal{A}.$

Esercizio 16.23. Si dimostrino le proprietà *iii)* e *iv)*.

Suggerimento: Si scriva la *ii)* con $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$, quindi si deduca la *iii)*. A questo punto, si scriva la *ii)* con $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ e, tenendo presente la *iii)* appena provata, si deduca la la *iv)*.

Facciamo alcune osservazioni che ci sembrano interessanti.

Oss. 16.24. La scelta di un punto $a \in \mathcal{A}$ individua l'identificazione di $\mathcal{A}$ con W data da

$$\psi_{\mathbf{a}} \,:\, \mathcal{A} \longrightarrow W$$

pertanto una coppia ("spazio affine", "punto") ha una naturale struttura di spazio vettoriale:

una tale coppia $(\mathcal{A},\, a)$ **è** *uno spazio vettoriale.*

Oss. 16.25. I "sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$" introdotti nel paragrafo § 11 (che sono i traslati dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$), cioè i sottoinsiemi del tipo

$$(\spadesuit) \qquad \vec{v}_0 \;+\; W\,,$$

dove $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto (fissato) e W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (cfr. 11.2, 11.5, 11.7), sono in modo naturale spazi affini secondo la Definizione 16.22, infatti basta porre

$$W \;=\; \text{“spazio } V \text{ della (11.7)”}, \quad \Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \;:=\; \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

(per esercizio, si verifichi che questa funzione soddisfa la regola di Chasles).

Naturalmente, possiamo sostituire $\mathbb{R}^n$ con uno spazio vettoriale astratto: i sottospazi affini di un qualsiasi spazio vettoriale (che chiameremo “spazio ambiente”) sono i traslati dei suoi sottospazi vettoriali, cioè i sottoinsiemi del tipo (♠), dove $\vec{v}_0$ è un punto fissato dello spazio ambiente e W un sottospazio vettoriale dello spazio ambiente.

A questo punto, per chiarezza e completezza, enunciamo e dimostriamo quanto segue:

Proposizione 16.26. *Le Definizioni* 16.19 *e* 16.22 *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Se sono dati $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{F}$ come nella Definizione 16.18, definiamo

$$W = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \Psi(\vec{v},\vec{w}) = \phi(\vec{v}) - \phi(\vec{w}) \ \text{ per una qualche } \phi \in \mathcal{F}$$

(espressione che <u>non</u> dipende dalla particolare funzione $\phi \in \mathcal{F}$ scelta). A questo punto si verifica che valgono le condizioni $i)$ e $ii)$ della Definizione 16.22 (questa verifica la lasciamo per esercizio).

Viceversa se sono dati $\mathcal{A}$ e Ψ come nella Definizione 16.22, per ogni base $\mathcal{B}$ di W ed $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ definiamo

$$\phi = \phi_{\mathcal{B},\,\mathbf{a}} \quad \text{come la composizione} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{\psi_{\mathbf{a}}} W \xrightarrow{C_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n ,$$

dove $C_{\mathcal{B}}$ denota la funzione che ad un vettore associa le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, quindi defininiamo $\mathcal{F}$ come la collezione di tali funzioni. Infine si verifica che questa famiglia soddisfa la proprietà (♣) della Definizione 16.19 (di nuovo, lasciamo la verifica per esercizio). □

Per concludere, non possiamo non menzionare il fatto che classicamente gli spazi affini vengono introdotti per via assiomatica, fissando classi di sottoinsiemi e vari tipi di assiomi, come assiomi di ordinamento per i punti di una retta, come pure assiomi del tipo “per due punti passa una sola retta” o “data una retta r e un punto p esiste un'unica retta s parallela ad r passante per p”. Invitiamo il lettore a documentarsi per scoprire bellezza, vantaggi, ma anche svantaggi, di questo approccio.

§17. Soluzione degli esercizi.

1.20. I sistemi a) e b) sono sistemi lineari.

Nel sistema di equazioni c) non vengono indicate le incognite. Presumendo che queste siano x, y, z, t, il sistema non è lineare. Volendo dare una risposta che comprenda tutte le possibilità, abbiamo che il sistema è lineare se e solo se è un sistema di equazioni in uno dei seguenti insiemi di incognite: , $\{x\}$ (solo per $t = 0$), $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, z\}$ (solo per $t = 0$), ogni insieme la cui intersezione con l'insieme $\{x, y, z, t\}$ è uno dei precedenti (ad esempio, è lineare come sistema nelle incognite z, r, w).

2.5. Ragionando per induzione, essendo nulli gli elementi sotto $a_{i,\,i}$, sono nulli anche gli elementi sotto $a_{i+1,\,i+1}$ (altrimenti la matrice non è a scala).

2.6. Le matrici A, C, F, G, H sono le uniche matrici a scala.

2.7. L'affermazione è sostanzialmente ovvia! ...l'esercizio, che non aggiunge molto alla comprensione di come è fatta una matrice a scala, vi è stato chiesto come allenamento a fare qualcosa alla quale non siete abituati: scrivere una dimostrazione rigorosa. Comunque, ecco una possibile dimostrazione:

Per ogni indice i, indichiamo con M_i la matrice ottenuta cancellando le prime $i-1$ righe e tutte le colonne che seguono il primo elemento non nullo della i^{-esima} riga (se questa è nulla non cancelliamo nessuna colonna). La proprietà che $\nu(i)$ è strettamente crescente (cfr. Definizione 2.4), con l'eccezione indicata nella (2.4), è equivalente al fatto che ogni matrice M_i è nulla ovunque eccetto, eventualmente, che nell'elemento che si trova nell'angolo in alto a destra. D'altro canto questa proprietà è chiaramente equivalente alla proprietà enunciata nell'esercizio.

2.12. I sistemi di matrice completa B, D, E, F non sono compatibili. Per quel che riguarda gli altri risulta: $A: \exists!$ soluzione $x = -\frac{1}{2}, y = 1$; $C: \exists\infty^1$ soluzioni $x = 0$, $y = t$, $z = 0$; $G: \exists\infty^2$ soluzioni (x, y parametri liberi); $H: \exists!$ soluzione $x = \frac{1}{2}$.

4.10 e 4.11. L'errore viene dal fatto che nella Definizione 1.8 di sistema lineare "non abbiamo un'equazione ma un'accozzaglia di simboli"! È la Definizione 1.9 che dà un senso matematico a tali simboli. Questo significa che non possiamo trattare un sistema lineare come se fosse un'equazione: ad esempio se partissi dall'equazione $1 = 0$ potrei dimostrare qualsiasi cosa! La deduzione "$A{\cdot}\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = B{\cdot}\vec{b}$" avrebbe senso qualora $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ fosse un'equazione. Naturalmente, nel caso in cui si lavora con un sistema lineare compatibile, è lecito assumere che $\vec{x}$ ne sia una soluzione e tutto quello che si riesce a dedurre dall'*identità* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ è necessariamente vero. Quindi, il ragionamento esposto nell'esercizio (4.8) non è completamente da buttare, dimostra quanto segue:

Sia $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare compatibile, con $A \in M_{m,\,n}(\mathbb{R})$. Assumiamo che esista una matrice $B \in M_{n,\,m}(\mathbb{R})$ tale che $B \cdot A = I_n$. Allora il sistema ammette una unica soluzione, la soluzione $\vec{x} = B \cdot \vec{b}$.

Ribadisco il punto: nell'esercizio, l'ipotesi mancante era quella di compatibilità del sistema (lo studente verifichi che questa ipotesi non è soddisfatta dall'esempio indicato nell'esercizio).

5.15. I determinanti delle matrici indicate valgono (nell'ordine): $62, 6, 10, 6$.

5.16. Valgono (nell'ordine): $4k^2 - 6k - 2,\ 30k,\ 30k,\ (2-k)\cdot(k^2-11)\cdot(k-8)$.

8.26. Una possibile base è $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$ (non possiamo scegliere $\vec{e}_2$ perché è combinazione lineare di $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{e}_1$).

8.29. $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_3\}$ è una base di V (che ha dimensione 2).

8.30. Conviene utilizzare il concetto di dimensione: gli spazi di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ hanno entrambi dimensione 2 (sono due piani). Lo spazio generato dai vettori di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ li contiene entrambi, d'altro canto è anch'esso un piano (applicando l'algoritmo di estrazione di una base ai 4 vettori in questione si ottengono 2 vettori; questo è l'unico conto da fare). Avendo 2 piani contenuti in uno stesso piano questi devono necessariamente coincidere.

8.31. È sufficiente considerare due vettori indipendenti (sempre in W naturalmente), ad esempio $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1,\ \vec{b}_1+\vec{b}_2\}$.

8.32. Rispettivamente $1, 2, 2$; $1, 0, 0$; $0, -3, 2$.

8.33. **a)** Base: $\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3\}$, coordinate di $\vec{v}$: $1, 1, 2$; **b)** base: $\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2\}$, coordinate di $\vec{v}$: $-1, -2$; **c)** base: $\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2\}$, coordinate di $\vec{v}$: $0, 1$.

8.34. Rispettivamente 2, 3.

8.38. **a)** Se $A \in M_{n,n}$ e $B \in M_{n,n}$ sono matrici simmetriche, cioè ${}^tA = A$ e ${}^tB = B$, allora ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha{}^tA + \beta{}^tB = \alpha A + \beta B \in M_{n,n}$. Questo dimostra quanto affermato (cfr. def. 8.9″).

b) Una matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è simmetrica se e solo se $b = c$, ovvero è del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
Una tale matrice si scrive in modo unico come segue:
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ne segue che l'insieme $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ costituisce una base dello spazio in questione, che quindi, in particolare, ha dimensione 3.

9.9. Nell'ordine: $3, 2, 3, 1$; $2, 4, 0, 1$; $2, 1, 5$.

9.10. Nell'ordine: 3 per $k \neq \frac{4}{3}$, 2 per $k = \frac{4}{3}$; 3 $\forall\, k$; 3 per $k \neq 7$, 2 per $k = 7$; 1 $\forall\, k$; 3 per $k \neq 0, 1$, 2 per $k = 0$, 1 per $k = 1$; 1 per $k \neq 0$, 0 per $k = 0$; 3 per $k \neq 7$, 2 per $k = 7$; 2 $\forall\, k$; 2 per $k \neq \pm\sqrt{13}$, 1 per $k = \pm\sqrt{13}$; 5 per $k \neq 0$, 0 per $k = 0$; 3 per $k \neq 1$, 1 per $k = 1$; 2 per $k \neq 0$, 1 per $k = 0$; 1 per $k \neq 0, -1$, 1 per $k = 0$ 2 per $k = -1$; 1 per $k \neq 0$, 1 per $k = 0$.

9.12. **a)** La matrice indicata a lato ha le prime due righe indipendenti, le prime due colonne indipendenti, il minore costituito dalle prime due righe e colonne (in neretto) non è invertibile.
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (Questa parte dell'esercizio è più difficile, lo studente che non fosse riuscito a rispondere non deve preoccuparsi).

Sia A una matrice come prescritto nell'esercizio (naturalmente, a meno di permutare righe e/o colonne possiamo assumere che le righe e colonne in questione siano le prime due).
$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & ? \\ \star & \star & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$
Il Minore M (indicato dagli asterischi) non può avere rango 0 (gli asterischi non possono essere 4 zeri perché le prime due righe di A sono indipendenti) e non può avere rango 2 (per ipotesi non è invertibile), quindi ha rango 1. Se per assurdo A avesse rango 2, la terza riga di A dovrebbe necessariamente essere **c.l.** delle prime due (che sono indipendenti per ipotesi). A maggior ragione ciò sarebbe vero per la sottomatrice A' costituita dalle prime due colonne di A, ma questo forzerebbe A' ad avere rango 1 (in quanto M ha rango 1), il che contraddice l'ipotesi di indipendenza delle prime due colonne di A.

10.3. Dato $\vec{v} = \vec{u}+\vec{w} \in U + W$, questo appartiene a $\operatorname{Span}\{U \cup W\}$ per definizione di "*Span*". Viceversa, sappiamo che $\operatorname{Span}\{U \cup W\}$ è lo spazio delle combinazioni lineari (c.l.) di vettori in $U \cup W$. Una tale c.l. $\vec{\sigma}$ la possiamo spezzare come somma di una c.l. di vettori in U e una c.l. di vettori in W. Essendo U e W spazi vettoriali, queste due c.l. sono a loro volta vettori in U e W. Quindi $\vec{\sigma}$ appartiene allo spazio somma $U + W$.

10.5. Scriviamo la relazione indicata nell'esercizio nella forma
$$\alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_r\vec{b}_r + \alpha_{r+1}\vec{u}_1 + ... + \alpha_{r+s}\vec{u}_s \quad = \quad -\alpha_{r+s+1}\vec{w}_1 - ... - \alpha_{r+s+t}\vec{w}_t$$
ed osserviamo che l'espressione a sinistra è in U mentre quella a destra è in W. Quindi, indicando con $\vec{z}$ il vettore in uno dei due lati dell'uguaglianza, abbiamo che $\vec{z} \in U \cap W$. D'altro canto, i vettori $\vec{w}_i$ sono i vettori del completamento di una base di $U \cap W$ a una base di W, quindi, nessuna loro c.l. non nulla può appartenere a $U \cap W$. Questo dimostra che tutti i coefficienti $\alpha_{r+s+1}, ..., \alpha_{r+s+t}$ sono nulli (in particolare, $\vec{z} = \vec{0}$). Infine, essendo

$\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_s\}$ una base di U ed essendo $\vec{z} = \vec{0}$, anche i coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_{r+s}$ sono nulli (si noti che usiamo tutti i dettagli della costruzione dei vari vettori in questione).

10.9. Considerando che $14 \leq \dim(U+W) \leq 19$ (la dimensione dello spazio ambiente), dalla formula di Grassmann otteniamo $4 \leq \dim(U \cap W) \leq 9$.

10.10. Per la formula di Grassmann abbiamo $\dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W) - \dim U = \dim(U+W) + 3 - 6 = \dim(U+W) - 3$. Poiché $6 = \dim U \leq \dim(U+W) \leq 8$, si deve avere $3 \leq \dim W \leq 5$.

10.11. **a)** Indichiamo con $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ i tre generatori di U_k e con $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ i due generatori di W. Di sicuro $\vec{u}_3$ non è c.l. di $\vec{u}_1$ ed $\vec{u}_2$ (solo $\vec{u}_3$ ha prima coordinata non nulla), inoltre $\vec{u}_1$ ed $\vec{u}_2$ sono proporzionali se e solo se $k = 1$. Quindi, $\dim U_k = 3$ per $k \neq 1$, $\dim U_k = 2$ per $k = 1$. I due generatori di W non sono proporzionali, pertanto $\dim W = 2$. Per $k = 1$ i quattro vettori $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ sono indipendenti, quindi generano l'ambiente $\mathbb{R}^4$ (pertanto, in questo caso, l'intersezione è costituita solamente dal vettore nulla). Inoltre, $\vec{w}_1$ non è c.l. dei generatori di U_k eccetto quando $2 = 7-k$, cioè $k = 5$. Ne segue che $\dim U_k \cap W \leq 1$ per $k \neq 1, 5$, d'altro canto per la formula di Grassmann e quanto stabilito sopra $\dim U_k \cap W \neq 0$ (sempre per $k \neq 1, 5$). Infine $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in U_5$, quindi $W \subseteq U_5$. Mettendo insieme i risultati trovati abbiamo
$\dim U_1 = 2$, $\dim W = 2$, $\dim U_1 \cap W = 0$, $\dim U + W = 4$
$\dim U_5 = 3$, $\dim W = 2$, $\dim U_5 \cap W = 2$, $\dim U + W = 3$
$\dim U_k = 3$, $\dim W = 2$, $\dim U_5 \cap W = 1$, $\dim U + W = 4$ per $k \neq 1, 5$.
b) Scegliendo $k = 0$ troviamo $U_0 \cap W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_2 - \vec{w}_1\}$; $\{\vec{w}_2 - \vec{w}_1\}$ ne è una base.
c) $\{\vec{w}_2 - \vec{w}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ è una base di U_0 soddisfacente le richieste.
Nota. Abbiamo "guardato" i vettori in questione per capire se c'erano o meno relazioni di dipendenza, naturalmente avremmo potuto effettuare la solita riduzione a scala...

10.20. Come indicato nel suggerimento, il rango in questione vale r. Le equazioni individuate da un minore invertibile di ordine r costituiscono un sistema quadrato di r equazioni nelle r incognite $t_1, ..., t_r$, la cui matrice incompleta è invertibile. Risolverlo, cosa che sappiamo essere possibile, significa isolare $t_1, ..., t_r$.

10.21. Prendiamo la strada più rapida: risolvendo il primo sistema troviamo $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -15t$. D'altro canto queste equazioni soddisfano anche le equazioni del secondo sistema, che pertanto per ragioni di dimensione (ovvero di numero di parametri liberi) deve essere necessariamente equivalente al primo.

10.27. La prima stima da effettuare riguarda la dimensione di U che deve essere compresa tra 15 e 19, infatti U è definito da 4 equazioni (che a priori potrebbero essere tutte banali). La stessa stima vale per la dimensione dello spazio somma $U + W$. A questo punto la stima $6 \leq \dim(U \cap W) \leq 10$ segue dalla formula di Grassmann. Un altro modo di ottenere quest'ultima stima è il seguente: $U \cap W$ si ottiene considerando i vettori di W le cui coordinate soddisfano le equazioni che definiscono U; i.e. è un sottospazio di uno spazio di dimensione 10, definito da 4 equazioni. Quindi la sua dimensione deve essere compresa tra $6 = 10 - 4$ e 10 .

10.28. Si deve avere $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U+W)$, cioè $6 \leq 15 - k \leq 11$. Da queste disuguaglianze si ottiene $4 \leq k \leq 9$. Dalla formula di Grassmann si ottiene $\dim W = 11 + 6 - (15 - k) = k + 2$.

11.4. Un'implicazione è immediata: uno spazio vettoriale deve contenere l'origine. Viceversa, se l'insieme $\mathcal{S}$ della (11.1) contiene l'origine, possiamo scrivere $\vec{0} = t_1\vec{v}_1 + ... + t_k\vec{v}_k + \vec{c}$. Questo dimostra che $\vec{c}$ è c.l. dei $\vec{v}_i$ e pertanto che $\mathcal{S} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$.

11.10. Usando la notazione (11.5) e la successiva osservazione abbiamo:

$$V + \vec{c} = V' + \vec{c}' \implies V = V' + \vec{c}' - \vec{c} \implies V' + \vec{c}' - \vec{c} \overset{(*)}{=} V' \implies V = V'$$

dove l'uguaglianza $(*)$ segue dalla precedente (più precisamente, dal fatto che, come conseguenza dell'uguaglianza precedente, lo spazio affine $V' + \vec{c}' - \vec{c}$ è uno spazio vettoriale).

11.24. Non c'è praticamente nulla da dimostrare (cfr. Definizione 11.22)! ...lo spazio vettoriale associato allo spazio affine $V \cap W$ è lo stesso $V \cap W$, spazio contenuto sia in V che in W (che sono gli spazi vettoriali associati rispettivamente ad $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$).

11.25. Tenendo presente la Definizione 11.22, quanto affermato segue dal fatto che per spazi vettoriali della stessa dimensione l'inclusione equivale all'uguaglianza (che è una nozione transitiva).
Attenzione: anche l'inclusione è transitiva ma nella (11.22) c'è quell'"oppure" che frega!

11.26. Alla luce della Definizione 11.22, ci chiediamo quali sono i valori di k per i quali lo spazio vettoriali associato alla retta r è contenuto nello spazio vettoriale associato al piano τ. Il primo è lo spazio $\mathrm{Span}\{\vec{v}\}$, essendo $\vec{v}$ il vettore di coordinate $1,\ 2,\ -1$. Mentre lo spazio vettoriale associato al piano τ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $x + y + kz = 0$ (sistema omogeneo associato al sistema che definisce τ). Sostituendo le coordinate di $\vec{v}$ nell'equazione appena scritta troviamo $1 + 2 - k = 0$, quindi $k = 3$.

11.27. I due piani, quello cercato e quello dato nel testo, in quanto paralleli hanno stesso spazio vettoriale associato (Definizione 11.13), quindi, in forma cartesiana, stessa parte omogenea: l'equazione del piano cercato è del tipo $x + y + z = c$. Imponendo il passaggio per il punto di coordinate $2,\ -1,\ 5$ troviamo $2 - 1 + 5 = c$, quindi $c = 6$.

12.3. Le due uguaglianze nella (12.1′) sono casi particolari della (12.2), infatti si ottengono rispettivamente ponendo $\alpha = \beta = 1$ e $\alpha = \lambda,\ \beta = 0$. Viceversa, assumendo la (12.1′), abbiamo $L(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) = L(\alpha\vec{v}) + L(\beta\vec{u}) = \alpha L(\vec{v}) + \beta L(\vec{u})$.

12.23. Si ha $\dim \mathrm{Im} L = \mathrm{rg} A = 5$, $\dim \ker L = \dim(\text{“dominio”}) - \mathrm{rg} A = 7 - 5 = 2$.

12.24. Per l'uguaglianza (12.13′) abbiamo $\dim \ker L = \dim \mathbb{R}^8 - \dim \mathrm{Im} L \geq 8 - 5 = 3$. Per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim\big(\ker L \cap W\big) = \dim \ker L + \dim W - \dim\big(\ker L + W\big) \geq 3 + 6 - 8 = 1 .$$

13.2, 13.4. Vengono risolti entrambi nell'osservazione (13.6).

13.11. Un vettore $\vec{v}$ che appartenesse a due autospazi V_λ e V_μ dovrebbe soddisfare $L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ e $L(\vec{v}) = \mu\vec{v}$. Ma questo implicherebbe $(\lambda - \mu)\vec{v} = \vec{0}$!

13.19. Risulta $A\cdot\vec{v} = 2\vec{v}$, quindi, per l'osservazione (13.18), $A^2\cdot\vec{v} = 4\vec{v}$, $A^3\cdot\vec{v} = 8\vec{v}$, $A^5\cdot\vec{v} = 32\vec{v}$, $A^{14}\cdot\vec{v} = 16384\vec{v}$.

14.1. La funzione $\mathcal{C}_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che a un vettore associa le sue coordinate è lineare (le coordinate di una c.l. di vettori sono la c.l. delle coordinate dei vettori). Naturalmente, anche la funzione inversa $\mathcal{C}_V^{-1}$ è lineare. Ne segue che L_{coord} è lineare in quanto composizione di tre applicazioni (tutte lineari):

$$\begin{array}{cccccccc} L_{coord}: & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathcal{C}_V^{-1}} & V & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\mathcal{C}_W} & \mathbb{R}^m \\ & \vec{\lambda} & \mapsto & \vec{v} = \sum \lambda_i \vec{v}_i & \mapsto & L(\vec{v}) & \mapsto & \mathcal{C}_W\big(L(\vec{v})\big) \end{array}$$

16.9. Consideriamo delle basi degli spazi in questione e denotiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme di tutti i vettori di tali basi. Dire che esiste un insieme dipendente di vettori non nulli $I = \{\vec{w}_{i_1}, ..., \vec{w}_{i_r}\}$ tale che $\vec{w}_{i_1} \in W_{i_1}$, ..., $\vec{w}_{i_r} \in W_{i_r}$ equivale a dire $\mathcal{B}$ è un insieme dipendente. Infatti tali vettori si scrivono come c.l. di vettori in $\mathcal{B}$ e, viceversa, raccogliendo opportunamente i vettori di una c.l. di vettori in $\mathcal{B}$ possiamo produrre I. Ridiciamolo nei termini della definizione data nell'inciso 13.10: presi comunque dei vettori non nulli $\vec{w}_{i_1} \in W_{i_1}$, ..., $\vec{w}_{i_r} \in W_{i_r}$ si ha che $\vec{w}_{i_1}$, ..., $\vec{w}_{i_r}$ sono vettori indipendenti se e solo se $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente. D'altro canto $\mathcal{B}$ genera lo spazio somma $W_1 + ... + W_k$, quindi è un insieme indipendente se e solo se la sua cardinalità (che è uguale alla somma delle dimensioni dei W_i) è uguale alla dimensione di tale spazio somma.

II

GEOMETRIA EUCLIDEA

Nei primi 6 paragrafi di questo capitolo studiamo il piano Euclideo $\mathbb{R}^2$ e lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Non introduciamo in modo rigoroso le nozioni di piano e spazio Euclideo astratto, questo perché ci costerebbe del lavoro tutto sommato inutile alle luce di quelli che sono i nostri obiettivi e del fatto che si tratta di nozioni per certi versi familiari. Pertanto, gli oggetti del nostro studio saranno

- $\mathbb{R}^2$, i cui elementi li consideriamo come "punti" (cfr. anche inciso cap. I, §11.16), ed il cui soggiacente spazio vettoriale dei vettori geometrici (def. 1.2 e 1.5) è dotato del prodotto scalare (1.7′);
- $\mathbb{R}^3$, dotato di analoga struttura (cfr. §4).

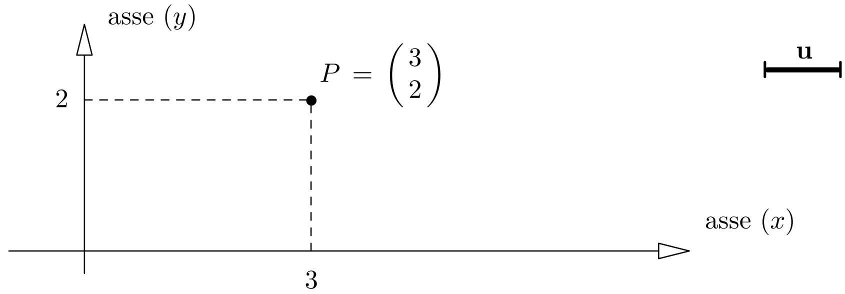
Questo significa che limiteremo il nostro studio ai modelli[15] $\mathbb{R}^2$ di piano Euclideo ed $\mathbb{R}^3$ di spazio Euclideo. Inoltre, per mantenere l'intuizione geometrica spesso ci riferiremo alle nozioni naïves di piano e spazio Euclideo viste alle superiori, anzi queste nozioni ci faranno sostanzialmente da guida.

Nel § 7 studiamo la geometria Euclidea di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico (l'approccio algebrico consentirà una trattazione rigorosa).

§1. Geometria Euclidea del piano.

Consideriamo un piano $\mathcal{H}$ (quello che avete conosciuto alle scuole superiori e del quale né allora né mai vedrete una definizione formale), fissiamo un *sistema di riferimento* ed una unità di misura (vedi figura 1.1). Ad ogni punto $P \in \mathcal{H}$ possiamo associare le sue coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e viceversa. In questo modo i punti del piano vengono messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}^2$.

(fig. 1.1)



Un oggetto di questo tipo lo chiameremo *piano Euclideo*.

Per ragioni che saranno più chiare in seguito conviene introdurre la nozione di *vettore geometrico*, oggetto che in un certo senso rappresenta uno spostamento e che viene definito nel modo che segue.

[15] L'uso di questo termine sottintende il fatto che, ad esempio, un piano Euclideo astratto è un oggetto matematico che (qualunque cosa sia!) è isomorfo (letteralmente, "stessa forma"), cioè è identificabile, all'"oggetto $\mathbb{R}^2$" del nostro studio. Una piccola precisazione per chi avesse incontrato il concetto di isomorfismo in altri ambiti: qui "isomorfo" significa "isomorfo come piano Euclideo".

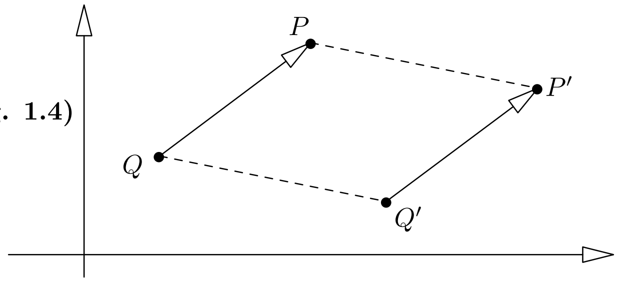
Definizione 1.2. Un *segmento orientato* $\overline{QP}$ è un segmento che ha un estremo iniziale Q ed un estremo finale P. Dichiariamo equivalenti due segmenti orientati $\overline{QP}$ e $\overline{Q'P'}$ se coincidono a meno di una traslazione del piano (cioè se sono due lati opposti di un parallelogramma). Per definizione, un *vettore geometrico del piano* è una classe di equivalenza di segmenti orientati.

Si osservi che, per definizione, i due segmenti orientati indicati nella figura (1.4) rappresentano lo stesso vettore geometrico.

Definizione 1.3. Siano $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ le coordinate di due punti Q e P. Per definizione, le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{QP}$ sono $\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la definizione è *ben posta*: le coordinate di un vettore geometrico non dipendono dal segmento orientato scelto per rappresentarlo (vedi figura 1.4).

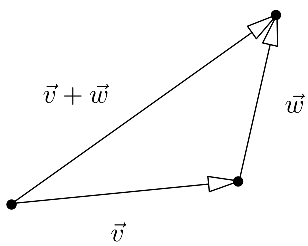
(fig. 1.4)



chiaramente,
$$\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_x - q'_x \\ p'_y - q'_y \end{pmatrix}.$$

Osservazione/Definizione 1.5. L'insieme dei vettori geometrici è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$. Definiamo la somma di due vettori geometrici ed il prodotto di un vettore geometrico per uno scalare utilizzando le corrispondenti operazioni definite per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Chiaramente, queste operazioni arricchiscono l'insieme dei vettori geometrici di una struttura di spazio vettoriale (cap. I, §8 def. 8.8). Graficamente, la somma di due vettori geometrici è l'operazione rappresentata nella figura (1.6).

(fig. 1.6)



Osserviamo che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ possono essere interpretati sia come punti del piano $\mathcal{H}$ che come vettori geometrici di $\mathcal{H}$. Ci stiamo complicando inutilmente la vita? Forse ce la stiamo complicando, ma non inutilmente: è estremamente utile mantenere le due nozioni "punti" e "vettori geometrici" distinte. D'ora in poi dirò semplicemente "vettore" invece di "vettore geometrico".

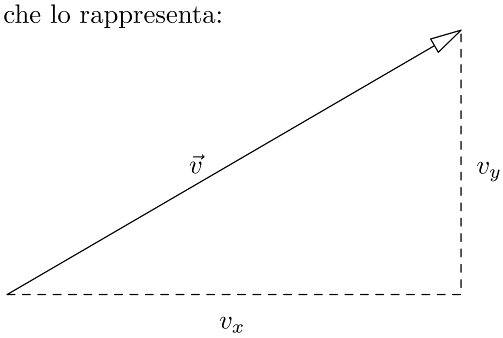
Definizione 1.7. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ due vettori. Si definisce il loro *prodotto scalare* mediante la formula

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad := \quad v_x w_x \; + \; v_y w_y \; . \tag{1.7′}$$

Definizione 1.8. Si definisce inoltre la norma, o lunghezza, di un vettore ponendo

$$\|\, \vec{v} \,\| \quad := \quad \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad = \quad \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Osservazione. Per il teorema di Pitagora, la norma del vettore $\vec{v}$ coincide con la lunghezza di un segmento orientato che lo rappresenta:



Osservazione 1.9. Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante e sia $\vec{v}$ un vettore. Si ha

$$\| c\vec{v} \| \quad = \quad |c| \cdot \| \vec{v} \|$$

dove $|c|$ denota il valore assoluto di c.

Osservazione 1.10. È facilissimo verificare che valgono le proprietà che seguono:

i) $\vec{v} \cdot \vec{w} \; = \; \vec{w} \cdot \vec{v}$ (proprietà commutativa);
ii) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{u}) \; = \; \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$ (proprietà distributiva);
iii) $\lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) \; = \; (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} \; = \; \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w})$ (omogeneità).

Proposizione 1.11 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Si ha*

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \quad \leq \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Dimostrazione. Si deve verificare che

$$|v_x w_x \; + \; v_y w_y| \quad \leq \quad \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \cdot \sqrt{(w_x)^2 + (w_y)^2} \; .$$

Questa verifica la lasciamo per esercizio. □

Nel paragrafo § 7 verrà dimostrata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per lo spazio $\mathbb{R}^n$ (con n arbitrario).

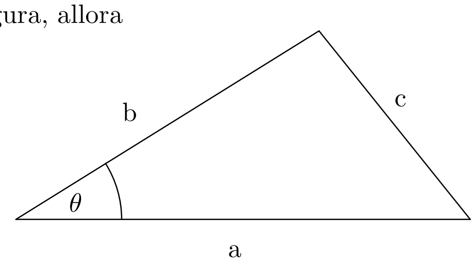
Proposizione 1.12. *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano. Si ha*[16]

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad = \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

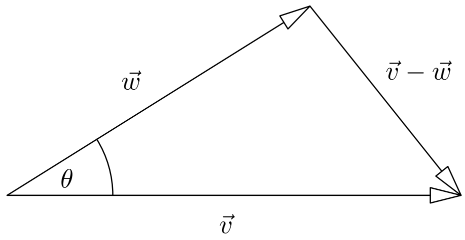
Dimostrazione. Alle scuole superiori abbiamo visto che se a, b, c sono le misure dei lati di un triangolo e θ è l'angolo indicato nella figura, allora

$$a \cdot b \cdot \cos\theta \quad = \quad \tfrac{1}{2}\big(a^2 + b^2 - c^2\big)$$



[16] Non abbiamo mai definito l'angolo compreso tra due vettori; rispetto al nostro modo di procedere, sarebbe più corretto definire l'angolo θ compreso tra due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come l'arco-coseno di $\vec{v}\cdot\vec{w} \big/ \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$ (numero che per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ha valore assoluto minore o uguale ad uno). Cfr. § 7.

Applicando questa regola al triangolo individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (per rappresentare i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ usiamo dei segmenti orientati che hanno origine nello stesso punto, non importa quale esso sia)



$$a \;=\; \|\vec{v}\| \qquad b \;=\; \|\vec{w}\| \qquad c \;=\; \|\vec{v}-\vec{w}\|$$

troviamo

$$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta \quad=\quad \frac{1}{2}\big(\|\vec{v}\|^2 \,+\, \|\vec{w}\|^2 \,-\, \|\vec{v}-\vec{w}\|^2\big) \quad=\quad \vec{v}\cdot\vec{w}$$

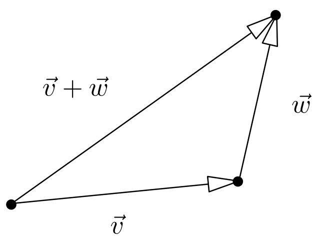
(la verifica dell'ultima uguaglianza è un facile esercizio: basta scrivere per esteso le espressioni ivi coinvolte). □

Osservazione 1.13. In particolare, due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo (per definizione, il vettore nullo si considera ortogonale ad ogni vettore).

Proposizione 1.14 (disuguaglianza triangolare)**.** *Si ha* $\|\vec{v}+\vec{w}\| \;\le\; \|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

Dimostrazione. Infatti, $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 \;=\; \big(\vec{v}+\vec{w}\big)\cdot\big(\vec{v}+\vec{w}\big) \;=\; \|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{v} \;\le\; \|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+2|\vec{v}\cdot\vec{w}| \;\le\; \|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+2\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\| \;=\; \big(\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|\big)^2$ (la seconda disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). □

Osserviamo che la disuguaglianza triangolare ci dice che la lunghezza di un lato di un triangolo non può superare la somma delle lunghezze degli altri due lati:



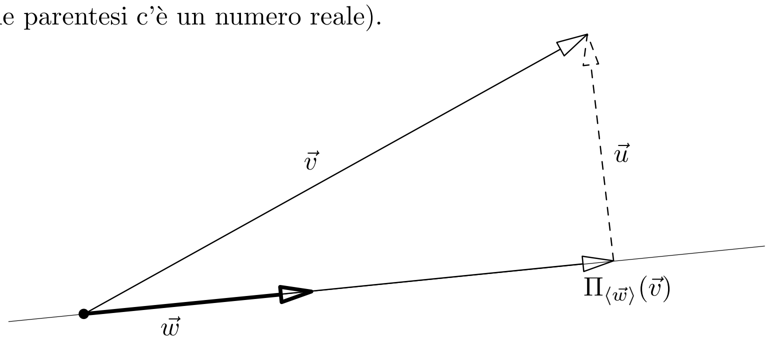
$$\|\vec{v}+\vec{w}\| \;\le\; \|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$$

La Proposizione 1.12, o meglio, l'osservazione 1.13, ci consente di calcolare le proiezioni ortogonali (figura 1.16). Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano ed assumiamo $\vec{w}\neq 0$. La proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$, che denoteremo con $\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v})$, è il vettore

$$\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v}) \quad=\quad \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w} \tag{1.15}$$

(si osservi che tra le parentesi c'è un numero reale).

(fig. 1.16)



Dimostrazione. Il vettore $\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}$ è un multiplo del vettore $\vec{w}$, quindi è sufficiente verificare che il vettore differenza $\vec{u} := \vec{v} - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}$ è effettivamente perpendicolare al vettore $\vec{w}$. Effettuiamo tale verifica (calcoliamo il prodotto scalare $\vec{w}\cdot\vec{u}$): si ha $\vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\left[\vec{v} - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}\right] = \vec{v}\cdot\vec{w} - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)(\vec{w}\cdot\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w} - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\|\vec{w}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{v}\cdot\vec{w} = 0.$ □

Esercizio. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ due vettori del piano Euclideo. Determinare la proiezione di $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$.

Soluzione. Applicando la formula (1.15) si ha: $\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\cdot\vec{w} = \frac{10}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$ □

Esercizio 1.17. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare la proiezione $\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v})$.

Esercizio 1.18. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Determinare

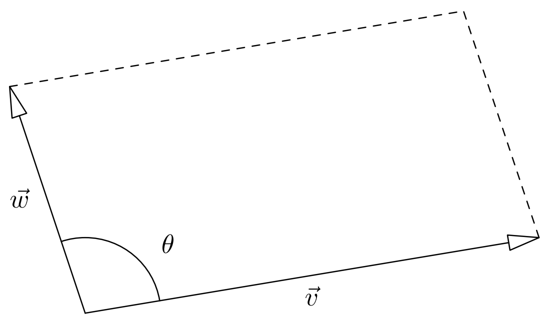
a) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w}$;
b) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{u}_1$;
c) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{u}_2$.

Un altro corollario della Proposizione 1.12 è la proposizione che segue.

Proposizione 1.19. *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano e sia $\mathcal{A}$ l'area del parallelogramma che individuano (vedi figura). Si ha*

$$\mathcal{A} \quad = \quad |\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}|\ ,$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (valore assoluto).



Dimostrazione. Dalle scuole superiori sappiamo che $\mathcal{A} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\operatorname{sen}\theta$ (essendo θ l'angolo individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$), quindi è sufficiente provare che

$$\|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta \quad = \quad \left(\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}\right)^2 .$$

Si ha $\|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta = \|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2\cdot(1-\cos^2\theta) = \|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2\cdot\cos^2\theta = \|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2 - \left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2$, dove quest'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione 1.12. A questo punto resta da provare che

$$\|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2 - \left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2 \quad = \quad \left(\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}\right)^2 .$$

Per verificare quest'ultima formula è sufficiente calcolare esplicitamente ambo i membri dell'uguaglianza (il conto algebrico non ha nulla di interessante quindi lo omettiamo; lo studente lo svolga per esercizio). □

Gli esercizi che seguono sono parte integrante della teoria (=lo studente si risolva).

Esercizio 1.20. Determinare le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato di estremo iniziale $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ ed estremo finale $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Disegnare i due punti ed il vettore.

Esercizio 1.21. Dire quali sono le coordinate dell'estremo finale di un segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed il cui estremo iniziale è il punto $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Disegnare i due punti ed il vettore.

Esercizio 1.22. Determinare l'estremo iniziale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \end{pmatrix}$ e che ha per estremo finale il punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare la distanza tra i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Tale distanza è la lunghezza del vettore $\vec{v} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\operatorname{dist}\{P, Q\} \quad = \quad \|\vec{v}\| \quad = \quad \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| \quad = \quad \sqrt{6^2 + 4^2} \quad = \quad \sqrt{52}\,. \qquad \square$$

Esercizio 1.23. Determinare le misure dei lati del triangolo di vertici
$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.24. Trovare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.25. Determinare i coseni degli angoli interni del triangolo di vertici
$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.
Suggerimento: si considerino i vettori rappresentati da $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ eccetera.

Esercizio 1.26. Trovare:

a) un vettore di norma uno;

b) un vettore di norma uno parallelo al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

c) un vettore ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

d) un vettore di norma 52 ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: si utilizzi l'osservazione (1.9).

Esercizio 1.27. Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.28. Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$. Disegnare i vettori ed il parallelogramma.

Esercizio 1.29. Determinare le aree dei triangoli degli esercizi (1.23) e (1.25).

§2. Rette nel piano.

Secondo la definizione data nel cap. I, §11, una retta nel piano è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1. Considerando $\mathbb{R}^2$ come piano Euclideo manteniamo la stessa definizione. Naturalmente, considerando $\mathbb{R}^2$ come piano Euclideo[17], anche sulle rette che vi giacciono sarà possibile misurare le distanze; in questo caso parleremo di *rette Euclidee*.

Per agevolare la lettura ricordiamo la definizione vista (adattandola al "nostro" piano Euclideo $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$).

Definizione. Una *retta* r del piano $\mathcal{H}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ che soddisfano un'equazione di primo grado, i.e. un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0 , \tag{2.1}$$

con a e b non entrambi nulli. Tale equazione si chiama *equazione cartesiana* della retta r.

Esiste un modo equivalente di introdurre la nozione di retta:

Definizione. Una *retta* r del piano $\mathcal{H}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} , \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{2.2}$$

dove $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è un punto fissato, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ è un vettore fissato e $t \in \mathbb{R}$ è un parametro (ad ogni valore di t corrisponde un punto di r). Si noti che la (2.2) può essere scritta nella forma compatta

$$P(t) = P_0 + t\vec{v} , \qquad \vec{v} \neq \vec{0} . \tag{2.2$'$}$$

Le equazioni (2.2) prendono il nome di *equazioni parametriche* della retta r.

Nota. Può apparire bislacco sommare un vettore a un punto! ...a parte il fatto che nulla vieta di definire algebricamente una tale somma (come somma delle coordinate), la cosa ha geometricamente senso: la somma nella (2.2) $P_0+t\vec{v}$ ha il significato geometrico di considerare l'estremo finale del segmento orientato rappresentato dal vettore $t\vec{v}$, di estremo iniziale P_0.

L'equivalenza delle due definizioni enunciate segue immediatamente dalla possibilità di passare da un'equazione cartesiana a equazioni parametriche e viceversa. Risolvendo il "sistema lineare" costituito dall'equazione (2.1) con i metodi visti nel capitolo I otteniamo, in particolare, equazioni del tipo (2.2) (dove t è un parametro libero, vedi cap. I, §2). Il passaggio da equazioni parametriche a cartesiane si effettua semplicemente eliminando il parametro libero t, i.e. ricavando t da una delle due equazioni e sostituendo l'espressione trovata nell'altra.

Esempio 2.3. Se r è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases} ,$$

dalla prima equazione troviamo $t = (x-2)/5$, sostituendo questa espressione nella seconda equazione troviamo $y = 3 - 2(x-2)/5 = (19-2x)/5$, ovvero $2x + 5y - 19 = 0$; quest'ultima è un'equazione cartesiana di r.

[17] Ricordo che come visto nel paragrafo precedente questo significa avere la possibilità di misurare distanze e angoli.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = -18 - 15t \\ y = 11 + 6t \end{cases}.$$

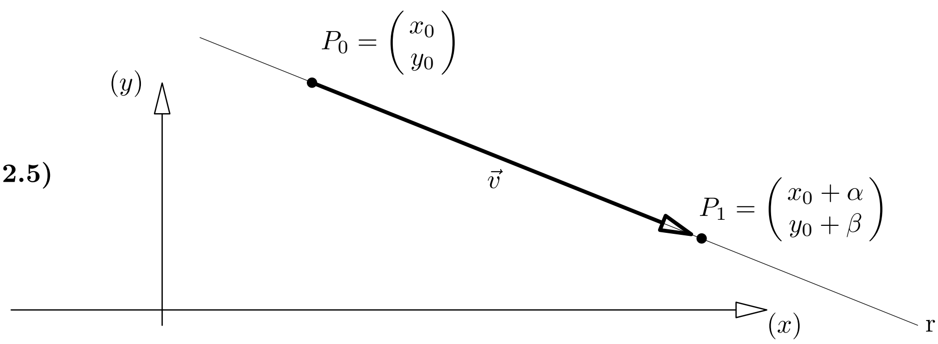
Se avete svolto correttamente l'esercizio avete ritrovato la retta dell'esempio precedente, chiaramente equazioni diverse possono rappresentare la stessa retta.

I coefficienti delle equazioni che descrivono una retta hanno una importante interpretazione geometrica. Cominciamo col caso parametrico (equazioni 2.2).

Proposizione 2.4. *Si consideri la retta descritta dalle equazioni parametriche* (2.2). *Si ha che il punto* $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *appartiene alla retta, mentre il vettore* $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *è un vettore parallelo alla retta* (*cfr. fig.* 2.5).

Dimostrazione. Il punto P_0 appartiene alle retta in quanto lo otteniamo sostituendo il valore $t = 0$ nelle equazioni (2.2), mentre $\vec{v}$ è il vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{P_0P_1}$, (essendo P_1 il punto della retta ottenuto sostituendo il valore $t = 1$).

(fig. 2.5)



□

Esempio. Il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta dell'esempio (2.3), il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ è parallelo a tale retta.

Esercizio 2.6. Determinare delle equazioni parametriche della retta passante per il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Naturalmente la proposizione precedente può essere sfruttata per scrivere le equazioni parametriche della retta passante per due punti.

Osservazione 2.7. La retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ è descritta dalle equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = p_x + \alpha t \\ y = p_y + \beta t \end{cases}, \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \end{pmatrix}$$

Esempio. La retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ è descritta dalle equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{PQ}$.

Esercizio 2.8. Determinare delle equazioni parametriche che descrivono la retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Proposizione 2.9. *Si ha la seguente interpretazione geometrica: il vettore* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *è ortogonale alla retta* r *di equazione cartesiana* $ax + by + c = 0$ (equaz. 2.1).

Dimostrazione. La retta r è parallela alla retta r' di equazione $ax + by = 0$ (dimostratelo per esercizio!), quindi è sufficiente verificare che il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è ortogonale alla retta r'. Poiché la retta r' passa per l'origine, i punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che ne soddisfano l'equazione rappresentano anche vettori paralleli ad essa. D'altro canto, poiché l'espressione $ax + by$ coincide con quella del prodotto scalare $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, i punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di r' sono i punti del piano le cui coordinate annullano tale prodotto scalare. Infine, per l'osservazione (1.13) l'annullarsi del prodotto scalare è la condizione di ortogonalità, pertanto l'equazione di r' definisce la retta passante per l'origine ed ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. □

La proposizione precedente può essere utilizzata per scrivere un'equazione cartesiana per la retta ortogonale ad un vettore e passante per un punto dati: la retta r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$ax + by - ap_x - bp_y = 0 .$$

Infatti, il fatto che r debba avere un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$ segue dalla proposizione precedente, il passaggio per P impone la condizione $ap_x + bp_y + c = 0$, ovvero fornisce $c = -ap_x - bp_y$.

Esempio. La retta r ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$2x + 5y - 21 = 0 .$$

Esercizio 2.10. Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta s di equazione $2x - 3y + 1 = 0$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 7t \end{cases}$.

Soluzione #1. Si trova un'equazione cartesiana di s e si procede come per l'esercizio precedente. □

Soluzione #2. Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ è parallelo ad s, ovvero ad r. Quindi $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un vettore ortogonale ad r. Per la Proposizione 2.9, r ha un'equazione del tipo $7x - 2y + c = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo $c = -46$. □

Soluzione #3. La retta r è descritta dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 5 + 7t \end{cases}$. Un'equazione cartesiana la troviamo eliminando il parametro t. □

Esercizio 2.11. Determinare un'equazione cartesiana per la retta r passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.12. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed ortogonale alla retta r di equazione $2x - 3y - 4 = 0$.

L'intersezione di due rette si determina mettendo a sistema le rispettive equazioni cartesiane. Si avrà un'unica soluzione quando le rette non sono parallele, si avranno infinite soluzioni se le rette coincidono, mentre il sistema sarà incompatibile nel caso in cui le rette sono parallele e distinte.

Esempio. Se r ed s sono le rette di equazioni cartesiane $2x-y+5 = 0$ e $3x+y-10 = 0$, risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 2x - y + 5 &= 0 \\ 3x + y - 10 &= 0 \end{cases}$ si trova che si intersecano nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare l'intersezione della retta r di equazione cartesiana $4x-3y+8 = 0$ con la retta s di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$.

Soluzione. Naturalmente potremmo trovare un'equazione cartesiana di s e procedere come nell'esempio. Un altro modo di procedere è il seguente: $P(t) = \begin{pmatrix} 3-t \\ 8-2t \end{pmatrix}$ è il punto generico di s, sostituendone le coordinate nell'equazione di r troviamo

$$4(3-t) - 3(8-2t) + 8 = 0\,, \qquad \text{quindi } t = 2\,.$$

Questo significa che il punto di s che corrisponde al valore del parametro $t = 2$ appartiene anche ad r. In definitiva $r \cap s = P(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

□

Il caso in cui entrambe le rette sono data in forma parametrica si tratta in modo analogo (o si confronta il punto generico dell'una con quello dell'altra, oppure si determina l'equazione cartesiana di una o entrambe le rette e si procede come sopra).

Esercizio 2.13. Determinare equazioni cartesiane per le rette che seguono.

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases}; \qquad r_2 : \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 14 - 10t \end{cases}; \qquad r_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases}; \qquad r_4 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}.$$

Esercizio 2.14. Determinare equazioni parametriche per le rette che seguono.

$$r_1 :\ 5x - 2y - 7 = 0\,; \qquad r_2 :\ x - 2 = 0\,; \qquad r_3 :\ y = 0\,; \qquad r_4 :\ x - y = 0\,.$$

Esercizio 2.15. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ed ortogonale alla retta r di equazione $2x - 3y - 4 = 0$.

Esercizio 2.16. Determinare delle equazioni parametriche che descrivono la retta passante per il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

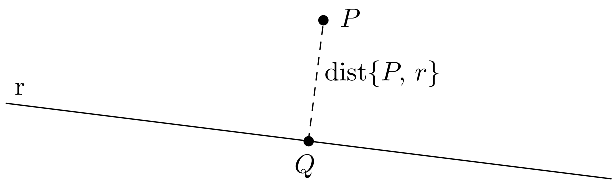
Esercizio 2.17. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.18. Determinare equazioni parametriche della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Proposizione. *Sia* r *la retta di equazione* $ax + by + c = 0$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ *un punto del piano. La distanza di* P *da* r, *che per definizione è la "distanza minima", cioè il minimo tra le distanze di* P *dai punti di* r, *è data dalla formula*

$$\text{dist}\{P,\, r\} \quad = \quad \frac{|\, ap_x + bp_y + c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \tag{2.19}$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (*valore assoluto*).



Naturalmente va osservato che tale distanza minima esiste e viene realizzata dal punto Q (vedi figura) di intersezione della retta r con la retta ortogonale ad essa passante per P. Per questa ragione Q viene detto anche

proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.

Dimostrazione. Effettuiamo il calcolo esplicito: la retta s passante per P ed ortogonale ad r ha equazioni parametriche (cfr prop. 2.6)

$$\begin{cases} x &= p_x + at \\ y &= p_y + bt \end{cases}$$

sostituendo queste equazioni nell'equazione cartesiana di r si ottiene l'equazione

$$a(p_x + at) + b(p_y + bt) + c \quad = \quad 0\,,$$

quindi si trova che l'intersezione $r \cap s$ è data dal punto $Q = \begin{pmatrix} p_x + at_0 \\ p_y + bt_0 \end{pmatrix}$, dove $t_0 = (-ap_x - bp_y - c)/(a^2+b^2)$. Infine, calcolando la distanza tra i punti P e Q (che è anche la distanza del punto P dalla retta r) si ottiene il risultato annunciato:

$$\text{dist}\{P,\, r\} \quad = \quad \|\overline{PQ}\| \quad = \quad \left\|\begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix}\right\| \quad = \quad |t_0| \cdot \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| \quad = \quad \frac{|-ap_x - bp_y - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \qquad \square$$

La formula della distanza punto-retta è per un certo verso molto naturale. Infatti, l'espressione $ap_x + bp_y + c$ si annulla sui punti di r, quindi definisce una funzione che si annulla proprio sui punti che hanno distanza nulla dalla retta, ed è una funzione di primo grado in x ed y. Ora, restringendo la nostra attenzione ad uno dei due semipiani in cui r divide il piano, anche la nostra funzione distanza deve essere rappresentata da una funzione di primo grado in x ed y e poiché anch'essa si annulla su r, deve essere proporzionale alla funzione $ap_x + bp_y + c$. Pertanto la distanza cercata deve soddisfare un'equazione del tipo

$$\text{dist}\{P,\, r\} \quad = \quad \gamma \cdot |\, ap_x + bp_y + c\,|\,, \tag{$\star$}$$

dove γ è una costante (= **non** dipende dal punto P) opportuna. Quanto al fatto che risulta $\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ voglio far notare che tale valore rende l'espressione ($\star$) invariante per cambiamenti dell'equazione cartesiana scelta per rappresentare r ...ed una formula che si rispetti deve soddisfare tale condizione di invarianza!

Esercizio. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione cartesiana $x + 2y - 3 = 0$.

Soluzione. Applicando la formula della distanza si trova

$$\text{dist}\{P, r\} \;=\; \tfrac{|\,4+2\cdot 7-3\,|}{\sqrt{1^2+2^2}} \;=\; \tfrac{15}{\sqrt{5}} \;=\; 3\sqrt{5}\,.$$

□

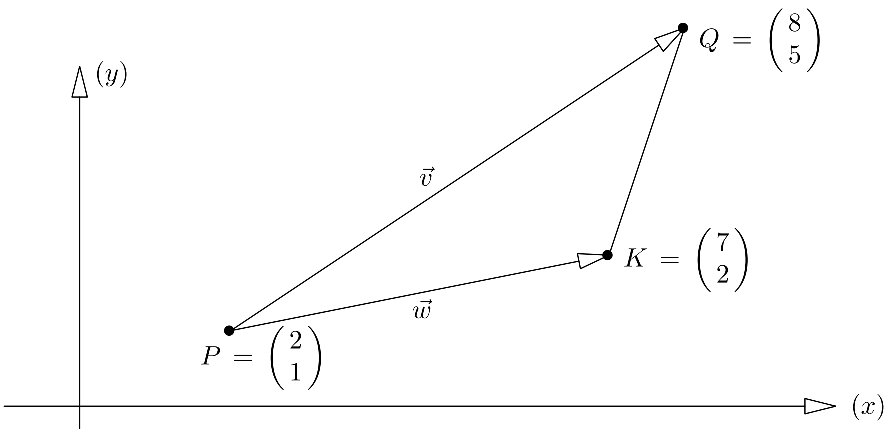
Esercizio 2.20. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione $5x - 2y - 7 = 0$.

§3. Geometria Euclidea del piano: applicazioni ed esercizi.

In questo paragrafo illustriamo come si risolvono alcuni problemi elementari.

Esercizio 3.1. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Consideriamo i vettori $\vec{v} := \overline{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} := \overline{PK} = \begin{pmatrix} K_x - P_x \\ K_y - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vedi figura).



Si ha

$$\mathcal{A} \;=\; \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}\right| \;=\; \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right| \;=\; 7\,.$$

□

Esercizio 3.2. Calcolare le aree dei triangoli $\mathbb{T}_1$ di vertici $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\mathbb{T}_2$ di vertici $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.3. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del quadrilatero irregolare (disegnatelo) di vertici $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: dividetelo in due triangoli, quindi procedete come nell'esercizio precedente.

Esercizio 3.4. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del pentagono irregolare di vertici $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: dividetelo in tre triangoli.

Esercizio 3.5. Determinare il punto K ottenuto proiettando ortogonalmente il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $x + 2y - 3 = 0$.

Soluzione #1. La retta r è descritta dalle equazioni parametriche (verificare!)

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases}.$$

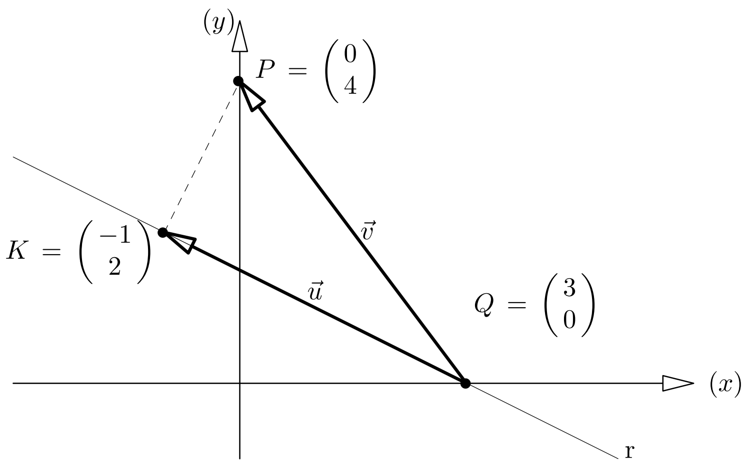
In particolare, il punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad r nonché il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad r. Proiettando il vettore $\vec{v} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sulla direzione individuata da $\vec{w}$ otteniamo

$$\vec{u} = \Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} = \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il punto K è l'estremo finale di un segmento orientato rappresentante il vettore $\vec{u}$ e che ha origine nel punto Q (vedi figura), abbiamo

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(è opportuno verificare che le coordinate del punto K soddisfano l'equazione che definisce la retta r e che il vettore $\overline{KP} = \binom{0-(-1)}{4-2} = \binom{1}{2}$ è perpendicolare al vettore $\vec{w} = \binom{-2}{1}$, i.e. il loro prodotto scalare è nullo. Queste due verifiche garantiscono la correttezza del risultato trovato).



$\square$

Soluzione #2. Il punto K è il punto di intersezione della retta r con la retta ortogonale ad r passante per P. Quest'ultima ha equazioni parametriche

$$(\star) \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$$

Sostituendo queste equazioni nell'equazione di r troviamo $t+2(4+2t)-3 = 0$, quindi $t = -1$. Sostituendo il valore $t = -1$ nelle equazioni $(\star)$ troviamo $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\square$

Si osservi che essendo K la proiezione ortogonale di P su r, si ha

$$\mathrm{dist}\{P,\, r\} \;=\; \mathrm{dist}\{P,\, K\} \;=\; \left\|\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\right\| \;=\; \left\|\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right\| \;=\; \sqrt{5}$$

(questo è in accordo col valore $\frac{|8-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ previsto dalla formula (2.19)).

Esercizio 3.6. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $3x + 2y - 13 = 0$.

Esercizio 3.7. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $4x - y - 4 = 0$.

Esercizio 3.8. Determinare il punto medio M tra i punti $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Il punto M è l'estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P rappresentato dal vettore $\frac{1}{2}\big(\overline{PQ}\big)$: $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)\right] = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ (notiamo che si ottiene la semi-somma delle coordinate di P e Q).

$\square$

Esercizio 3.9. Determinare un'equazione cartesiana dell'asse del segmento di vertici $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Tale asse è ortogonale al vettore $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, quindi è descritto da un'equazione del tipo $6x - 4y + c = 0$. La costante c si può determinare in due modi: *i*) si impone che la retta indicata sia equidistante da P e Q (dall'equazione $|6\cdot(-1) - 4\cdot 7 + c| = |6\cdot 5 - 4\cdot 3 + c|$ si trova $c = 8$);
ii) si impone il passaggio per il punto medio $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ tra P e Q.

$\square$

Esercizio 3.10. Siano $A = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$. Determinare la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$.

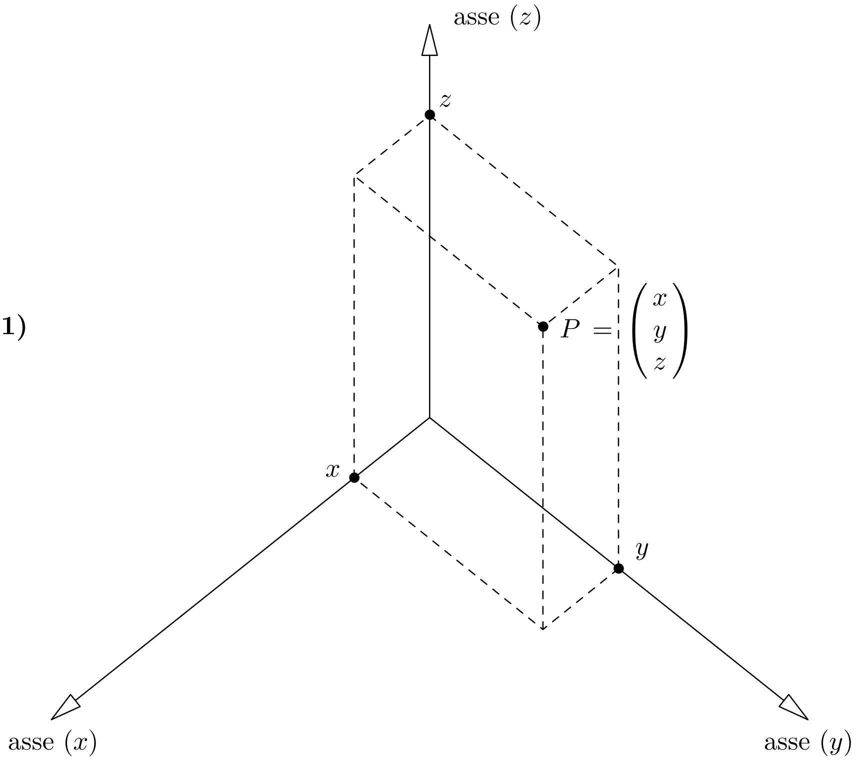
Soluzione. Risulta $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$, poniamo $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{dist}\{O,\,B\}}{\mathrm{dist}\{O,\,A\}}\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ (è il punto sulla semiretta di origine O, contenente A, avente distanza da O pari alla distanza $\mathrm{dist}\{O,\,B\}$, convincersene!). Notiamo che gli angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'OB}$ sono uguali, ma il triangolo di vertici A', O, B ha il vantaggio di essere isoscele (di vertice O).
La bisettrice cercata è la retta passante per i punti $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $M = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (punto medio tra A' e B). Ha equazione $x - y + 1 = 0$.

$\square$

§4. Geometria Euclidea dello spazio.

Molte definizioni e risultati che vedremo in questo paragrafo generalizzano quelli visti studiando il piano. Consideriamo lo spazio $\mathcal{S}$ (cfr. introduzione al capitolo) e fissiamo un *sistema di riferimento* ed una unità di misura (figura 4.1). Ad ogni punto $P \in \mathcal{S}$ possiamo associare le sue coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e viceversa (figura 4.1). In questo modo i punti dello spazio vengono messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}^3$.

(fig. 4.1)



Definizione 4.2. Un *segmento orientato* è un segmento che ha un estremo iniziale Q ed un estremo finale P. Dichiariamo equivalenti due segmenti orientati $\overline{QP}$ e $\overline{Q'P'}$ se coincidono a meno di una traslazione dello spazio (cioè se sono due lati opposti di un parallelogramma). Per definizione, un *vettore geometrico dello spazio* è una classe di equivalenza di segmenti orientati.

Definizione 4.3. Siano $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ le coordinate di due punti Q e P. Per definizione, le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{QP}$ sono $\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \\ p_z - q_z \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la definizione è ben posta: le coordinate di un vettore geometrico non dipendono dal segmento orientato scelto per rappresentarlo (cfr. §1).

Osservazione/Definizione. L'insieme dei vettori geometrici dello spazio è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^3$. Definiamo la somma di due vettori geometrici ed il prodotto di un vettore geometrico per uno scalare utilizzando le corrispondenti operazioni definite per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Chiaramente, queste operazioni arricchiscono l'insieme dei vettori geometrici dello spazio $\mathcal{S}$ di una struttura di spazio vettoriale (cfr. cap. I, §8 def. 8.8). La somma di due vettori geometrici è l'operazione analoga a quella vista studiando il piano (cfr. §1).

Definizione 4.3. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ due vettori. Si definisce il loro *prodotto scalare* mediante la formula

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad := \quad v_x w_x \,+\, v_y w_y \,+\, v_z w_z \ .$$

Si definisce inoltre la norma, o lunghezza, di un vettore ponendo

$$\|\vec{v}\| \quad := \quad \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad = \quad \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Osservazione. Analogamente a quanto accadeva per i vettori del piano, la norma del vettore $\vec{v}$ coincide con la lunghezza di un segmento orientato che lo rappresenta. Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$ è una costante e $\vec{v}$ è un vettore si ha

$$\|\, c\vec{v}\,\| \quad = \quad |c| \cdot \|\,\vec{v}\,\|$$

(cfr. oss. 1.9). Continuano a valere anche le proprietà (1.10), la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1.11), la disuguaglianza triangolare e la Proposizione 1.12. Quest'ultima la ricordiamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad = \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta \tag{4.4}$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Osservazione. Di nuovo, due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo (cfr. oss. 1.13).

L'osservazione precedente ci consente di calcolare le proiezioni ortogonali: se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori dello spazio (assumiamo $\vec{w} \neq \vec{0}$), la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$, che denoteremo con $\Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v})$, è il vettore

$$\Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) \quad = \quad \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \cdot \vec{w} \tag{4.5}$$

(la dimostrazione è identica a quella vista nel §1).

Passando dal piano allo spazio, la Proposizione 1.14 diventa più complicata:

Proposizione 4.6. *Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tre vettori dello spazio e sia $\mathcal{V}$ il volume del parallelepipedo (sghembo) che individuano. Si ha*

$$\mathcal{V} \quad = \quad \left|\, \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \right| ,$$

dove, come al solito, le barre verticali denotano il valore assoluto.

La dimostrazione di questa proposizione la vedremo più avanti.

Nello spazio, esiste una nuova operazione tra vettori.

Definizione 4.7. Dati due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$, il *prodotto vettoriale* di $\vec{v}$ con $\vec{w}$, che si denota scrivendo $\vec{v} \wedge \vec{w}$, è il vettore

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \quad := \quad \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ -v_x w_z + v_z w_x \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}.$$

C'è un modo per ricordarsi questa definizione. Infatti si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \tag{4.7$'$}$$

dove $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si noti che nella matrice indicata ci sono dei vettori nella prima riga e dei numeri nelle altre righe, questo non è un problema: "il determinante è una formula" e per come sono disposti vettori e numeri dentro la matrice in questione tale formula può essere applicata. Ma vediamo cosa si ottiene. Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} \quad &= \quad \vec{e}_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} \; - \; \vec{e}_2 \cdot \det \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} \; + \; \vec{e}_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \\ &= \quad (v_y w_z - v_z w_y)\, \vec{e}_1 \; + \; (-v_x w_z + v_z w_x)\, \vec{e}_2 \; + \; (v_x w_y - v_y w_x)\, \vec{e}_3 \ , \end{aligned} \tag{4.7$''$}$$

che è proprio l'espressione della Definizione 4.7. Osserviamo che le coordinate di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sono (a meno del segno) i determinanti dei tre minori di ordine 2 della matrice $\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$, in particolare sono tutte nulle se e solo se tale matrice ha rango strettamente minore di due, ovvero se e solo i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono dipendenti. Ribadiamo il risultato trovato:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \;=\; \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono dipendenti.} \tag{4.8}$$

La (4.7$'$), o se preferite la (4.7$''$), ha altre conseguenze importanti:

Proposizione 4.9. *Il prodotto vettoriale è bi-lineare (= lineare come funzione di ognuno dei suoi due argomenti) e antisimmetrico. Cioè:*

$$\begin{aligned} &\vec{v} \wedge (\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) \quad = \quad \lambda \vec{v} \wedge \vec{w}_1 \; + \; \mu \vec{v} \wedge \vec{w}_2 \ , \\ &(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) \wedge \vec{w} \quad = \quad \lambda \vec{v}_1 \wedge \vec{w} \; + \; \mu \vec{v}_2 \wedge \vec{w} \ , \\ &\vec{v} \wedge \vec{w} \quad = \quad -\vec{w} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

per ogni scelta delle costanti e dei vettori indicati.

Si osservi che il prodotto vettoriale **non** è commutativo (tant'è che $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$).

Dimostrazione. Segue dalla (4.7$'$) e dalle analoghe proprietà del determinante. □

Lemma 4.10. *Siano* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *tre vettori. Risulta*

$$(4.10') \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} .$$

Dimostrazione. L'espressione $(v_y w_z - v_z w_y) u_x + (-v_x w_z + v_z w_x) u_y + (v_x w_y - v_y w_x) u_z$ è esattamente ciò che si ottiene sia scrivendo il prodotto scalare a sinistra dell'uguaglianza che scrivendo lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga del determinante a destra. □

Il prodotto della (4.10′) è molto importante, tant'è che gli è stato dato un nome:

Definizione 4.11. Il prodotto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ si chiama *prodotto misto* (dei vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

Ora ci poniamo l'obiettivo di caratterizzare geometricamente il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Già sappiamo che questo si annulla quando $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono dipendenti (osservazione 4.8), quindi assumiamo che ciò non accada, cioè che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ individuino un piano. In questo caso:

(4.12) $\qquad \vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Dimostrazione. È sufficiente verificare che ogni vettore di tale piano è ortogonale a $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Se $\vec{u}$ è un vettore appartenente a tale piano, cioè se è una combinazione lineare dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, allora il determinante che compare nella (4.10′) si annulla, quindi il prodotto misto si annulla, quindi $\vec{u}$ e $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sono ortogonali. □

Resta da capire qual è la norma (lunghezza) e qual è il verso di $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Questi sono rispettivamente l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ed il verso che rende positiva l'orientazione della terna $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ (cioè, in termini algebrici, si richiede che il determinante della matrice associata ai tre vettori sia positivo; è opportuno notare che noti due vettori, direzione e modulo del terzo, ad ognuno dei due possibili versi del terzo corrisponde uno dei due segni del determinante della matrice associata ai tre vettori, si veda anche l'inciso 4.14. In termini "fisici", si richiede che la posizione nello spazio dei tre vettori, nell'ordine indicato, appaia come quella di pollice indice e medio della mano destra). Ricapitolando:

Proprietà 4.13. *Da un punto di visto geometrico il prodotto vettoriale è caratterizzato dalle proprietà che seguono.*

i) $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ *se e solo se* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *sono dipendenti;*

ii) $\vec{v} \wedge \vec{w} \perp \mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ (*il simbolo* $\perp$ *denota l'ortogonalità*);

iii) *la norma di* $\vec{v} \wedge \vec{w}$ *è uguale all'area del parallelogramma individuato da* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$*;*

iv) *se* $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$*, la terna* $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ *è positivamente orientata.*

Dimostrazione. Le proprietà *i)* e *ii)* sono la (4.8) e la (4.12) (ricordiamo la convenzione secondo la quale il vettore nullo è ortogonale a qualsiasi vettore). Proviamo la *iii)*. Indichiamo con $\mathcal{A}$ e θ l'area del parallelogramma e l'angolo individuati da $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Risulta

$$\mathcal{A}^2 \;=\; \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta \;=\; \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \;=\; \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

(si noti che l'espressione che appare a destra è un polinomio[18] che sappiamo scrivere). D'altro canto anche l'espressione $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2$ è un polinomio che sappiamo scrivere (def. 4.7 e 4.3). Queste due espressioni coincidono (lo studente le scriva entrambe).
La proprietà *iv)* merita un approfondimento sul concetto di orientazione, la dimostriamo nell'inciso che segue (cfr. inciso 4.14). □

[18] Nelle coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Inciso 4.14. Consideriamo una base ordinata[19] $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Ci sono due possibilità: il determinante della matrice associata ai vettori può essere positivo o negativo. Nel primo caso diremo che $\mathcal{B}$ è *positivamente orientata*, nel secondo caso diremo che è *negativamente orientata*. Utilizzando questa definizione la dimostrazione della proprietà (4.13, *iv*)) è immediata: posto $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, il determinante della matrice associata alla terna $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ soddisfa

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v} & \vec{w} & \vec{v} \wedge \vec{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \overset{\text{Lemma (4.10)}}{=} \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 > 0$$

Appena prima della (4.13) abbiamo introdotto anche una nozione a priori differente: abbiamo detto che una terna (ordinata, indipendente) di vettori è positivamente orientata se “la posizione nello spazio dei tre vettori, nell'ordine indicato, appare come quella di pollice indice e medio della mano destra”. Dietro l'equivalenza delle due definizioni ci sono alcuni fatti e una convenzione:

I fatti. Dato uno spazio vettoriale[20] astratto (cap. I, def. 8.8), l'insieme di tutte le sue possibili basi (ordinate) è dotato di una naturale relazione di equivalenza che lo divide in due sottoinsiemi: due basi appartengono allo stesso sottoinsieme se e solo se il determinante della matrice del cambiamento di base è positivo; equivalentemente, è possibile passare dall'una all'altra con continuità. Per “l'esempio spazio fisico” i due sottoinsiemi di cui sopra sono rispettivamente quelli costituiti dalle basi identificabili con pollice, medio e indice della mano destra e quelli costituiti dalle basi identificabili con la mano sinistra. Questa affermazione vale per ragioni di continuità (mi rendo conto che ciò possa sembrare un po' “scivoloso”, visto che lo spazio fisico matematicamente non esiste; naturalmente esiste -matematicamente- il modello $\mathbb{R}^3$ che lo rappresenta ...ma per esso non ha alcun senso parlare di mano destra o sinistra!). Per definizione, un'orientazione di uno spazio vettoriale è la scelta di uno dei due possibili insiemi ed una base si dirà positivamente orientata se appartiene all'insieme scelto. Non esiste una scelta universale, per l'esempio $\mathbb{R}^3$ si sceglie l'insieme contenente la base canonica, per lo spazio fisico si sceglie l'insieme individuato (vedi sopra) dalla mano destra.

La convenzione. Lo spazio fisico si rappresenta orientando i tre assi coordinati in modo che siano sovrapponibili a pollice, medio e indice della mano destra (cioè come nella figura 4.1).

Studiando la geometria Euclidea del piano abbiamo visto che l'area del parallelogramma individuato da due vettori è il modulo del determinante associato (Proposizione 1.19). Nello spazio abbiamo che l'area del parallelogramma individuato da due vettori è la norma del loro prodotto vettoriale. Faccio notare che questi due risultati sono molto meno distanti di quanto possa sembrare, o meglio che il secondo generalizza il primo: due vettori nel piano li possiamo considerare come vettori nello spazio introducendo una terza coordinata nulla, d'altro canto risulta

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

e la norma di questo vettore è il modulo della sua terza coordinata (l'unica non nulla), che a sua volta è il modulo del determinante della matrice $\begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}$.

Finalmente, come promesso, dimostriamo la Proposizione 4.6.

Dimostrazione (*della Proposizione* 4.6). Assumiamo che i tre vettori siano indipendenti

[19] Questo significa che fissiamo l'ordine in cui scriviamo i vettori.
[20] Finitamente generato.

(altrimenti il volume ed il determinante in questione sono nulli e non c'è nulla da dimostrare). Sia $\mathcal{P}$ il parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sia $\mathcal{A}$ la sua area e sia θ l'angolo compreso tra il vettore $\vec{u}$ ed il piano del parallelogramma $\mathcal{P}$. Si osservi che l'angolo compreso tra $\vec{u}$ e la retta ortogonale al parallelogramma $\mathcal{P}$ è pari a $\pi/2-\theta$ e che questa retta rappresenta la direzione individuata dal vettore $\vec{v}\wedge\vec{w}$ (proprietà 4.13, *ii*)). Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \;=\; \mathcal{A}\cdot\|\vec{u}\|\cdot|\mathrm{sen}\,\theta| \;&=\; \mathcal{A}\cdot\|\vec{u}\|\cdot\big|\cos\big(\pi/2-\theta\big)\big| \\
&=\; \|\vec{v}\wedge\vec{w}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\big|\cos\big(\pi/2-\theta\big)\big| \\
&=\; |\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})| \\
&=\; \left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}\right|
\end{aligned}$$

dove la 1^a uguaglianza segue dal fatto che l'altezza relativa alla base $\mathcal{P}$ del nostro parallelepipedo vale $\|\vec{u}\|\cdot|\mathrm{sen}\,\theta|$, la 2^a è ovvia, la 3^a segue dalla proprietà (4.13, *iii*)) del prodotto vettoriale, la 4^a dalla formula (4.4), la 5^a dalla (4.10′). □

Concludiamo il paragrafo con alcuni esercizi che lo studente dovrebbe essere in grado di risolvere senza problemi (le tecniche di risoluzione viste nei paragrafi relativi al piano Euclideo si adattano mutatis mutandis anche allo spazio Euclideo).

Esercizio 4.15. Si considerino i seguenti punti e vettori geometrici dello spazio Euclideo:

$$P=\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}-7\\18\\5\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{z}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

a) Calcolare le coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato $\overline{QR}$;

b) determinare l'estremo iniziale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$, di estremo finale il punto P;

c) calcolare la distanza tra i punti P e Q;

d) calcolare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

e) trovare un vettore di norma 35 parallelo al vettore $\vec{u}$;

f) trovare un vettore ortogonale al vettore $\vec{v}$;

g) trovare due vettori indipendenti ortogonali al vettore $\vec{v}$;

h) calcolare i prodotti vettoriali $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{u}\wedge\vec{z}$, $\vec{w}\wedge\vec{z}$
(in tutti i casi, verificare che il risultato ottenuto è ortogonale a entrambi gli argomenti);

i) trovare due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ortogonali tra loro ed ortogonali al vettore $\vec{u}$;

l) calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

m) calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q, R;

n) calcolare i coseni degli angoli interni del triangolo di vertici P, Q, R;

o) calcolare il volume del parallelepipedo sghembo di spigoli $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$.

p) calcolare il volume Ω del parallelepipedo di spigoli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ (dove $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono i vettori del punto di domanda *i*)), verificare che risulta $\Omega=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| = 7\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$, interpretare geometricamente questo risultato;

q) supponiamo di occupare la posizione del punto R e di guardare un topolino che cammina lungo il triangolo di vertici O, P, Q (essendo O l'origine di $\mathbb{R}^3$) seguendo il percorso $O \rightsquigarrow P \rightsquigarrow Q \rightsquigarrow O$. In quale verso lo vedrò girare (orario o antiorario)?

§5. Rette e piani nello spazio.

Per definizione, rette e piani nello spazio $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ sono rispettivamente i sottospazi affini di dimensione 1 ed i sottospazi affini di dimensione 2. Dalla teoria svolta sui sistemi lineari questi possono essere definiti sia per via cartesiana che parametrica. Per fissare le notazioni ed agevolare la lettura ricordiamo le definizioni.

Definizione. Un *piano* π dello spazio $\mathcal{S}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano un'equazione di primo grado (detta *equazione cartesiana*), cioè un'equazione del tipo

$$(5.1) \qquad ax + by + cz + d = 0 , \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = 1$$

(i.e. a, b, c non sono tutti nulli). Equivalentemente, è il luogo dei punti P descritto parametricamente dalle equazioni

$$(5.2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t + \mu_1 s \\ y = y_0 + \lambda_2 t + \mu_2 s \\ z = z_0 + \lambda_3 t + \mu_3 s \end{cases} , \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{pmatrix} = 2$$

dove x_0, y_0, z_0, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 sono coefficienti fissati (soddisfacenti la condizione indicata) e dove t ed s sono parametri liberi.

Come sappiamo, l'equivalenza delle due formulazioni segue dal fatto che è possibile passare dalla (5.1) alla (5.2) risolvendo il sistema lineare (che essendo di rango 1 produrrà 2 parametri liberi) e, viceversa, è possibile passare dalla (5.2) alla (5.1) eliminando i parametri.

Definizione. Una *retta* r dello spazio $\mathcal{S}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano un sistema lineare (le cui equazioni sono dette *equazioni cartesiane*) del tipo

$$(5.3) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} , \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 .$$

Equivalentemente, è il luogo dei punti P descritto parametricamente dalle equazioni

$$(5.4) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases} , \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 1$$

dove x_0, y_0, z_0, α_1, α_2, α_3 sono coefficienti fissati (soddisfacenti la condizione indicata) e dove, come al solito, t è un parametro libero.

Di nuovo, la condizione sul rango della matrice incompleta associata al sistema (5.3) ne assicura la compatibilità ed il fatto che questo ha soluzioni dipendenti da un parametro libero, ovvero soluzioni come descritto dalla (5.4). Naturalmente, l'eliminazione del parametro consente il passaggio inverso, quello dalla (5.4) alla (5.3).

Va osservato che ognuna delle due equazioni che compaiono nella (5.3) descrive un piano, metterle a sistema significa considerare l'intersezione dei piani che (prese singolarmente) descrivono. La già citata condizione sul rango della matrice incompleta associata al sistema (5.3) è, da un punto di vista geometrico, la condizione di non parallelismo tra i piani che stiamo intersecando.

Ora vogliamo fornire un'interpretazione geometrica dei coefficienti $x_0,\ y_0,\ z_0, \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,$ $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ che compaiono nelle equazioni parametriche (5.2) e (5.4). A tal fine introduciamo il punto P_0 ed i vettori geometrici $\vec{\lambda},\ \vec{\mu},\ \vec{\alpha}$ ponendo

$$P_0 \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},\ \vec{\mu} \;=\; \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix},\ \vec{\alpha} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Usando la notazione introdotta possiamo riscrivere la (5.2) e la (5.4) come segue

$$(5.2') \qquad P(t,\,s) \;=\; P_0 \;+\; t\,\vec{\lambda} \;+\; s\,\vec{\mu}\,, \qquad \dim \mathrm{Span}\,\{\vec{\lambda}, \vec{\mu}\} \;=\; 2$$

$$(5.4') \qquad P(t) \;=\; P_0 \;+\; t\,\vec{\alpha}\,, \qquad \vec{\alpha} \neq \vec{0}$$

Come già osservato nel paragrafo § 2, notiamo che sommare un vettore a un punto ha il significato geometrico di considerare l'estremo finale del segmento orientato rappresentato dal vettore di estremo iniziale il punto. Il motivo per il quale si sceglie di interpretare la terna $x_0,\ y_0,\ z_0$ come punto e le terne $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ come vettori geometrici (che è la domanda che probabilmente vi state ponendo!) sta nei seguenti fatti:

i) Il punto P_0 è effettivamente un punto del piano π si ottiene per $t = s = 0$ (ovvero è un punto della retta r, si ottiene per $t = 0$);

ii) i vettori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ sono vettori[21] paralleli al piano π (ovvero $\vec{\alpha}$ è un vettore parallelo alla retta r);

iii) $P(t,\,s)$, che **è** un punto in quanto elemento del piano π, è l'estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P_0, rappresentato dal vettore $t\vec{\lambda}+s\vec{\mu}$ (ovvero è l'estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P_0, rappresentato dal vettore $t\vec{\alpha}$).

Osserviamo che come conseguenza della proprietà *ii)* e della (4.13, *i)* e *ii)*) risulta

$$(5.5) \qquad \vec{\lambda}\wedge\vec{\mu} \quad \perp \quad \pi \qquad\qquad (\text{nonché } \vec{\lambda}\wedge\vec{\mu} \;\neq\; \vec{0}\,)\,.$$

Anche i coefficienti delle equazioni cartesiane (5.1) e (5.3) hanno una interpretazione geometrica:

(5.6) Il vettore di coordinate $a,\ b,\ c$ è un vettore (non nullo per ipotesi) ortogonale al piano π;

(5.7) il piano generato dai vettori di coordinate $a,\ b,\ c$ ed $a',\ b',\ c'$ $\big($indipendenti per l'ipotesi rango$\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{smallmatrix}\right) = 2$ nella 5.3$\big)$ è ortogonale alla retta r.

Dimostrazione. La dimostrazione della (5.6) è identica a quella della Proposizione (2.9): l'espressione $ax+by+cz$ coincide col prodotto scalare dei vettori $\vec{n}$ e $\vec{v}$ rispettivamente di coordinate $a,\ b,\ c$ e $x,\ y,\ z$, ne segue che i punti del piano π' di equazione $ax+by+cz = 0$ sono gli estremi finali dei vettori $\vec{v}$ ortogonali ad $\vec{n}$, di estremo iniziale l'origine, ovvero che π' è ortogonale ad $\vec{n}$. Essendo π' e π' paralleli, anche π è ortogonale ad $\vec{n}$.
La (5.7) segue dalla (5.6): il vettore $\vec{n}$ di coordinate $a,\ b,\ c$ è ortogonale ad un piano contenente r (il piano descritto dalla prima equazione), quindi è ortogonale ad r, stesso discorso per il vettore $\vec{n}'$ di coordinate $a',\ b',\ c'$. Abbiamo due vettori ($\vec{n}$ ed $\vec{n}'$) entrambi ortogonali ad r, anche il piano che generano è ortogonale ad r. □

---

[21] Mentre interpretarli come punti non avrebbe alcun significato geometrico.

Alla luce del fatto che il prodotto vettoriale di due vettori indipendenti è ortogonale (e non nullo) al piano che essi generano (proprietà 4.13, *i*) e *ii*)), la (5.7) può essere riscritta nella forma

$$(5.7') \qquad \text{il prodotto vettoriale } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ è parallelo alla retta } r\,.$$

Esempio. Sia r la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 \;=\; 0 \\ 3x + 5y - 8z + 19 \;=\; 0 \end{cases}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -23 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$ è parallelo ad essa.

Naturalmente le interpretazioni geometriche dei coefficienti delle equazioni di rette e piani possono essere utilizzate per scrivere le equazioni di rette e piani dei quali ne conosciamo una descrizione geometrica. Per intenderci, ad esempio, dovendo scrivere equazioni parametriche per il piano passante per un dato punto P_0 nonché parallelo ai vettori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ scriveremo l'equazione (5.2). Vediamo un altro esempio: dovendo scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per il punto P_0 di coordinate $5,\ 1,\ 3$, ortogonale al vettore di coordinate $2,\ 7,\ 4$, scriveremo l'equazione (5.1) $2x + 7y + 4z - 29 \;=\; 0$ (avendo ricavato $d = -29$ imponendo il passaggio per P_0).

Esercizio 5.8. Si considerino i punti e vettori geometrici che seguono

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere equazioni parametriche per il piano passante per P, parallelo ai vettori $\vec{v},\ \vec{w}$;
b) scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per Q, ortogonale al vettore $\vec{r}$;
c) scrivere equazioni parametriche per la retta passante per P, parallela al vettore $\vec{v}$;
d) scrivere equazioni cartesiane per la retta passante per Q, ortogonale ai vettori $\vec{w},\ \vec{r}$.

Nell'esercizio precedente le informazioni delle quali abbiamo bisogno sono "immediatamente disponibili", quando ciò non accade... le cerchiamo! Ad esempio, qualora ci venga chiesto di scrivere un'equazione cartesiana per il piano di cui all'esercizio (5.8, a)), calcoleremo il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (in modo da ottenere un vettore ortogonale al piano in questione, ovvero i coefficienti $a,\ b,\ c$ di una sua equazione cartesiana), quindi imporremo il passaggio per il punto P per determinare il coefficiente d.

Tornando un momento alla (5.2), poiché i vettori λ e μ sono paralleli al piano ivi descritto ed il punto P_0 di coordinate $x_0,\ y_0,\ z_0$ vi appartiene, abbiamo la seguente interessante rilettura di quanto appena osservato:

Osservazione 5.9. Il piano π definito dal sistema (5.2) ha equazione cartesiana

$$(5.9') \qquad ax + by + cz + d \;=\; 0$$

dove $a,\ b,\ c$ sono le coordinate del prodotto vettoriale $\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu}$ e dove $d \;=\; -ax_0 - by_0 - cz_0$ (si noti che la condizione su d garantisce il passaggio per il punto P_0).

Naturalmente, per trovare un'equazione cartesiana del piano definito dal sistema (5.2) si può procedere anche eliminando i parametri.

Esercizio. Scrivere, sia equazioni cartesiane che parametriche per ognuno dei piani e rette dell'esercizio (5.8).

Abbiamo introdotto rette e piani in $\mathbb{R}^3$ come oggetti descritti da equazioni cartesiane, ovvero parametriche. Le equazioni parametriche di rette e piani le abbiamo scritte nelle forme (5.4′) e (5.2′) osservando quale fosse il significato del punto e dei vettori che vi appaiono. Ci proponiamo di andare un minimo più a fondo su queste equazioni.

Cominciamo col caso della retta descritta dalla (5.4′). Il punto $P_1 := P(1)$ è l'estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P_0 rappresentato da dal vettore α (ed è distinto da P_0 in quanto $\vec{\alpha}$ è non-nullo). Visto che la coppia $P_0,\ P_1$ determina la coppia $P_0,\ \vec{\alpha}$ e viceversa, abbiamo la seguente conseguenza:

per due punti distinti passa una ed una sola retta

(il risultato è ben noto, quello che stiamo dicendo è che lo abbiamo dedotto dalla nostra definizione di retta). Un'altra conseguenza è la seguente:

Osservazione 5.10. Siano $A,\, B,\, C$ tre punti dello spazio. Questi risultano allineati (cioè esiste una retta che li contiene) se e solo se i due vettori rappresentati da $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ sono dipendenti.

Dimostrazione. Assumendo A e B distinti (altrimenti il risultato è banale), il punto C appartiene alla retta di equazione $P(t) = A + t\overline{AB}$ se e solo se si ottiene per un qualche valore $\tilde{t}$, cioè se e solo se possiamo scrivere $C = A + \tilde{t}\,\overline{AB}$, se e solo se $\overline{AC} = \tilde{t}\,\overline{AB}$. □

Passiamo ora al caso del piano descritto dalla (5.2′), posto $Q := P(1,\,0) = P_0 + \vec{\lambda}$ ed $R := P(0,\,1) = P_0 + \vec{\mu}$, essendo $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ indipendenti abbiamo tre punti non-allineati (oss. 5.10) appartenenti al piano in questione. La terna $P_0,\ Q,\ R$ determina la terna $P_0,\ \vec{\lambda},\ \vec{\mu}$ e viceversa, i vettori che si ottengono partendo da una terna di punti non allineati sono indipendenti (di nuovo, oss. 5.10). Pertanto

per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano

Di nuovo, da notare che (al di là dell'evidenza "fisica") abbiamo dedotto questo risultato dalla nostra definizione di piano.

Le considerazioni viste ci dicono anche come scrivere le equazioni della retta passante per due punti, ovvero del piano passante per tre punti non allineati: si tratta di scegliere un punto e calcolare il vettore rappresentato dal segmento orientato che lo congiunge con l'altro punto, ovvero di scegliere un punto e calcolare i vettori rappresentati dai segmenti orientati che lo congiungono con gli altri due punti. Ovviamente scelte diverse porteranno a equazioni diverse (ma sappiamo bene che lo stesso oggetto può essere rappresentato in modi differenti).

È opportuno osservare che quanto abbiamo detto già lo sapevamo: si tratta di casi particolari della Proposizione (11.17). Ad esempio, per $n = 3$ e $k = 2$ la proposizione citata ci dice che per tre punti non allineati[22] passa uno ed un solo piano (ivi descritto sia come "$V + P_0$" che come "più piccolo piano affine contenente i tre punti").

Esercizio 5.11. Scrivere equazioni parametriche per il piano passante per i punti

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: calcolare $\vec{\lambda} = \overline{PQ}$ e $\vec{\mu} = \overline{PK}$.

[22] Essendo $k = 2$, il termine "generici" che appare nella Proposizione (11.14) significa, come definito poco prima "non contenuti in nessuno spazio affine di dimensione 1"

Le intersezioni tra piani, tra rette, tra rette e piani, si determinano mettendo a sistema le equazioni **cartesiane** degli oggetti geometrici in questione.

Infatti, molto più in generale "intersecare" corrisponde a "mettere a sistema equazioni": ad esempio, se A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ognuno dei quali è definito come il luogo comune degli zeri di un certo insieme di equazioni, un punto P appartiene alla loro intersezione se e solo se soddisfa il sistema costituito da tutte le equazioni in questione.

Naturalmente questo discorso vale per le equazioni cartesiane, equazioni che sono "condizioni". Se gli oggetti in questione sono definiti tramite equazioni parametriche, equazioni che di fatto sono un modo di "elencarne gli elementi", si procede in modo del tutto analogo a quanto visto nel § 10 per l'intersezione di spazi vettoriali. Vediamo qualche esempio.

Esercizio. Determinare il punto P di intersezione della retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 + 3t \end{cases}$ con il piano $\mathcal{H}$ di equazione cartesiana $x - 3y + 5z - 43 = 0$.

Soluzione. Sostituendo $x = 2 + 7t$, $y = 5 + 2t$, $z = 8 + 3t$ nell'equazione di $\mathcal{H}$ troviamo $(2+7t) - 3(5+2t) + 5(8+3t) - 43 = 0$, quindi $t = 1$. Sostituendo il valore $t = 1$ nelle equazioni parametriche di r troviamo le coordinate $9,\ 7,\ 11$ (del punto $P = \mathcal{H} \cap r$). $\square$

Esercizio. Determinare un'equazione parametrica della retta r ottenuta intersecando i piani $\mathcal{H} := \begin{cases} x = 2 + 7t + 2s \\ y = 4 + 2t - 6s \\ z = 8 + 3t + 5s \end{cases}$ ed $\mathcal{H}' := \left\{ 8x - 3y - 7z - 4 = 0 \right\}$.

Soluzione #1. Innanzi tutto si trova un'equazione cartesiana anche per il piano $\mathcal{H}$ (utilizzando la (5.9) oppure eliminando i parametri). Quindi, si risolve il sistema costituito dall'equazione trovata e l'equazione di $\mathcal{H}'$. $\square$

Soluzione #2. Imponendo che le espressioni $2+7t+2s$, $4+2t-6s$, $8+3t+5s$ soddisfino l'equazione di $\mathcal{H}'$ si trovano le coordinate dei punti di $\mathcal{H}$ che appartengono anche ad $\mathcal{H}'$ (=punti della retta r). Operativamente, questo significa che si procede come segue: sostituendo le espressioni di cui sopra nell'equazione di $\mathcal{H}'$ si trova $8(2+7t+2s) - 3(4+2t-6s) - 7(8+3t+5s) - 4 = 0$, quindi $s = 29t - 56$. Ne segue che il sistema

$$\begin{cases} x = 2 + 7t + 2(29t-56) = -110 + 65t \\ y = 4 + 2t - 6(29t-56) = 340 - 172t \\ z = 8 + 3t + 5(29t-56) = -272 + 148t \end{cases}$$

descrive parametricamente la retta r. $\square$

Per quel che riguarda la distanza di un punto da un piano, vale una formula analoga alla (2.19). Si ha infatti quanto segue.

Proposizione 5.12. *Sia π il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia P un punto dello spazio (di coordinate $p_x,\ p_y,\ p_z$). La distanza di P da π, che per definizione è la "distanza minima", cioè il minimo tra le distanze di P dai punti di π, è data dalla formula*

$$\text{dist}\left\{P,\ \pi\right\} = \frac{|\,ap_x + bp_y + cp_z + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \tag{5.12'}$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (valore assoluto).

Vale un commento analogo a quello relativo alla (2.19): tale "distanza minima" esiste e viene realizzata dal punto K di intersezione del piano π con la retta r passante per P ed ortogonale a π. Di nuovo, per questo motivo tale punto K viene anche chiamato

$$\textit{proiezione ortogonale} \text{ del punto } P \text{ sul piano } \pi .$$

La dimostrazione della formula (5.12′) è del tutto identica alla dimostrazione della (2.19).

Alla luce di quanto visto all'inizio del paragrafo la retta r ortogonale a π passante per P ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = p_x + at \\ y = p_y + bt \\ z = p_z + ct \end{cases}$$

dove a, b, c sono proprio i coefficienti che appaiono nell'equazione del piano π! Questa osservazione ci consente di risolvere l'esercizio che segue.

Esercizio 5.14. Sia P il punto di coordinate $1, -4, 8$ e sia π il piano di equazione $3x+y+7z+4 = 0$. Determinare il punto K ottenuto proiettando ortogonalmente il punto P sul piano π. Verificare che la distanza $\operatorname{dist}\{P, K\}$ coincide con la distanza $\operatorname{dist}\{P, \pi\}$ prevista dalla formula (5.12′).

Soluzione. Il vettore di coordinate $3, 1, 7$ è ortogonale al piano π. Ne segue che la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4 + t \\ z = 8 + 7t \end{cases}$$

è la retta ortogonale a π passante per P. Le coordinate del punto $K = r \cap \pi$ le troviamo sostituendo le equazioni parametriche di r nell'equazione cartesiana di π (si ottiene $t = -1$), quindi sostituendo il valore $t = -1$ nelle equazioni di r si trovano le coordinate $-2, -5, 1$ del punto K. Infine,

$$\operatorname{dist}\{P, K\} = \|\overline{PK}\| = \sqrt{59}, \qquad \operatorname{dist}\{P, \pi\} = \frac{|\,3\cdot 1+1+7\cdot 7+4\,|}{\sqrt{3^2+1^2+7^2}} = \frac{59}{\sqrt{59}} = \sqrt{59}.$$

□

Quanto alla distanza punto-retta nello spazio non c'è una formula diretta. Naturalmente le definizioni sono le stesse: dati un punto P ed una retta r si definisce lo loro distanza $\operatorname{dist}\{P, r\}$ come il minimo delle distanze di P dai punti di r. Tale minimo viene realizzato dal punto K che si ottiene intersecando r con il piano ortogonale ad r passante per P. Va osservato che K è anche caratterizzato dall'essere l'unico punto di r soddisfacente la condizione $\overline{KP} \perp r$ (esattamente come nel caso discusso nel § 2 di un punto e una retta nel piano). Le coordinate del punto K possono essere determinate con metodi analoghi a quelli visti nell'esercizio (3.5) del §3:

i) si sceglie un punto Q di r, si proietta il vettore $\overline{QP}$ su un vettore parallelo ad r, si determina K come estremo finale di un segmento orientato che ha Q come estremo iniziale e che rappresenta il vettore proiezione trovato;

ii) si interseca r con il piano passante per P ortogonale a r.

Naturalmente, per calcolare la distanza di P da r dovremo prima determinare il punto di proiezione K quindi la distanza $\operatorname{dist}\{P, K\}$.

Esercizio 5.15. Determinare la proiezione K del punto P di coordinate $3, 3, 10$ sulla retta r di equazioni $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$. Calcolare inoltre la distanza $\operatorname{dist}\{P, r\}$.

Soluzione #1. Il punto $Q := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartiene ad r nonché il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad r. Proiettando il vettore $\vec{v} = \overline{QP}$ (di coordinate $-2,\ 0,\ 3$) sulla direzione individuata da $\vec{w}$ otteniamo

$$\vec{u} \;=\; \Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) \;=\; \tfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} \;=\; \tfrac{-12}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -18/7 \\ -6/7 \\ 12/7 \end{pmatrix}.$$

Poiché il punto K è l'estremo finale di un segmento orientato rappresentante il vettore $\vec{u}$ e che ha origine nel punto Q, abbiamo $K = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18/7 \\ -6/7 \\ 12/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/7 \\ 15/7 \\ 61/7 \end{pmatrix}$.

Infine risulta $\mathrm{dist}\{P,\, r\} \;=\; \mathrm{dist}\{P,\, K\} \;=\; \|\overline{PK}\| \;=\; \left\| \begin{pmatrix} 17/7 \\ 15/7 \\ 61/7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| \;=\; \frac{\sqrt{133}}{7}$.

□

Soluzione #2. Il punto K è il punto di intersezione della retta r con il piano ortogonale ad r passante per P. Quest'ultimo ha equazione cartesiana (qui usiamo l'interpretazione 5.6, quindi imponiamo il passaggio per P)

$$(\star) \qquad 3\,x \;+\; y \;-\; 2\,z \;+\; 8 \;=\; 0$$

Sostituendo le equazioni di r nell'equazione $(\star)$ troviamo $3(5{+}3t) + (3{+}t) - 2(7{-}2t) + 8 = 0$, quindi $12 + 14t = 0$. Sostituendo infine il valore $t = -6/7$ nelle equazioni di r troviamo $17/7,\ 15/7,\ 61/7$ (coordinate del punto K).

La distanza $\mathrm{dist}\{P,\, r\}$ si calcola come nella soluzione #1.

□

Esercizio 5.16. Sia $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 3 - 12t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

Determinare la proiezione ortogonale di P su r e la distanza $\mathrm{dist}\{P,\, r\}$.

Esercizio 5.17. Sia $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Determinare la proiezione ortogonale di P su r e la distanza $\mathrm{dist}\{P,\, r\}$.

§6. Geometria Euclidea dello spazio: applicazioni ed esercizi.

In questo paragrafo vediamo come si calcola la distanza tra due rette nello spazio.

Definizione 6.1. Siano r ed s due rette nello spazio, si pone

$$\operatorname{dist}\{r, s\} \quad = \quad \min\left\{ \operatorname{dist}(P, Q) \right\}_{P\in r,\, Q\in s} .$$

Supponiamo che r ed s non siano parallele (se lo sono, la distanza cercata è uguale alla distanza di un punto qualsiasi di r da s e si calcola con i metodi visti nel paragrafo precedente). Supponiamo inoltre che r ed s siano date in forma parametrica, e.g. che nella notazione introdotta con la (5.4′) siano

$$r \;:\; P(t) \;=\; P_0 + \vec{v}\,t\;, \qquad\qquad s \;:\; Q(t) \;=\; Q_0 + \vec{w}\,t\;.$$

Sia $\mathcal{H}$ il piano contenente r parallelo ad s, sia $\mathcal{H}'$ il piano contenente s parallelo ad r. Chiaramente (convincersene),

$$\operatorname{dist}\{r, s\} \quad = \quad \operatorname{dist}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}'\} \quad = \quad \operatorname{dist}\{Q, \mathcal{H}\}\;, \tag{6.2}$$

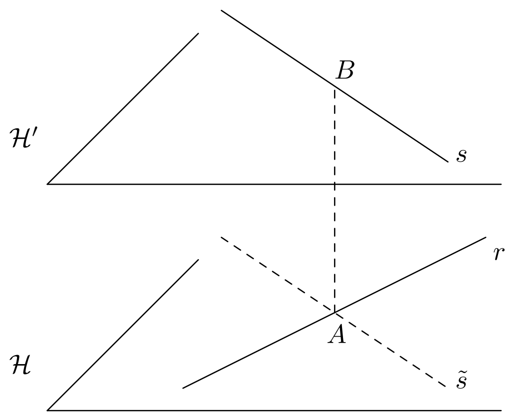
dove Q è un punto qualsiasi di $\mathcal{H}'$ (si può scegliere il punto Q_0, che è un punto di s). Queste uguaglianze ci consentono di risolvere il nostro problema: sappiamo calcolare la distanza di un punto da un piano.

Nota bene: **non** stiamo dicendo che Q_0 è il punto di s che realizza il minimo della Definizione 6.1, in generale possiamo solamente dire che $\operatorname{dist}\{Q_0, r\} \geq \operatorname{dist}\{r, s\}$.

Per trovare i punti che realizzano il minimo della Definizione 6.1, si deve lavorare un po' di più: continuando ad assumere che r ed s non siano parallele, la proiezione della retta s sul piano $\mathcal{H}$ (:= luogo dei punti ottenuti proiettando su $\mathcal{H}$ i punti di s) è una retta $\widetilde{s}$ che incontra r. Sia $A = \widetilde{s} \cap r$ e sia B il punto di s la cui proiezione è il punto A. Si ha

$$\operatorname{dist}\{r, s\} \quad = \quad \operatorname{dist}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}'\} \quad = \quad \operatorname{dist}\{A,\; B\}\;, \tag{6.3}$$

La prima uguaglianza è la stessa che appare nelle (6.2), la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\overline{AB}$ è ortogonale ad $\mathcal{H}$ come pure ad $\mathcal{H}'$ (è opportuno ricordare che i due piani sono paralleli per costruzione). Infine, poiché A e B sono rispettivamente punti di r ed s, abbiamo che sono proprio i punti che realizzano il minimo della Definizione 6.1.



Esercizio 6.4. Calcolare la distanza tra le rette (si osservi che non sono parallele)

$$r\ :\ \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + -2t \end{cases},\qquad\qquad s\ :\ \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -7 + t \end{cases}.$$

Soluzione. Il piano $\mathcal{H}$ contenente r e parallelo ad s ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t + t' \\ y = -1 + 4t + 3t' \\ z = 3 - 2t + t' \end{cases}.$$

Passando da equazioni parametriche a cartesiane troviamo che

$$(6.4')\qquad 2x - y + z - 8 = 0$$

è un'equazione cartesiana di $\mathcal{H}$. Per le osservazioni viste, posto $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ si ha

$$\operatorname{dist}\{r,\, s\} = \operatorname{dist}\{\, Q_0\,,\ \mathcal{H}\,\} = \frac{|2\cdot(-1) - 1\cdot 1 + 1\cdot(-7) - 8|}{\sqrt{4+1+1}} = 3\sqrt{6}$$

□

Esercizio 6.5. Trovare i due punti $A \in r$ e $B \in s$ tali che

$$\operatorname{dist}\{r,\, s\} = \operatorname{dist}\{A,\, B\}\ ,$$

dove r ed s sono le rette dell'esercizio precedente.

Soluzione. Una volta determinato il piano $\mathcal{H}$ contenente r e parallelo ad s (equazione 6.4′), calcoliamo la proiezione $\widetilde{s}$ di s su $\mathcal{H}$: la retta $\widetilde{s}$ si ottiene intersecando il piano $\mathcal{H}$ con il piano $\widetilde{\mathcal{H}_s}$ contenente s ed ortogonale ad $\mathcal{H}$. Questo è il piano

$$\widetilde{\mathcal{H}_s}\ :\qquad \begin{cases} x = -1 + t + 2t' \\ y = 1 + 3t - t' \\ z = -7 + t + t' \end{cases}$$

(che contenga s è ovvio: per $t' = 0$ si ottengono proprio le equazioni di s; che sia ortogonale ad $\mathcal{H}$ segue dal fatto che contiene una retta, la retta che si ottiene per $t = 0$, ortogonale ad $\mathcal{H}$). Usando l'osservazione (5.9), o eliminando i parametri, troviamo un'equazione cartesiana di $\widetilde{\mathcal{H}_s}$:

$$\widetilde{\mathcal{H}_s}\ :\qquad 4x + y - 7z - 46 = 0$$

Risulta $A = \widetilde{s} \cap r = \widetilde{\mathcal{H}_s} \cap r = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ nonché $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le coordinate di A, le abbiamo trovate sostituendo $2{+}3t,\ -1{+}4t,\ 3{-}2t$ nella equazione di $\widetilde{\mathcal{H}_s}$ (si ottiene $t = 2$, valore al quale corrisponde il punto indicato).

Quanto a B, questo può essere determinato in modo analogo a come abbiamo determinato A, cioè intersecando la retta s con il piano contenente r ed ortogonale ad $\mathcal{H}$, ma può anche essere determinato in modo più rapido: B è il punto di s la cui proiezione su $\mathcal{H}$ dà il punto A, ovvero $\overline{AB} \perp \mathcal{H}$, quindi cercare B significa cercare il punto di coordinate $-1+t,\ 1+3t,\ -7+t$ (cioè in s) per il quale $\overline{AB}$ (di coordinate $-9{+}t,\ -6{+}3t,\ -6{+}t$) è un multiplo del vettore $\vec{n}$ ($\perp \mathcal{H}$) di coordinate $2,\ -1,\ 1$ (coefficienti dell'equazione di $\mathcal{H}$), si trova $t = 3$ (che dà il punto indicato).

Naturalmente, $\|\overline{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{6}$ (in accordo con quanto già trovato).

□

§7. Geometria Euclidea di $\mathbb{R}^n$.

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato la geometria del piano Euclideo $\mathbb{R}^2$ e dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. In questo paragrafo studiamo lo spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$, ripercorriamo i risultati già visti concernenti $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, quindi trattiamo l'ortonormalizzazione, le trasformazioni lineari nel caso Euclideo ed infine introduciamo la nozione di spazio vettoriale Euclideo astratto. La vera differenza rispetto ai paragrafi precedenti non è tanto quella di considerare spazi di dimensione arbitraria (anzi la maggior parte di esercizi e problemi sono posti per $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$!) quanto piuttosto nel metodo adottato e nella natura dei risultati che si stabiliscono.

Fissiamo una volta per tutte alcune notazioni.

Notazione 7.1. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare

$$(7.1) \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad := \quad \vec{v} \cdot \vec{w} \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

essendo $v_1, ..., v_n$ e $w_1, ..., w_n$ rispettivamente le coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ viene anche detto *metrica*.

Lemma 7.2. Osserviamo che il prodotto scalare è commutativo e bi-lineare (=lineare in ognuno dei suoi due argomenti). Quest'ultima proprietà significa che le due funzioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \end{array}$$

sono lineari per ogni vettore $\vec{u}$ fissato (naturalmente, per la commutatività del prodotto scalare queste due funzioni coincidono).

Definizione 7.3. Si definisce la norma di $\vec{v}$ ponendo:

$$(7.3') \qquad \| \vec{v} \| \quad = \quad \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \; .$$

La norma di ogni vettore $\vec{v}$, in quanto radice della somma dei quadrati delle sue coordinate, è positiva e si annulla esclusivamente se $\vec{v}$ è il vettore nullo. Questa proprietà si esprime dicendo che il prodotto scalare è *definito-positivo*.

Una prima conseguenza della bilinearità del prodotto scalare è la formula seguente:

$$(7.4) \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad = \quad \frac{1}{4} \left(\| \vec{v} + \vec{w} \|^2 - \| \vec{v} - \vec{w} \|^2 \right) \; .$$

Questa identità si dimostra immediatamente usando esclusivamente la Definizione 7.3′, la commutatività e la bilinearità del prodotto scalare (Lemma 7.2), scrivendo per esteso l'espressione che compare alla sua destra (esercizio 7.5). Da notare che a destra della (7.4) non compaiono prodotti scalari ma solo norme di vettori; pertanto, in particolare, questa formula ci dice che "la norma determina il prodotto scalare".

Esercizio 7.5. Dimostrare la formula (7.4).

Proposizione 7.6 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Si ha*

$$(7.6') \qquad |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \quad \leq \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \; .$$

Dimostrazione. Se uno dei due vettori è il vettore nullo la disuguaglianza è verificata. Consideriamo ora il caso dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono entrambi non nulli. Date due costanti non nulle λ e μ, la coppia di vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ soddisfa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz se e solo se la coppia di vettori $\lambda\vec{v}$, $\mu\vec{w}$ la soddisfa. Questo accade perché sia nell'espressione a destra che in quella a sinistra della (7.6′) possiamo portare fuori le costanti (Lemma 7.2): $|\langle\lambda\vec{v}, \mu\vec{w}\rangle| = |\lambda|\cdot|\mu|\cdot|\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle|$, $\|\lambda\vec{v}\|\cdot\|\mu\vec{w}\| = |\lambda|\cdot|\mu|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$. Di conseguenza, a meno di sostituire $\vec{v}$ e $\vec{w}$ con dei loro multipli opportuni, possiamo assumere (ed assumiamo) $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$. Sotto questa ipotesi la disuguaglianza (7.6′) si riduce alla disuguaglianza $|\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle| \leq 1$. Usando la bi-linearità (Lemma 7.2) si ottiene

$$0 \leq \|\vec{w}-\vec{v}\|^2 = \langle\vec{w}-\vec{v}, \vec{w}-\vec{v}\rangle = \langle\vec{w}, \vec{w}\rangle + \langle\vec{v}, \vec{v}\rangle - \langle\vec{w}, \vec{v}\rangle - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = 2 - 2\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle$$

Questo prova la disuguaglianza $\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle \leq 1$ per ogni coppia di vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di norma 1 ed implica la tesi: avendo $\langle-\vec{v}, \vec{w}\rangle \leq 1$, si deve anche avere $\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = -\langle-\vec{v}, \vec{w}\rangle \geq -1$. □

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz consente di definire l'angolo tra due vettori non nulli. Si pone la seguente definizione.

Definizione 7.7. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non nulli si definisce l'angolo ϑ compreso tra 0 e π associato ad essi ponendo

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$$

(si noti che grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz il numero tra parentesi ha modulo minore o uguale ad uno).

Un'altra conseguenza importante della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è la disuguaglianza triangolare:

Proposizione 7.8 (disuguaglianza triangolare)**.** *Si ha*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| .$$

La dimostrazione di questa proposizione è stata già vista: cfr. Proposizione 1.14 (considerando $\mathbb{R}^n$ invece di $\mathbb{R}^2$ non cambia una virgola).

La metrica su $\mathbb{R}^n$ consente di introdurre il concetto di ortogonalità e di definire il complemento ortogonale di un sottoinsieme.

Definizione 7.9. Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si dicono *ortogonali* se $\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$. L'ortogonalita si denota col simbolo "$\perp$". Più in generale un vettore $\vec{v}$ e un sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^n$, ovvero due sottoinsiemi $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$, si dicono ortogonali se $\vec{v} \perp \vec{w}$ per ogni $\vec{w} \in W$, ovvero $\vec{u} \perp \vec{w}$ per ogni $\vec{u} \in U$ e $\vec{w} \in W$. Infine, dato un sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce il suo *complemento ortogonale*

$$W^\perp := \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \vec{v} \perp W \right\} .$$

Da notare che $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$, $\left(\mathbb{R}^n\right)^\perp = \{\vec{0}\}$.

Proposizione 7.10. *Dato un sottoinsieme* $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *risulta*

$$W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$$

Dimostrazione. Un vettore appartenente a tale intersezione sarebbe di conseguenza ortogonale a se stesso, d'altro canto sappiamo che il prodotto scalare è definito-positivo (cfr. def. 7.3): l'unico vettore ortogonale a se stesso è il vettore nullo. □

Da notare che l'insieme $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, anche quando W non lo è (è un sottoinsieme arbitrario). Infatti, per la bi-linearità del prodotto scalare, se dei vettori sono ortogonali a tutti i vettori di W anche ogni loro combinazione lineare lo è.

Definizione 7.11. Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ è una base *ortonormale* di W se

$$\|\vec{b}_i\| = 1\,,\ \ \forall\, i\,,\quad \langle\vec{b}_i, \vec{b}_j\rangle = 0\,,\ \ \forall\, i \neq j\,,$$

cioè se i vettori in $\mathcal{B}$ hanno tutti norma 1 e sono mutuamente ortogonali.

Osserviamo che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale (di $\mathbb{R}^n$ stesso).

Ora enunciamo una proposizione che consente di definire la nozione di proiezione ortogonale su un sottospazio. Questa proposizione ci dice che dati un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ ed un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ esiste un unico vettore $\vec{w} \in W$ che soddisfa la proprietà che si richiede ad una "proiezione ortogonale" che si rispetti: differisce da $\vec{v}$ di un vettore ortogonale allo spazio W.

Proposizione 7.12. *Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Si ha che*

$$\textit{esistono unici}\quad \vec{w} \in W\,,\ \vec{u} \in W^\perp \quad \textit{tali che} \quad \vec{v} = \vec{w} + \vec{u}\,.$$

Inoltre, se $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ è una base ortonormale di W, il vettore $\vec{w}$ di cui sopra è il vettore

$$\pi_W(\vec{v}) \ := \ \langle\vec{v}, \vec{b}_1\rangle\cdot\vec{b}_1 + ... + \langle\vec{v}, \vec{b}_m\rangle\cdot\vec{b}_m\,. \tag{7.12'}$$

Dimostrazione. Innanzi tutto, se potessimo scrivere $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} = \vec{w}' + \vec{u}'$, $\vec{w}, \vec{w}' \in W$, $\vec{u}, \vec{u}' \in W^\perp$, avremmo $\vec{w} - \vec{w}' = \vec{u}' - \vec{u} \in W \cap W^\perp$. Grazie alla Proposizione 7.10 ciò dimostra l'unicità della decomposizione di $\vec{v}$.
Chiaramente $\pi_W(\vec{v}) \in W$, proviamo che $\vec{v} - \pi_W(\vec{v}) \in W^\perp$. Per ogni vettore $\vec{b}_j$ risulta

$$\begin{aligned}\big\langle\vec{v} - \pi_W(\vec{v})\,,\ \vec{b}_j\big\rangle &= \big\langle\vec{v} - \sum\langle\vec{v}, \vec{b}_i\rangle\cdot\vec{b}_i\,,\ \vec{b}_j\big\rangle = \big\langle\vec{v} - \langle\vec{v}, \vec{b}_j\rangle\cdot\vec{b}_j\,,\ \vec{b}_j\big\rangle \\ &= \langle\vec{v}, \vec{b}_j\rangle - \langle\vec{v}, \vec{b}_j\rangle\langle\vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle = 0\end{aligned}$$

(si noti che usiamo le proprietà che caratterizzano le basi ortonormali, def. 7.11). Pertanto $\vec{v} - \pi_W(\vec{v})$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{B}$, quindi a ogni loro combinazione lineare, quindi allo spazio W. □

Definizione 7.13. Dato un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$, il vettore $\pi_W(\vec{v})$ introdotto nella proposizione precedente si definisce "*proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ sul sottospazio W".

Osserviamo che se $\{\vec{d}_1, ..., \vec{d}_m\}$ è una base *ortogonale* di W (non si richiede che i $\vec{d}_i$ abbiano norma uno ma solo che siano ortogonali tra loro), visto che $\{\vec{d}_1/\|\vec{d}_1\|, ..., \vec{d}_m/\|\vec{d}_1\|\}$ è una base ortonormale di W, l'uguaglianza (7.12′) diventa

$$\pi_W(\vec{v}) \ = \ \frac{\langle\vec{v}, \vec{d}_1\rangle}{\|\vec{d}_1\|^2}\cdot\vec{d}_1 + ... + \frac{\langle\vec{v}, \vec{d}_m\rangle}{\|\vec{d}_m\|^2}\cdot\vec{d}_m\,. \tag{7.12''}$$

Osservate che i singoli termini della somma qui sopra li abbiamo già incontrati: sono le proiezioni di $\vec{v}$ lungo le direzioni individuate dai $\vec{d}_i$ (cfr. formula (1.15) e (4.5)). La condizione che i $\vec{d}_i$ siano ortogonali tra loro è una condizione necessaria: in generale, la proiezione su uno "Span" di vettori indipendenti **non** è uguale alla somma delle proiezioni sulle direzioni individuate dai singoli vettori (cfr. esercizio 7.17).

Risulta $\pi_W(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\pi_W(\vec{v}_1) + \beta\pi_W(\vec{v}_2)$, cioè la funzione "proiezione su W"

$$\begin{array}{rccc} \pi_W : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \mapsto & \pi_W(\vec{v}) \end{array}$$

è lineare.

Dimostrazione #1. Segue dalla (7.12′) e dalla linearità del prodotto scalare rispetto al primo argomento (Lemma 7.2). □

Dimostrazione #2. Usiamo la proposizione che definisce la proiezione (Proposizione 7.12): se $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}_1$, $\vec{w}_1 \in W$, $\vec{u}_1 \in W^\perp$ e $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}_2$, $\vec{w}_2 \in W$, $\vec{u}_2 \in W^\perp$, allora:

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) + (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2), \quad \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W, \ \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in W^\perp.$$ □

Dato un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$, il fatto che ogni vettore in $\mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come somma di un vettore in W ed uno in $W^\perp$ si esprime dicendo che $W^\perp$ è un *complemento* di W. Da notare che per la formula di Grassmann risulta

$$\dim W^\perp = n - \dim W. \tag{7.14}$$

Osservazione 7.15. Se $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, applicando la Proposizione 7.12 al caso dove $W = \mathbb{R}^n$ si ottiene

$$\vec{v} = \pi_{\mathbb{R}^n}(\vec{v}) = \langle\vec{v}, \vec{b}_1\rangle\vec{b}_1 + ... + \langle\vec{v}, \vec{b}_n\rangle\vec{b}_n, \quad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

(la proiezione su tutto $\mathbb{R}^n$ è l'identità), cioè:

(7.15′) i coefficienti $\langle\vec{v}, \vec{b}_i\rangle$ sono le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 7.16. Si consideri $\mathbb{R}^3$ ed il piano H di equazione $2x - y + 3z = 0$.
a) Determinare una base ortogonale di H (*suggerimento*: cfr. esercizio 4.15, *i*));
b) determinare la proiezione del vettore $\vec{v}$ di coordinate $6, 5, 7$ sul piano H.

Esercizio 7.17. Si consideri la base $\{\vec{h}, \vec{k}\}$ del piano H dell'esercizio precedente, con $\vec{h}$ e $\vec{k}$ rispettivamente di coordinate $1, 2, 0$ e $0, 3, 1$.
a) Determinare le proiezioni di $\vec{v}$ lungo le direzioni individuate da $\vec{h}$ e $\vec{k}$;
b) verificate che la proiezione su H di $\vec{v}$ **non** è la somma delle proiezioni al punto *a*).

A questo punto è chiara l'importanza in geometria Euclidea dell'utilizzo di basi ortogonali o meglio ancora ortonormali. Vista tale importanza esiste un modo standard di produrre vettori ortonormali a partire da un insieme arbitrario di vettori indipendenti, il procedimento di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*: dati dei vettori indipendenti $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ produciamo un insieme di vettori ortonormali $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ che costituisce una base ortonormale dello spazio $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$. Poniamo $\vec{b}_1 := \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$ quindi definiamo induttivamente

$$\vec{b}_i := \frac{\vec{w}_i - \pi_{\mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{i-1}\}}(\vec{w}_i)}{\|\cdots\|} = \frac{\vec{w}_i - \langle\vec{w}_i, \vec{b}_1\rangle\vec{b}_1 - ... - \langle\vec{w}_i, \vec{b}_{i-1}\rangle\vec{b}_{i-1}}{\|\cdots\|}$$

dove il denominatore è la norma del vettore al numeratore (il che significa *normalizzarlo*, ovvero renderlo di norma 1). Cioè: $\vec{b}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$, il vettore $\vec{b}_2$ si ottiene normalizzando il vettore ottenuto sottraendo a $\vec{w}_2$ la sua proiezione su $\mathrm{Span}\{\vec{b}_1\} = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1\}$, si noti che così facendo risulterà $\mathrm{Span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, il vettore $\vec{b}_3$ si ottiene normalizzando il vettore ottenuto sottraendo a $\vec{w}_3$ la sua proiezione su $\mathrm{Span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ e così via. La costruzione effettuata conduce al seguente teorema di ortonormalizzazione.

Teorema 7.18 (di ortonormalizzazione). *Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ una base di W. Esiste una base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ di W tale che*

i) $S_i := \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_i\} = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_i\}$ *per ogni indice i;*

ii) $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ *è una base ortonormale di W.*

La base ottenuta col procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt indicato sopra soddisfa le proprietà i) e ii) ed è "quasi" l'unica base di W che le soddisfa $\big($*se* $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ *e* $\{\vec{b}'_1, ..., \vec{b}'_m\}$ *sono due basi che le soddisfano allora* $\vec{b}'_i = \pm\vec{b}_i,\ \forall\, i\big)$.

Dimostrazione. La *i*) vale perché ad ogni passo sommiamo a $\vec{w}_i$ una **c.l.** dei precedenti e lo moltiplichiamo per una costante non nulla. Quanto alla *ii*), che i vettori abbiano norma 1 è ovvio, sono mutuamente ortogonali perché ogni $\vec{b}_i$ è ortogonale ai "precedenti" ($\vec{b}_i$ lo otteniamo normalizzando ciò che si ottiene sottraendo a un vettore non appartenente a S_{i-1} la sua proiezione su S_{i-1}). L'affermazione tra parentesi è evidente per ragioni geometriche. □

Come corollario si deduce che ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ammette basi ortonormali.

Esercizio 7.19. Si consideri lo spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^4$ ed il sottospazio

$$W \quad = \quad \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare una base ortonormale di W.

A questo punto torniamo alle trasformazioni lineari (dette anche *endomorfismi*). Nel primo capitolo abbiamo visto qual è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare. In analogia con la diagonalizzabilità diciamo che la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è *triangolarizzabile* se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale T è rappresentata da una matrice triangolare superiore (cfr. cap. I, def. 1.23). Diremo che T è triangolarizzabile tramite una base ortonormale se ciò accade rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 7.20. *Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare. Allora le affermazioni che seguono sono equivalenti tra loro*

a) T *è triangolarizzabile tramite una base ortonormale;*

b) T *è triangolarizzabile;*

c) *il polinomio caratteristico* $P_T(\lambda)$ *ha n radici reali.*

Precisazione 7.21. Chiedere che il polinomio caratteristico abbia n radici reali significa chiedere che si fattorizzi come prodotto di polinomi di primo grado, cioè che si possa scrivere nella forma

$$P_T(\lambda) \quad = \quad (\lambda_1 - \lambda) \cdot ... \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

(con i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ **non** necessariamente distinti).

Dimostrazione (*della Proposizione* 7.20). Naturalmente $a) \Rightarrow b)$. Inoltre, $b) \Rightarrow c)$ perché il polinomio caratteristico di una matrice triangolare $A = (a_{i,\,j})$ è uguale al prodotto $(a_{1,\,1} - \lambda) \cdot ... \cdot (a_{n,\,n} - \lambda)$. Per provare che $c) \Rightarrow a)$ mostriamo che siamo in grado di trovare una base ortonormale $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ rispetto alla quale T è rappresentata da una matrice triangolare. Trovare una tale base significa trovare dei vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$ di norma 1 nonché mutuamente ortogonali soddisfacenti $T(\vec{b}_i) \in \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_i\}$ per ogni indice i. Concentriamoci su questa formulazione del problema da risolvere e ragioniamo per induzione sul numero k dei vettori di un insieme ortonormale $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\}$ soddisfacente

$$(\star) \qquad T(\vec{b}_i) \in \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_i\} \quad \text{per ogni} \quad i \leq k\,.$$

Il primo passo dell'induzione è immediato: si trova un primo autovettore (ciò è possibile per l'ipotesi sul polinomio caratteristico) e lo si normalizza. Supponiamo quindi di aver trovato un insieme $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\}$ soddisfacente $(\star)$ e mostriamo che possiamo trovare $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{k+1}\}$ anch'esso soddisfacente $(\star)$. A tal fine consideriamo un completamento arbitrario di $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\}$ ad una base di $\mathbb{R}^n$ ed osserviamo che rispetto a tale base T è rappresentato da una matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = 0$, $\forall\, i > j,\ j \leq k$. Osserviamo inoltre che se denotiamo con B il minore delle ultime $n-k$ righe e colonne della matrice A risulta

$$(\star\star) \qquad P_T(\lambda) \;=\; (a_{1,1}-\lambda)\cdot ... \cdot (a_{k,k}-\lambda)\cdot \det(B-\lambda I)\,.$$

Consideriamo $U = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\}^{\perp}$ e la restrizione ad U della composizione $\pi_U \circ T$ (dove π_U denota la proiezione ortogonale su U), che denoteremo con S. Si ha l'uguaglianza

$$(\star\star\star) \qquad P_S(\lambda) \;=\; \det(B-\lambda I)\,.$$

Infatti, gli ultimi $n-k$ vettori della base di $\mathbb{R}^n$ si proiettano su U ad una base di U e la trasformazione S, rispetto a tale base, è rappresentata dalla matrice B. Infine, alla luce di $(\star\star)$ e $(\star\star\star)$, poiché il polinomio $P_T(\lambda)$ si decompone nel prodotto di polinomi di primo grado, lo stesso deve valere per il polinomio $P_S(\lambda)$, in particolare S ammette un autovalore e quindi un autovettore, chiamiamolo $\vec{v}_{k+1}$. Poiché $S(\vec{v}_{k+1}) \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_{k+1}\}$, si ha $T(\vec{v}_{k+1}) \in \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ (attenzione, c'è di mezzo una proiezione, **non** è detto $\vec{v}_{k+1}$ sia un autovettore per T). Infine, applicando l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt all'insieme $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ si ottiene un insieme $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{k+1}\}$ come richiesto. □

Esercizio 7.22. Provare che la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è affatto triangolarizzabile.

Esercizio 7.23. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Si verifichi che $(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)^2$ è il polinomio caratteristico di entrambe;
b) diagonalizzare A;
c) triangolarizzare A tramite una base ortonormale;
d) provare che C non è diagonalizzabile;
e) triangolarizzare C tramite una base ortonormale.

Ora vogliamo introdurre il concetto di trasformazione aggiunta. Di fatto, l'aggiunta della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associata alla matrice A (cfr. cap. I, def. 12.5) è la trasformazione associata alla matrice ${}^tA$ (trasposta di A, cfr. cap. I, def. 3.18). Preferiamo però introdurla mediante la proprietà che la caratterizza.

Teorema 7.24. *Data $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si ha che esiste un'unica trasformazione*

$$T^\star : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{tale che} \quad \langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle \;=\; \langle \vec{v}, T^\star(\vec{w})\rangle\,, \quad \forall\, \vec{v},\ \vec{w} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dimostrazione. Per l'osservazione (7.15′), le coordinate di $T^\star(\vec{w})$ devono essere i prodotti scalari $\langle \vec{e}_i, T^\star(\vec{w})\rangle = \langle T(\vec{e}_i), \vec{w}\rangle$, essendo $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ciò garantisce l'unicità di $T^\star$ e, per ragioni di bi-linearità del prodotto scalare (Lemma 7.2), anche l'esistenza. □

Definizione 7.25. La trasformazione $T^\star$ la cui esistenza e unicità è garantita dal teorema precedente si chiama *aggiunta* di T (l'apice "$\star$" fa parte della notazione standard con cui si denota l'aggiunta di una trasformazione lineare).

Come preannunciato, se T è la moltiplicazione per la matrice A (equivalentemente, se rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ la trasformazione T è rappresentata dalla matrice A), allora $T^\star$ è la moltiplicazione per la matrice ${}^tA$ (si noti che ciò porta ad una seconda dimostrazione dell'esistenza di $T^\star$). Infatti la funzione $\vec{w} \mapsto {}^tA \cdot \vec{w}$ che al vettore $\vec{w}$ associa il vettore ${}^tA \cdot \vec{w}$ soddisfa la proprietà che definisce l'aggiunta:

$$\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle \;=\; \langle A \cdot \vec{v}, \vec{w}\rangle \;=\; {}^t(A \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} \;=\; {}^t\vec{v} \cdot {}^tA \cdot \vec{w} \;=\; {}^t\vec{v} \cdot ({}^tA \cdot \vec{w}) \;=\; \langle \vec{v}, {}^tA \cdot \vec{w}\rangle$$

dove i vettori sono considerati come matrici di n righe ed una colonna e tutti i prodotti sono prodotti tra matrici (la quarta uguaglianza segue dalla proprietà ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$; cfr. cap. I, 3.19).

Esercizio 7.26. Siano T ed S due trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ e sia I l'identità. Provare che

$$(7.26') \qquad \big(T + S\big)^\star \;=\; T^\star + S^\star \;; \qquad (\lambda\, T)^\star \;=\; \lambda\, T^\star \;; \qquad I^\star \;=\; I \;.$$

Suggerimento. Usate le matrici rappresentative.

Definizione 7.27. Se $T^\star = T$ diciamo che T è *autoaggiunta* (ovvero *simmetrica*).

Abbiamo due aggettivi diversi per indicare la stessa caratteristica perché le matrici[23] autoaggiunte sono le matrici simmetriche (nell'ambito della generalizzazione agli spazi metrici astratti della teoria che stiamo sviluppando si preferisce riferirsi alle trasformazioni che coincidono con la propria aggiunta dicendo che sono "autoaggiunte").

Una classe importante di trasformazioni lineari è quella delle trasformazioni che conservano le lunghezze dei vettori e la misura degli angoli tra vettori. In virtù di questa caratteristica tali trasformazioni sono dette anche *movimenti rigidi.* I movimenti rigidi del piano vettoriale $\mathbb{R}^2$ sono le rotazioni intorno l'origine e le riflessioni rispetto ad una retta passante per l'origine. I movimenti rigidi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono le rotazioni intorno ad un asse passante per l'origine e le composizioni di queste con la riflessione rispetto al piano ortogonale all'asse. Da notare che a priori non è affatto ovvio che quelli indicati siano gli unici movimenti rigidi del piano e dello spazio vettoriale Euclideo. Da un punto di vista algebrico conservare lunghezze e angoli equivale a conservare il prodotto scalare. In effetti grazie alle identità (7.3′) e (7.4) conservare le lunghezze equivale a conservare il prodotto scalare, in particolare implica conservare gli angoli. Il teorema che segue caratterizza le trasformazioni lineari che conservano il prodotto scalare.

Inciso. Naturalmente nel momento in cui consideriamo il piano e lo spazio Euclideo[24] così come li abbiamo introdotti nei paragrafi § 1 e § 4 (si noti che, parlando piano e spazio Euclideo, non avendo un struttura vettoriale non ha senso parlare di trasformazioni lineari) i movimenti rigidi, intesi semplicemente come trasformazioni che conservano distanze e angoli (si ha che inducono trasformazioni lineari sul soggiacente spazio vettoriale dei vettori geometrici) sono quelli indicati e le loro composizione con le traslazioni. Comunque, in questo paragrafo ci concentriamo sugli aspetti vettoriali: qualsiasi trasformazione, in quanto applicazione lineare tra spazi vettoriali, deve fissare l'origine.

---

[23] Viste come trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$.

[24] Non fissiamo un'origine, gli elementi li chiamiamo "punti" e la struttura vettoriale è definita per il soggiacente spazio vettoriale dei vettori geometrici, ovvero delle classi di equivalenza dei segmenti orientati.

Teorema 7.28. *Sia* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una trasformazione lineare e sia* A *la matrice che la rappresenta* (*rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^n$). *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

i) T *conserva il prodotto scalare*: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle$, $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$;

ii) $T^\star \circ T =$ Identità (T *è invertibile e la sua inversa coincide con l'aggiunta*);

iii) ${}^tA \cdot A = I_n$ (A *è invertibile e la sua inversa coincide con la trasposta*);

iv) *le colonne di* A *formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$;

v) *le righe di* A *formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$;

Dimostrazione. L'equivalenza delle ultime quattro proprietà è essenzialmente ovvia: considerando che la matrice ${}^tA$ rappresenta $T^\star$, la *iii*) è la traduzione della *ii*) in termini di matrici; in quanto l'elemento di posto i, j del prodotto ${}^tA \cdot A$ coincide col prodotto scalare della $i-esima$ colonna di A con la $i-esima$ colonna (sempre di A) anche *iii*) e *iv*) sono equivalenti, inoltre in virtù di questa equivalenza e del fatto che A soddisfa la *iii*) se e solo se ${}^tA$ la soddisfa (cfr. cap. I, Proposizione 4.3), anche la *v*) è equivalente a queste proprietà. Ora proviamo che la *i*) è equivalente alle altre. Per la proprietà che caratterizza l'aggiunta risulta $\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, T^\star(T(\vec{w})) \rangle$, quindi la *i*) è equivalente alla seguente proprietà:

$$(\star) \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad = \quad \langle \vec{v}, T^\star(T(\vec{w})) \rangle\, , \ \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n\ .$$

Questo dimostra che la *i*) segue dalla *ii*). Viceversa, scrivendo la $(\star)$ con $\vec{v} = \vec{e}_i$ (per $i = 1, ..., n$), dall'osservazione (7.15′) deduciamo che le coordinate di $T^\star(T(\vec{w}))$ coincidono con quelle di $\vec{w}$ (per ogni $\vec{w}$), quindi che $T^\star \circ T$ è l'identità. □

Definizione 7.29. Se T conserva il prodotto scalare (equivalentemente, soddisfa una delle condizioni del teorema precedente), diciamo che T è *ortogonale*. Una matrice A si dice *ortogonale* se la moltiplicazione per A è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, equivalentemente, se risulta

$${}^tA \cdot A \quad = \quad I_n\ .$$

Dal lavoro fatto nel cap. I, § 15 sappiamo che le trasformazioni diagonalizzabili sono caratterizzate dall'esistenza di una base di autovettori. Sia dunque T una trasformazione diagonalizzabile, ci domandiamo quali proprietà debbano soddisfare i suoi autovalori e autovettori affinché risulti autoaggiunta, e quali affinché essa risulti ortogonale. Partiamo proprio dal dato degli "autovalori e autovettori": consideriamo dei vettori indipendenti $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ e dei numeri reali $\lambda_1, ..., \lambda_n$ quindi consideriamo la trasformazione T avente questi dati come autovettori e relativi autovalori. Dalla formula del cambiamento di base (cap. I, 15.6′) sappiamo che T è rappresentata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$) dalla matrice

$$A \quad = \quad B \cdot \Delta \cdot B^{-1}$$

dove B è la matrice associata ai vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ e Δ è la matrice diagonale associata ai valori $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Nell'ambito delle trasformazioni diagonalizzabili abbiamo la seguente caratterizzazione di quelle che sono ortogonali e di quelle che sono autoaggiunte.

Proposizione 7.30. *Sia* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *la trasformazione lineare di autovettori* (*indipendenti*) $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ *e relativi autovalori* $\lambda_1, ..., \lambda_n$. *Allora*

i) T *è ortogonale se e solo se gli autovalori hanno modulo* 1 *e gli autospazi sono ortogonali tra loro*:

$$|\lambda_i| \ = \ 1\ , \quad \forall\ i\ ; \qquad \langle \vec{v}_i,\ \vec{v}_j \rangle = 0\ , \quad \forall\ i, j \mid \lambda_i \neq \lambda_j$$

ii) T *è autoaggiunta se e solo se gli autospazi sono ortogonali tra loro*:

$$\langle \vec{v}_i,\ \vec{v}_j \rangle = 0\ , \quad \forall\ i, j \mid \lambda_i \neq \lambda_j\ .$$

Dimostrazione. Sia A la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica. Essendo T diagonalizzabile per ipotesi, se gli autospazi sono ortogonali tra loro esiste una base ortonormale di autovettori e risulta $A = B{\cdot}\Delta{\cdot}B^{-1}$, con B ortonormale (quindi $B^{-1} = {}^tB$) e Δ diagonale. Di conseguenza si ha ${}^tA = {}^t\big(B\cdot\Delta\cdot B^{-1}\big) = B\cdot\Delta\cdot B^{-1} = A$, pertanto A è simmetrica, ovvero T è autoaggiunta. Se inoltre assumiamo che gli autovalori abbiano modulo 1 otteniamo

$$ {}^tA\cdot A \;=\; \big(B\cdot\Delta\cdot B^{-1}\big)^2 \;=\; B\cdot\Delta^2\cdot B^{-1} \;=\; B\cdot I_n\cdot B^{-1} \;=\; I_n \quad (I_n = \text{identità}) $$

ovvero A è ortogonale (nonché simmetrica), quindi T è ortogonale (nonché autoaggiunta).

D'altro canto T è ortogonale deve conservare il prodotto scalare, quindi la norma. Pertanto se $\vec{v}$ è un autovettore di autovalore λ si ha quanto segue

$$ \|\vec{v}\| \;=\; \|T(\vec{v})\| \;=\; \|\lambda\vec{v}\| \;=\; |\lambda|\cdot\|\vec{v}\| \quad\Longrightarrow\quad |\lambda| \;=\; 1\,. $$

Resta da dimostrare che se T è ortogonale oppure autoaggiunta allora gli autospazi sono mutuamente ortogonali. Questi due risultati sono entrambi casi particolari di un risultato più forte (che enunciamo e dimostriamo più avanti): le trasformazioni che commutano con la propria aggiunta hanno autospazi ortogonali tra loro (cfr. Proposizione 7.36). □

Definizione 7.31. Diciamo che $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione *normale* se commuta con la sua aggiunta:

$$ T\circ T^\star \;=\; T^\star\circ T\,. $$

Osserviamo che se T è una trasformazione normale allora risulta

$$ \begin{aligned} \langle T(\vec{v}),\, T(\vec{w})\rangle \;&=\; \langle \vec{v},\, T^\star\circ T(\vec{w})\rangle \\ &=\; \langle \vec{v},\, T\circ T^\star(\vec{w})\rangle \;=\; \langle T^\star(\vec{v}),\, T^\star(\vec{w})\rangle \quad \forall\, \vec{v},\, \vec{w}\,\in\,\mathbb{R}^n\,. \end{aligned} \tag{7.32} $$

In particolare si ha

$$ \|T(\vec{v})\| \;=\; \|T^\star(\vec{v})\|\,, \quad \forall\,\vec{v}\,\in\,\mathbb{R}^n\,. \tag{7.32$'$} $$

In effetti la (7.32′), e a maggior ragione la (7.32), caratterizza le trasformazioni normali. Ma questo fatto non ci servirà e lo lasciamo per esercizio:

Esercizio 7.33. Provare che la (7.32′) caratterizza le trasformazioni normali.

Osservazione 7.34. Finora abbiamo sostanzialmente lavorato con la base canonica di $\mathbb{R}^n$, in particolare abbiamo visto che, rispetto a tale base, $T^\star$ è rappresentata dalla matrice ${}^tA$ (essendo A la matrice che rappresenta T). Di conseguenza abbiamo la seguente caratterizzazione delle trasformazioni normali

$$ T \;\text{ è normale }\;\; \text{se e solo se} \;\; {}^tA\cdot A \;=\; A\cdot{}^tA\,. $$

Questa proprietà continua a valere se si considera la matrice rappresentativa di T rispetto ad una qualsiasi base **ortonormale** di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e B è la matrice associata a tale base allora risulta $B^{-1} = {}^tB$ (Teorema 7.28, equivalenza "*iii)* ⇔ *iv)*"). Di conseguenza, per la formula del cambiamento di base (cap. I, 15.6′), le matrici rappresentative di T e $T^\star$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono rispettivamente le matrici $X = {}^tB\cdot A\cdot B$ e ${}^tB\cdot{}^tA\cdot B = {}^t\big({}^tB\cdot A\cdot B\big) = {}^tX$. Sottolineiamo questo risultato:

$$ \text{se } X \text{ rappresenta } T,\;\; \text{allora } {}^tX \text{ rappresenta } T^\star \tag{7.34$'$} $$

(tutto rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$). Ne segue che

$$ T \;\text{ è normale }\;\; \text{se e solo se} \;\; {}^tX\cdot X \;=\; X\cdot{}^tX\,. \tag{7.34$''$} $$

Vediamo ora una importante conseguenza della (7.32′).

Osservazione 7.35. Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione normale. Le trasformazioni T e $T^\star$ hanno stessi autovalori e stessi autospazi.

Dimostrazione. È sufficiente provare che $\|T^\star(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\| = \|T(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\|$ (avendo la stessa norma, il primo vettore è nullo se e solo se il secondo vettore è nullo). Si ha:

$$\|T^\star(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\| = \|(T-\lambda I)^\star(\vec{v})\| = \|(T-\lambda I)(\vec{v})\| = \|T(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\|$$

dove I denota l'identità (la prima uguaglianza segue dalle uguaglianze (7.26′), la seconda segue dall'osservazione (7.32′) perché naturalmente anche $T+\lambda I$ è normale, la terza è una tautologia). $\square$

Proposizione 7.36. *Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è normale allora autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Dimostrazione. Sia $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ e $T(\vec{w}) = \mu\vec{w}$.

$$\lambda\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle\lambda\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle\vec{v}, T^\star(\vec{w})\rangle \overset{(\text{oss. } 7.35)}{=} \langle\vec{v}, \mu\vec{w}\rangle = \mu\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle .$$

Essendo $\lambda \neq \mu$ si deve avere $\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$. $\square$

Il prossimo teorema caratterizza le trasformazioni diagonalizzabili tramite una base ortonormale. Premettiamo un facile lemma algebrico.

Lemma 7.37. Una matrice triangolare che commuta con la sua trasposta è necessariamente diagonale:

$$\text{“}X \text{ triangolare, } {}^tX\cdot X = X\cdot{}^tX \qquad \Longrightarrow \qquad X \text{ diagonale”}.$$

Dimostrazione. È sufficiente svolgere i prodotti: scriviamo (nello stesso ordine!) gli elementi sulla diagonale delle due matrici in questione:

$$\begin{array}{lllll} X\cdot{}^tX : & x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2 + \ldots ; & x_{2,2}^2 + x_{2,3}^2 + \ldots ; & \ldots ; & x_{n,n}^2 \\ {}^tX\cdot X : & x_{1,1}^2 \quad ; & x_{1,2}^2 + x_{2,2}^2 \quad ; & \ldots ; & x_{1,n}^2 + x_{2,n}^2 + \ldots + x_{n,n}^2 \end{array}$$

Dal confronto di questi elementi si deduce che X è diagonale: $\left(X\cdot{}^tX\right)_{1,1} = \left({}^tX\cdot X\right)_{1,1} \Rightarrow x_{1,2} = x_{1,3} = x_{1,4} = \ldots = 0$; $\left(X\cdot{}^tX\right)_{2,2} = \left({}^tX\cdot X\right)_{2,2} \Rightarrow x_{2,3} = x_{2,4} = \ldots = 0$, e così via. $\square$

Teorema 7.38. *Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare. Le affermazioni che seguono sono equivalenti*

i) *esiste una base ortonormale di autovettori per T;*

ii) *T è autoaggiunta ed ha n autovalori in $\mathbb{R}$;*

iii) *T è normale ed ha n autovalori in $\mathbb{R}$.*

(Cfr. precisazione 7.21).

Dimostrazione. Il fatto che la *i)* implichi la *ii)* l'abbiamo già dimostrato (cfr. Proposizione 7.30): se esiste una base ortonormale di autovettori T ha n autovalori reali ed è autoaggiunta. Naturalmente se T è autoaggiunta (= coincide con l'aggiunta) a maggior ragione è normale (= commuta con l'aggiunta). Quindi “*ii*) implica *iii*)”.

Infine, se vale la proprietà *iii*), sappiamo che T è triangolarizzabile rispetto ad una base ortonormale (Proposizione 7.20). D'altro canto la matrice X rappresentativa di T rispetto ad una tale base è una che commuta con la sua trasposta (cfr. 7.34′). Per il Lemma 7.37 la matrice X deve essere diagonale. $\square$

Questo risultato è uno dei pochi Teoremi di questo testo (quelli veri si contano sulle dita di una mano!). Riferendoci all'implicazione "$iii) \Rightarrow i)$", l'ipotesi sugli autovalori ci dice che (cfr. precisazione 7.21) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori vale n. Quest'ipotesi, presa da sola non dà la diagonalizzabilità (non possiamo dire che le molteplicità geometriche siano uguali a quelle algebriche): affinché una trasformazione di $\mathbb{R}^n$ sia diagonalizzabile abbiamo bisogno di n autovettori indipendenti, equivalentemente che la somma delle molteplicità **geometriche** sia uguale ad n. Assumendo anche l'ipotesi di normalità otteniamo che T è diagonalizzabile, in particolare che molteplicità algebriche e geometriche coincidono.

Esempio. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile (non è normale: $A \cdot {}^tA \neq {}^tA \cdot A$).

Un altro aspetto del Teorema (7.38) riguarda il modo in cui è possibile diagonalizzare T: assumendo che sia normale ed abbia n autovalori reali è possibile diagonalizzarla tramite una matrice ortonormale. Evidentemente nell'ipotesi di normalità la costruzione nella dimostrazione della Proposizione 7.20 conduce a una base ortonormale di autovettori, ovvero ad una diagonalizzazione tramite una base ortonormale. Ciò è importante di per se, ripercorriamo la dimostrazione citata e stabiliamolo in maniera diretta: trovati k autovettori ortonormali, indicato con S lo spazio che essi generano e definito $U := S^{\perp}$, vogliamo provare che $T(U) \subseteq U$. Si ha

$$T(U) \subseteq U \quad \Longleftrightarrow \quad \langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle \;=\; 0\,,\ \forall\, \vec{u} \in U\,,\ \vec{v} \in S$$

d'altro canto, grazie alla normalità, T e $T^{\star}$ coincidono su S (oss. 7.35), quindi

$$\langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle \;=\; \langle \vec{u}, T^{\star}(\vec{v}) \rangle \;=\; \langle \vec{u}, \vec{v}\,' \rangle \;=\; 0 \quad (\text{essendo } \vec{u} \in U\,,\ \vec{v}\,' \in S)$$

Questo dimostra che $T(U) \subseteq U$ e quindi che quella fastidiosa proiezione nella dimostrazione della Proposizione 7.20 che ci costringeva a scrivere "$T(\vec{v}_{k+1}) \in \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k, \vec{v}_{k+1}\}$" invece di "$T(\vec{v}_{k+1}) \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_{k+1}\}$" non è necessaria (proiettare su U vettori che già appartengono ad U è come non fare nulla). Voglio sottolineare che la dimostrazione della Proposizione 7.20, con l'aggiunta di quanto appena osservato diventa una dimostrazione diretta del Teorema 7.38 (che peraltro evita il Lemma 7.37).

Visto che in generale non si sanno decomporre i polinomi di grado alto il Teorema 7.38 ha un difetto: l'ipotesi sulle radici del polinomio caratteristico è difficilmente controllabile! Ebbene, nel punto $ii)$ tale ipotesi può essere cassata: le affermazioni del Teorema 7.38 sono equivalenti alla seguente affermazione:

$ii')$ T è autoaggiunta.

Questo risultato è noto come teorema Spettrale (che ora enunciamo di nuovo in termini di matrici). Prima però osserviamo che la stessa ipotesi **non** può essere cassata al punto $iii)$:

Esempio. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è normale, è addirittura ortogonale, ma non è diagonalizzabile: non ha affatto autovalori reali, rappresenta una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti, il suo polinomio caratteristico è il polinomio $\lambda^2 + 1$.

Teorema 7.39 (teorema **Spettrale).** *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *una matrice.*

$$A \text{ è diagonalizzabile tramite una matrice ortonormale} \iff A \text{ è simmetrica.}$$

L'implicazione "$\Longrightarrow$" è l'implicazione "$i) \Rightarrow ii)$" del Teorema 7.38. L'altra implicazione si dimostra facilmente a condizione di usare i numeri complessi: sostanzialmente segue immediatamente dalla versione sui complessi del Teorema 7.38. Naturalmente ciò significa che si deve ripetere la teoria svolta in ambito complesso. Gli enunciati come pure le dimostrazioni sono di fatto identici, con qualche piccola differenza. Ripercorriamone le tappe

1. Il prodotto scalare viene sostituito dal prodotto *Hermitiano*: su $\mathbb{C}^n$ la (7.1) viene sostituita dalla
$$\langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{w_i}$$
in questo modo la norma di un vettore complesso $\vec{v}$ vale
$$\|\vec{v}\| \quad = \quad \sqrt{\langle \vec{v},\, \vec{v} \rangle} \quad = \quad \sqrt{\sum |v_i|^2} \qquad \text{(cfr. appendice, A.14);}$$

2. il Lemma 7.2 cambia: il prodotto Hermitiano è $\mathbb{C}$-lineare rispetto al primo argomento, $\mathbb{R}$-lineare rispetto al secondo ma per portare fuori una costante complessa dal secondo membro bisogna coniugarla:
$$\langle \lambda\vec{v},\, \vec{w} \rangle \;=\; \lambda \langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle \; ; \qquad \langle \vec{v},\, \lambda\vec{w} \rangle \;=\; \overline{\lambda} \langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle \, ;$$
inoltre risulta
$$\langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle \quad = \quad \overline{\langle \vec{w},\, \vec{v} \rangle}\, ,$$
questo significa che si deve fare molta attenzione all'ordine in cui si scrivono i prodotti Hermitiani.

3. per il teorema fondamentale dell'algebra (cfr. appendice) l'ipotesi *c*) della Proposizione 7.20 diventa vuota e la proposizione diventa: ogni trasformazione di $\mathbb{C}^n$ si triangolarizza tramite una base unitaria (="ortonormale" nel caso complesso);

4. la matrice rappresentativa dell'aggiunta di T diventa ${}^t\overline{A}$;

5. il Teorema 7.28 continua a valere (con $\mathbb{C}^n$ al posto di $\mathbb{R}^n$, "Hermitiano" al posto di "scalare", "unitaria" al posto di "ortogonale" e ${}^t\overline{A}$ al posto della semplice ${}^tA$);

6. la (7.35) cambia di poco: nel caso complesso se T è normale le trasformazioni T e $T^\star$ hanno autovalori coniugati e "stessi" autospazi:
$$\ker(T - \lambda I) \;=\; \ker(T^\star - \overline{\lambda} I) \;, \quad \forall\, \lambda \,\in\, \mathbb{C}\,;$$

7. vale l'analogo del Teorema 7.38, solo che in ambito complesso l'ipotesi sugli autovalori diventa vuota grazie al teorema fondamentale dell'algebra.

A questo punto la dimostrazione del teorema Spettrale si riduce a poche righe:

Dimostrazione. Se T è una trasformazione reale autoaggiunta (ovvero se A è una trasformazione reale simmetrica), considerandola come trasformazione complessa, accanto ad ogni autovalore λ deve avere l'autovalore $\overline{\lambda}$ (Lemma A.24), d'altro canto deve risultare

$$(\star) \qquad V_{\lambda,\, T} \quad = \quad V_{\overline{\lambda},\, T^\star} \quad = \quad V_{\overline{\lambda},\, T}$$

dove con $V_{\lambda,\,T}$ si intende l'autospazio di T relativo all'autovalore λ, eccetera. La prima uguaglianza segue dalla (7.35) nel caso complesso (cfr. punto 6 di cui sopra), mentre la seconda uguaglianza segue dall'uguaglianza $T = T^\star$ (essendo T reale simmetrica, coincide con la sua trasposta coniugata). Ma l'uguaglianza $V_{\lambda,\,T} = V_{\overline{\lambda},\,T}$ (primo e terzo termine di $(\star)$) è un assurdo a meno che non risulti $\overline{\lambda} = \lambda$, cioè a meno che λ non sia reale, perché autovalori distinti non possono avere lo stesso autospazio (ovviamente, anche nel caso complesso). $\square$

§8. Spazi vettoriali Euclidei e Spazi Euclidei.

Sebbene un po' ostinatamente abbiamo insistito nel lavorare con $\mathbb{R}^n$, i risultati visti sono più generali e sarebbe uno spreco non fare quel piccolo passo in più che consente di enunciarli svincolati dall'ambiente che è stato il contesto del nostro lavoro, per l'appunto $\mathbb{R}^n$.

In questo paragrafo introduciamo gli Spazi vettoriali Euclidei e gli Spazi Euclidei, sempre reali e di dimensione finita, in un contesto astratto, generale, quindi rivisitiamo in questo nuovo contesto i risultati visti finora. Iniziamo col definire gli oggetti del nostro studio.

Definizione 8.1. Sia V uno spazio vettoriale. Un *prodotto scalare* su V è una funzione

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\quad V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$$

simmetrica, *bilineare*, *definita-positiva*, cioè soddisfacente le tre proprietà che seguono:

i) $\langle\vec{v},\vec{w}\,\rangle\ =\ \langle\vec{w},\vec{v}\,\rangle\ ,\quad \forall\,\vec{v},\vec{w}\in V\,;$

ii) $\langle\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}\,\rangle\ =\ \lambda\langle\vec{u},\vec{w}\,\rangle+\mu\langle\vec{v},\vec{w}\,\rangle$ e $\langle\vec{w},\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\,\rangle\ =\ \lambda\langle\vec{w},\vec{u}\,\rangle+\mu\langle\vec{w},\vec{v}\,\rangle$, $\forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R};$

iii) $\langle\vec{v},\vec{v}\,\rangle\ \geq\ 0,\quad\forall\,\vec{v}\in V$ ed inoltre $\langle\vec{v},\vec{v}\,\rangle\ =\ 0\iff\vec{v}=\vec{0}$.

La proprietà *i)* ci dice che il prodotto scalare è simmetrico. La proprietà *ii)* ci dice che il prodotto scalare è *bilineare*, cioè lineare rispetto a ciascuno dei due argomenti. La proprietà *iii)* si esprime dicendo che il prodotto scalare è *definito-positivo*. Osserviamo che la simmetria e la linearità rispetto al primo argomento, insieme, implicano la linearità rispetto al secondo argomento, ovvero: in quanto ridondante, potevamo evitare di scrivere la seconda metà della proprietà *ii)*.

Definizione 8.2. Uno *spazio vettoriale Euclideo* è uno spazio vettoriale[25] sul quale sia stato fissato un prodotto scalare.

Naturalmente, continuiamo a usare la stessa terminologia usata nei paragrafi precedenti:

- Il valore $\|\vec{v}\|\ :=\ \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\,\rangle}$ si chiama *norma* del vettore $\vec{v}$;
- due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo;
- una base $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\}$ di V si dice *ortogonale* se i $\vec{b}_i$ sono ortogonali tra loro, se inoltre hanno norma 1 allora $\mathcal{B}$ si dice *ortonormale*.

Continuano a valere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la disuguaglianza triangolare:

$$|\langle\vec{v},\vec{w}\,\rangle|\quad\leq\quad\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\qquad\qquad\|\vec{v}+\vec{w}\|\ \leq\ \|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$$

In entrambi i casi la dimostrazione è quella già vista nel caso di $\mathbb{R}^n$, dove non usiamo mai il fatto di avere a che fare con $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard (7.1), ma solo le proprietà *i)*, *ii)* e *iii)* enunciate sopra (cfr. dimostrazioni delle disuguaglianze 7.6 e 7.8).

Continuando a valere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, anche la Definizione 7.7 si generalizza al contesto attuale. La formula è la stessa:

$$\vartheta\quad:=\quad\arccos\left(\frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$$

(come nella (7.7), i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori non nulli, l'angolo ϑ si assume compreso tra 0 e π).

---

[25] Come sempre, reale e di dimensione finita.

Per la bilinearità, la conoscenza del prodotto scalare di certi vettori implica la conoscenza del prodotto scalare delle loro combinazioni lineari, infatti si deve avere

$$(8.3)\qquad \Big\langle \sum_i \lambda_i \vec{v}_i\,,\ \sum_i \mu_i \vec{v}_i \Big\rangle \quad = \quad \sum_{i,j} \lambda_i\,\mu_j \,\Big\langle \vec{v}_i\,,\ \vec{v}_j \Big\rangle\,.$$

In particolare, fissata una base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ di V, il prodotto scalare è univocamente determinato dalla matrice dei prodotti scalari dei vettori di $\mathcal{B}$, la matrice

$$M \;=\; M_{\langle\ ,\ \rangle;\,\mathcal{B}} \quad := \quad \Big(\langle\, \vec{b}_i\,,\, \vec{b}_j\,\rangle\Big)\,,$$

matrice che chiameremo *matrice del prodotto scalare rispetto alla base* $\mathcal{B}$. Precisamente, dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, risulta

$$(8.4)\qquad \langle \vec{v},\ \vec{w}\,\rangle \underset{(8.3)}{=} \sum_{i,j} \lambda_i\,\mu_j \,\Big\langle \vec{b}_i\,,\ \vec{b}_j\Big\rangle \quad = \quad (\lambda_1, ..., \lambda_n)\cdot M \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

dove ${}^t(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e ${}^t(\mu_1, ..., \mu_n)$ sono i vettori numerici delle coordinate dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Osservazione 8.5. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di V allora $M_{\langle\ ,\ \rangle;\,\mathcal{B}}$ è la matrice identica[26]. In questo caso, applicando la (8.4) troviamo

$$(8.5')\qquad \langle\, \vec{v}\,,\, \vec{w}\,\rangle \quad = \quad \sum_i \lambda_i\,\mu_i$$

Questo risultato, considerato che a destra dell'uguaglianza (8.5′) abbiamo il prodotto scalare standard (7.1) dei vettori numerici $\vec{\lambda} = {}^t(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e $\vec{\mu} = {}^t(\mu_1, ..., \mu_n)$, ed assodata l'esistenza di basi ortonormali (cosa che verifichiamo subito sotto, cfr. prop. 8.6), ci consente di generalizzare tutti gli altri risultati dei paragrafi precedenti al contesto attuale. Infatti, consente un'identificazione naturale

"$V\,,\ \langle\ ,\ \rangle,$ base ortonormale" $\longleftrightarrow$ "$\mathbb{R}^n$, prodotto standard (7.1), base canonica".

Ribadiamo qual è il punto:

‖ per l'identificazione qui sopra, ogni teorema visto per la terna a destra si traduce in un teorema valido per la terna a sinistra. ‖

Proposizione 8.6. *Uno spazio vettoriale Euclideo* $\big(V\,,\ \langle\ ,\ \rangle\big)$ *ha una base ortonormale.*

Dimostrazione. Il Teorema (7.18) ed il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt illustrato subito prima valgono, senza bisogno di cambiare una virgola, anche nel contesto attuale: dati dei vettori indipendenti $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$, si normalizza $\vec{w}_1$, ovvero si pone $\vec{b}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$ (così da avere $\|\vec{b}_1\| = 1$), quindi si pone $\vec{b}_2 = \frac{\vec{w}_2 - \langle \vec{b}_1\,,\,\vec{w}_2\rangle\,\vec{b}_1}{\|\ ...\ \|}$ (così da avere $\vec{b}_2$ ortogonale a $\vec{b}_1$ e anch'esso di norma 1). Il passo generale consisterà nel porre

$$\vec{b}_k \quad := \quad \frac{\vec{w}_k - c_1\,\vec{b}_1 - \ldots - c_{k-1}\,\vec{b}_{k-1}}{\|\ ...\ \|}\,, \qquad \text{dove } c_i \;=\; \langle \vec{b}_i, \vec{w}_i\rangle\,.$$

In questo modo si ottiene una base ortonormale. □

In effetti, il risultato provato è più forte: ogni base può essere ortonormalizzata (fissata una base arbitraria, si trova una base ortonormale dove lo Span dei primi k vettori coincide con lo Span dei primi k vettori della base di partenza, per ogni k). Cfr. Teorema (7.18).

---

[26] Questo perché $\langle \vec{b}_i\,,\, \vec{b}_j\,\rangle = 0$ per $i \neq j$ e $\langle \vec{b}_i\,,\, \vec{b}_i\,\rangle = 1$ per ogni i.

Come dicevamo, i risultati e le definizioni dei paragrafi precedenti si generalizzano, in particolare la def. (7.9), la Prop. (7.10), la Prop. (7.12), la def. (7.13), l'oss. (7.15) e la Prop. (7.20) continuano a valere qualora si sostituisca, ovunque, "$\mathbb{R}^n$" con "V" (spazio vettoriale Euclideo).

Esercizio 8.7. Riscrivere i risultati e le definizioni appena citati.

Naturalmente, si generalizzano anche i risultati dal Teorema (7.24) in poi. Vediamoli in dettaglio (in quello che segue V denota sempre uno spazio vettoriale Euclideo):

Teorema 8.8. *Data* $T : V \longrightarrow V$ *si ha che esiste un'unica trasformazione*

$$T^\star : V \longrightarrow V \quad \text{tale che} \quad \langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, T^\star(\vec{w})\rangle , \quad \forall\, \vec{v},\, \vec{w} \in V .$$

Definizione 8.9. La trasformazione $T^\star$ la cui esistenza e unicità è garantita dal teorema precedente si chiama *aggiunta* di T.

Esercizio 8.10. Verificare che se T è rappresentata dalla matrice A rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{B}$, allora $T^\star$ è rappresentata dalla matrice ${}^tA$ (sempre rispetto alla base $\mathcal{B}$).

Definizione 8.11. Se $T^\star = T$ diciamo che T è *autoaggiunta* (ovvero *simmetrica*).

Esercizio 8.12. Siano T ed S due trasformazioni di V e sia I l'identità di V in se. Provare che

$$\big(T+S\big)^\star = T^\star + S^\star ; \qquad (\lambda T)^\star = \lambda T^\star ; \qquad I^\star = I .$$

Naturalmente, per l'esercizio (8.10), il suggerimento dato per l'esercizio (7.26) si applica anche in questo caso. Ciononondimeno questa volta riteniamo istruttiva una verifica diretta, ovvero che usi la caratterizzazione dell'aggiunta data dalla formula $\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, T^\star(\vec{w})\rangle$, $\forall\, \vec{v},\, \vec{w} \in V$.

Teorema 8.13. *Sia* $T : V \longrightarrow V$ *una trasformazione lineare e sia* A *la matrice che la rappresenta rispetto ad una base ortonormale* $\mathcal{B}$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

i) T *conserva il prodotto scalare:* $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{w})\rangle$, $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V$;

ii) $T^\star \circ T = \text{Identità}$ (T *è invertibile e la sua inversa coincide con l'aggiunta*);

iii) ${}^tA \cdot A = I_n$ (A *è invertibile e la sua inversa coincide con la trasposta*);

iv) *le colonne di* A *formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$;

v) *le righe di* A *formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$;

(*nelle ultime due affermazioni* $\mathbb{R}^n$ *si intende dotato del prodotto scalare standard* 7.1).

Questo teorema è la rivisitazione del Teorema 7.28 e, alla luce di quanto visto, in particolare dell'esercizio 8.10, la dimostrazione data allora si applica anche in questo nuovo contesto.

Definizione 8.14. Se T conserva il prodotto scalare (equivalentemente, soddisfa una delle condizioni del teorema precedente), diciamo che T è *ortogonale.*

Naturalmente, risultati e definizioni visti in passato continuano a valere: una matrice A è ortogonale se la moltiplicazione per A è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, equivalentemente, se risulta ${}^tA \cdot A = I_n$. Con la Definizione 8.14 diciamo che una trasformazione di uno spazio vettoriale Euclideo astratto si dice ortogonale se conserva il prodotto scalare; alla luce del Teorema 8.13, ciò accade se, rispetto ad una base ortonormale, è rappresentata da una matrice ortogonale.

Definizione 8.15. Diciamo che $T : V \longrightarrow V$ è una trasformazione *normale* se commuta con la sua aggiunta:

$$T \circ T^\star = T^\star \circ T .$$

Osservazione 8.16. Sia $T : V \longrightarrow V$ è una trasformazione di V in se. Si ha che

$$T \text{ è normale se e solo se } \|T(\vec{v})\| = \|T^{\star}(\vec{v})\|, \ \forall \, \vec{v} \in V.$$

Cfr. (7.32′) e esercizio (7.33).

Osservazione 8.17. Sia $T : V \longrightarrow V$ una trasformazione normale. Le trasformazioni T e $T^{\star}$ hanno stessi autovalori e stessi autospazi.

Di nuovo, non cambia nulla rispetto al lavoro già fatto:

Dimostrazione. È sufficiente provare che $\|T^{\star}(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\| = \|T(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\|$ (avendo la stessa norma, il primo vettore è nullo se e solo se il secondo vettore è nullo). Si ha:

$$\|T^{\star}(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\| \underset{(8.12)}{=} \|(T - \lambda I)^{\star}(\vec{v})\| \underset{(8.16)}{=} \|(T - \lambda I)(\vec{v})\| = \|T(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\|$$

dove I denota l'identità. □

Proposizione 8.18. *Se $T : V \longrightarrow V$ è normale allora autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Riscriviamo la dimostrazione data nel §7:

Dimostrazione. Sia $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ e $T(\vec{w}) = \mu\vec{w}$.

$$\lambda\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle\lambda\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle\vec{v}, T^{\star}(\vec{w})\rangle \underset{(\text{oss. } 8.17)}{=} \langle\vec{v}, \mu\vec{w}\rangle = \mu\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle.$$

Essendo $\lambda \neq \mu$ si deve avere $\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$. □

Teorema 8.19. *Sia $T : V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare. Le affermazioni che seguono sono equivalenti*

i) *esiste una base ortonormale di autovettori per T;*
ii) *T è autoaggiunta ed ha n autovalori in $\mathbb{R}$;*
iii) *T è normale ed ha n autovalori in $\mathbb{R}$.*

Tornando alla (8.4), abbandoniamo le basi ortonormali. La proposizione che segue ci dice come cambia la matrice del prodotto scalare quando si cambia la base di V.

Proposizione 8.20. *Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V, sia C la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, siano M e M' le matrici del prodotto scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Si ha*

$$M' = {}^tC \cdot M \cdot C$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi ortonormali, allora C è una matrice ortogonale (convincersene) e l'uguaglianza è banalmente verificata: si ha $M = M' = I$ (oss. 8.5), ma anche ${}^tC \cdot M \cdot C = {}^tC \cdot C = C^{-1} \cdot C = I$.

Dimostrazione. Siano $\vec{\lambda}$ e $\vec{\lambda}'$ i vettori numerici delle coordinate di un vettore $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, siano $\vec{\mu}$ e $\vec{\mu}'$ quelli di un vettore $\vec{w}$ (quindi $\vec{\lambda} = C\cdot\vec{\lambda}'$ e $\vec{\mu} = C\cdot\vec{\mu}'$). Risulta

$${}^t\vec{\lambda}' \cdot M' \cdot \vec{\mu}' \underset{(8.4)}{=} \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle \underset{(8.4)}{=} {}^t\vec{\lambda} \cdot M \cdot \vec{\mu} = {}^t(C\cdot\vec{\lambda}') \cdot M \cdot (C\cdot\vec{\mu}') = {}^t\vec{\lambda}'\cdot({}^tC\cdot M\cdot C)\cdot\vec{\mu}'.$$

Poiché l'uguaglianza ${}^t\vec{\lambda}' \cdot M' \cdot \vec{\mu}' = {}^t\vec{\lambda}'\cdot({}^tC\cdot M\cdot C)\cdot\vec{\mu}'$ deve valere per ogni coppia di vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, di conseguenza per ogni coppia $\vec{\lambda}'$ e $\vec{\mu}'$, segue la tesi. □

Concludiamo dando la definizione di spazio Euclideo, diamo la definizione in totale analogia a quanto visto nel cap. I, §16, sezione "Spazi Affini" (tra le due definizioni ivi considerate preferiamo la seconda perché non nomina mai $\mathbb{R}^n$):

Definizione 8.21. Uno *Spazio Euclideo* è una terna $(\mathcal{E},\ W,\ \Psi)$, dove $\mathcal{E}$ è un insieme, W è uno spazio vettoriale Euclideo (def. 8.2) e Ψ è una funzione

$$\Psi: \quad \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow W$$

tale che

i) per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$ fissato, si ha che la funzione

$$\psi_{\mathbf{a}} : \mathcal{E} \longrightarrow W\,, \quad \psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \; := \; \Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{a})\,,$$

è biunivoca;

ii) vale la regola di Chasles $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + \Psi(\mathbf{b},\, \mathbf{c}) \; = \; \Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{c})\,, \quad \forall\, \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \,\in\, \mathcal{E}\,.$

Come già osservato nel citato (cap. I, §16, sezione "Spazi Affini"), dalla regola di Chasles seguono rapidamente le due proprietà:

iii) $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = \vec{0}\,,\ \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{E}$ $\quad (\vec{0} \in W$ denota il vettore nullo di $W)$;

iv) Ψ è antisimmetrica, cioè $\Psi(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = -\Psi(\mathbf{b},\, \mathbf{a})\,,\quad \forall\, \mathbf{a},\, \mathbf{b} \,\in\, \mathcal{E}\,.$

Naturalmente la definizione di Spazio Euclideo può essere anche data in analogia alla Definizione I.16.18 del capitolo I:

Definizione 8.21$'$. Uno Spazio Euclideo è un insieme $\mathcal{E}$ sul quale sia definita una famiglia non vuota di funzioni biunivoche

$$\mathcal{F} \;=\; \big\{\phi:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n\big\} \quad \text{tale che} \quad \phi \circ \psi^{-1}(\mathbf{x}) \;=\; M\mathbf{x} + \mathbf{b}\,,\ \ \forall\, \phi,\ \psi \,\in\, \mathcal{F}$$

dove $\mathbf{x},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ed M è una matrice <u>ortogonale</u> $n \times n$.

§9. Soluzione degli esercizi.

1.17. $\pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v}) = \frac{-20+21}{34}\binom{-5}{3} = \binom{-5/34}{3/34}$. **1.18.** $\pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v}) = \frac{-20+20}{116}\binom{10}{4} = \vec{0}$; $\pi_{\langle\vec{u}_1\rangle}(\vec{v}) = \frac{-12-75}{261}\binom{6}{-15} = \binom{-522/261}{1305/261} = \binom{-2}{5}$; $\pi_{\langle\vec{u}_2\rangle}(\vec{v}) = \pi_{\langle\vec{u}_1\rangle}(\vec{v}) = \binom{-2}{5}$ (poiché $\langle\vec{u}_2\rangle = \langle\vec{u}_1\rangle$).

1.20. $\binom{1}{-4}$. **1.21.** $\binom{1}{7}$. **1.22.** $\binom{12}{-20}$. **1.23.** 5, $\sqrt{148}$, $\sqrt{65}$.

1.24. $33/65$. **1.25.** $\frac{30}{\sqrt{3016}}$, $\frac{74}{\sqrt{7592}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2117}}$ (attenzione ai segni!).

1.26. $\binom{1}{0}$, $\binom{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}}$, $\binom{5}{-2}$, $\binom{20}{48}$. **1.27.** 59. **1.28.** 1. **1.29.** 14, 23.

2.6. $\begin{cases} x = -1+5t \\ y = 4+9t \end{cases}$. **2.8.** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 4+7t \end{cases}$.

2.10. Le rette parallele alla retta s sono descritte da equazioni del tipo $2x-3y+c=0$ (convincersene). Imponendo il passaggio per il punto P troviamo $c=9$. In definitiva, $2x-3y+9=0$ è un'equazione cartesiana di r.

2.11. Essendo $\vec{v} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vettore parallelo alla retta passante per i punti dati, quest'ultima è descritta dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2+6t \\ y = 1+4t \end{cases}$. Eliminando il parametro t troviamo l'equazione cartesiana $2x-3y-1=0$.

2.12. $3x+2y-13=0$. **2.13.** $5x-2y-7=0$; (stessa retta); $y=5$; $x-y=0$.

2.14. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1 \end{cases} + 5t$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = \end{cases}$; $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$.

2.15. $3x+2y-32=0$. **2.16.** $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3+t \end{cases}$. **2.17.** $2x-y+1=0$.

2.18. $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5-3t \end{cases}$. **2.20.** $15/\sqrt{29}$.

3.2. 42; 141. **3.3.** 40. **3.4.** 50. **3.6.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ($p \in r$). **3.7.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

4.15. **a)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix}$; **c)** $\sqrt{118}$; **d)** $34/\sqrt{2388}$; **e)** $\begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 10 \end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$; **g)** $\begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; **h)** $\begin{pmatrix} -66 \\ -29 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$; **i)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$; **l)** $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = 4\sqrt{77}$; **m)** $\frac{1}{2}\|\overline{PQ} \wedge \overline{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1253}$; **n)** $\cos\widehat{PQR} = 83/\sqrt{8142}$, $\cos\widehat{QRP} = -14/\sqrt{1449}$, $\cos\widehat{RPQ} = 35/\sqrt{2478}$; **o)** 28; **p)** $7\sqrt{5}\cdot\sqrt{245} = 245$ (coincide col modulo del determinante della matrice associata ai vettori), essendo i vettori ortogonali tra loro, il parallelepipedo è retto ed il suo volume è uguale al prodotto delle lunghezze degli spigoli; **q)** Si tratta di capire se visti da R i segmenti orientati $\overline{OP}$ ed $\overline{OQ}$ appaiono come nella figura 1 o come nella figura 2:

fig. 1

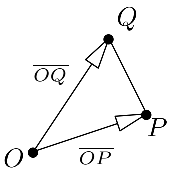
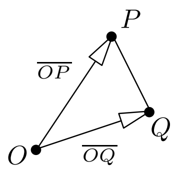


fig. 2



Vista la convenzione adottata[27] (inciso 4.15), siamo nel primo caso se e solo se i vettori $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ definiscono la stessa orientazione della terna canonica $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ovvero se

---

[27] Si noti che questa determina la corrispondenza "orientazione di $\mathbb{R}^3$" $\longleftrightarrow$ "orientazione dello spazio fisico", senza la quale non avrebbe neanche senso porre la domanda (i dati dell'esercizio sono coordinate, concernono $\mathbb{R}^3$, mentre la domanda concerne lo spazio fisico).

e solo se il determinante della matrice associata ad essi è positivo. Questo accade (tale determinante vale 99), quindi vedremo girare il topolino in senso antiorario.

5.11. $\begin{cases} x = 2+4t+2s \\ y = \quad\;\; 5t+9s \\ z = 1+6t+7s \end{cases}$ (i coefficienti di t ed s sono le coordinate di $\overline{PQ}$ e $\overline{PK}$).

5.16. $\pi_r(P) = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{dist}\{P, r\} = \sqrt{131}$. **5.17.** $\pi_r(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{dist}\{P, r\} = \sqrt{22}$.

7.5. $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \langle \vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}\rangle - \langle \vec{v}-\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle = 4\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$.

7.16. Si vogliono due soluzioni dell'equazione $2x-y+3z = 0$ che siano ortogonali. Ad esempio $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\vec{h}_2 = \vec{h}_1 \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Si ha $\pi_H(\vec{v}) = \pi_{\vec{h}_1}(\vec{v}) + \pi_{\vec{h}_2}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (formula 7.12″).

7.17. Si ha $\pi_{\vec{h}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 32/5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi_{\vec{k}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 33/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$. La somma non dà il vettore $\pi_H(\vec{v})$ trovato nell'esercizio precedente.

7.19. Denotiamo con $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ i tre vettori indicati nel testo.
Eseguendo l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si trova

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \frac{\vec{w}_2 - \pi_{\vec{b}_1}(\vec{w}_2)}{\|\text{“}numeratore\text{”}\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 = \frac{\vec{w}_3 - \pi_{\vec{b}_1}(\vec{w}_3) - \pi_{\vec{b}_2}(\vec{w}_3)}{\|\text{“}numeratore\text{”}\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una verifica utile è la seguente: $\mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ è lo spazio di equazione cartesiana $-3y+z-2w = 0$, anche i vettori $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ soddisfano questa equazione e sono indipendenti.

7.22. Se lo fosse, il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ avrebbe 2 radici reali, ma questo non accade perché $P(\lambda) = \lambda^2+1$.

7.23. I vettori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di autovettori per A, indicando con B la matrice associata a questi vettori e con Δ la matrice diagonale associata ai corrispondenti autovalori (nell'ordine) 3, 2, 2 risulta $\Delta = B^{-1}\cdot A\cdot B$ (questa è la diagonalizzazione di A). Per triangolarizzare A tramite una base ortonormale è sufficiente ortogonalizzare la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$: si ottengono i vettori $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ e la triangolarizzazione indicati:

$$\vec{d}_1 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{d}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{20}\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}, \ \vec{d}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D^{-1}\cdot A\cdot D, \text{ essendo}$$

D la matrice associata ai vettori $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$.

La matrice C non è diagonalizzabile perché l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 1 (mentre la molteplicità algebrica di tale autovalore è 2).

Indichiamo con $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ due autovettori (indipendenti) di C. Per triangolarizzare C si devono trovare tre vettori ortonormali $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ tali che $C\cdot\vec{w}_1 \in \mathrm{Span}\{\vec{w}_1\}$, $C\cdot\vec{w}_2 \in \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, $C\cdot\vec{w}_3 \in \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Quanto al primo vettore siamo costretti a scegliere un autovettore e normalizzarlo (scegliamo $\vec{r}_1$), quanto al secondo vettore possiamo sia procedere come nella dimostrazione del Teorema 7.20 che prendere il secondo autovettore (visto che c'è, perché non usarlo) ed ortonormalizzare la coppia $\{\vec{w}_1, \vec{r}_2\}$. Quanto al terzo vettore, visto che la condizione sullo “Span” è vuota, è sufficiente prendere un qualsiasi vettore di norma 1 ortogonale ai primi due, ad esempio il loro vettoriale $\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2$ (che ha automaticamente norma 1: l'area di un quadrato di lato 1 vale 1!).

7.26. Indicate con A e B le matrici associate a T ed S si deve verificare che ${}^t(A+B) = {}^tA +{}^t B$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$, ${}^t(\lambda I) = \lambda I$. Queste proprietà sono tutte ovvie.

7.33. Scrivendo la formula (7.4) per i vettori $T(\vec{v})$ e $T(\vec{w})$ troviamo
$\langle T(\vec{v}), T(\vec{w})\rangle = \frac{1}{4}\left(\|T(\vec{v})+T(\vec{w})\|^2 - \|T(\vec{v})-T(\vec{w})\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|T(\vec{v}+\vec{w})\|^2 - \|T(\vec{v}-\vec{w})\|^2\right)$.
Naturalmente questa formula vale anche con $T^\star$ al posto di T. Ciò dimostra che la (7.32$'$) implica la (7.32). D'altro canto la (7.32) ci dice che $\langle \vec{v}, T^\star \circ T(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, T \circ T^\star(\vec{w})\rangle$ per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Per la (7.15$'$) e l'arbitrarietà di $\vec{v}$, si ha che $T^\star \circ T(\vec{w})$ e $T^\star \circ T(\vec{w})$ hanno le stesse coordinate per ogni $\vec{w}$. Ciò dimostra l'uguaglianza $T^\star \circ T = T^\star \circ T$.

Appendice

I NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi sono un campo che estende il campo dei numeri reali. Ciò che ne giustifica l'introduzione e ne rende assolutamente irrinunciabile l'utilizzo risiede nel teorema Fondamentale dell'Algebra, Teorema secondo il quale ogni polinomio si fattorizza nel prodotto di polinomi di primo grado, ovvero ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici (contate con molteplicità). I numeri complessi sono spesso di fatto indispensabili, persino molti problemi concernenti esclusivamente i numeri reali vengono risolti mediante il loro utilizzo. Giusto a titolo d'esempio: *i*) il fatto che ogni polinomio reale (a coefficienti reali) si fattorizza nel prodotto di polinomi anch'essi reali di grado 1 e 2 segue immediatamente dal teorema Fondamentale dell'Algebra; *ii*) il metodo di Cardano per determinare le soluzioni dei polinomi di terzo grado coinvolge i numeri complessi anche se si considerano esclusivamente polinomi reali che hanno tre radici reali; *iii*) per dimostrare il Teorema Spettrale (7.39) si utilizzano i numeri complessi.

Prima di introdurre i numeri complessi li collochiamo in una lista di "insiemi numerici" ordinata per ricchezza di struttura; tra parentesi indichiamo qual è la proprietà in più che ha l'insieme numerico in questione rispetto al precedente.

$\mathbb{N}$ = "numeri naturali": sono definite somma e prodotto;
$\mathbb{Z}$ = "numeri interi" (è possibile invertire la somma: c'è la sottrazione);
$\mathbb{Q}$ = "numeri razionali" (è possibile invertire il prodotto per un numero non nullo: c'è la divisione);
$\mathbb{R}$ = "numeri reali" (è completo: ogni successione di Cauchy ha un limite);
$\mathbb{C}$ = "numeri complessi" (vale il teorema Fondamentale del'Algebra).

Naturalmente: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Introduciamo i numeri complessi.

Definizione A.1. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è l'insieme delle espressioni formali del tipo $a+ib$, dove a e b sono numeri reali (mentre "+" ed "i" sono semplicemente dei simboli):

$$\mathbb{C} \quad := \quad \left\{ a+i\,b \;\middle|\; a,\ b\ \in\ \mathbb{R} \right\}$$

Dato un numero complesso $z = a+ib$, i numeri reali a e b vengono chiamati rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di z.

Si osservi che, in sostanza, un numero complesso non è altro che una coppia di numeri reali, la ragione per cui si utilizza questa notazione sarà chiara molto presto. Esempi di numeri complessi sono $2+i3$, $-1+i(-\frac{7}{3})$, $0+i\sqrt{2}$, $-19+i0$ eccetera.

L'insieme dei numeri reali viene visto come sottoinsieme di quello dei numeri complessi tramite l'inclusione naturale seguente:

$$\text{(A.2)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & a+i0 \end{array}$$

Inoltre si fa uso della seguente notazione: per ogni $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ i numeri complessi $a+i0$, $b+i1$, $0+ib$ vengono denotati rispettivamente con a, $b+i$, ib (con i se $b=1$). Da notare che la notazione è compatibile con l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ appena introdotta.

Per ora abbiamo solo introdotto un insieme. Ora vogliamo arricchire il nostro insieme introducendovi due operazioni.

Definizione A.3. Sull'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si definiscono due operazioni, dette rispettivamente *somma* e *prodotto* nonché denotate con i simboli "+" e " $\cdot$ ", ponendo:

$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \quad &:= \quad (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \quad &:= \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)\end{aligned}$$

Si osservi che c'è un notevole abuso di notazioni: i simboli "+" e " $\cdot$ " sono gli stessi che si usano per indicare la somma e il prodotto di numeri reali, e addirittura il simbolo "+" lo abbiamo anche usato nell'espressione formale (def. A.1) che denota un numero complesso. Nonostante questo abuso di notazioni è impossibile avere ambiguità: il numero complesso $a + i\,b$ (def. A.1) risulta uguale alla somma (secondo la def. A.3) dei numeri complessi a ed $i\,b$; (inoltre, il numero complesso $i\,b$ è uguale al prodotto $i \cdot b$ dei numeri complessi i e b, ciò permette che il simbolo " $\cdot$ " venga omesso senza che per questo ci sia ambiguità); somma e prodotto di numeri reali coincidono con somma e prodotto dei corrispondenti numeri complessi. Quest'ultima proprietà è ben più della legittimazione di un abuso di notazione, per questo motivo la ripetiamo:

Proposizione A.4. *L'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ rispetta le operazioni di somma e prodotto.*

Osservazione A.5. Si ha

$$i^2 \quad = \quad -1$$

$\big($nella notazione della def. A.1: $(0 + i\,1) \cdot (0 + i\,1) \;=\; -1 + i\,0\big)$.

Il numero complesso i viene chiamato *unità immaginaria* (sebbene di "immaginario" non vi sia nulla di più di quello che c'è in qualsiasi altra costruzione astratta, compresa la costruzione dei numeri reali!).

Osservazione A.6. La definizione del prodotto può sembrare poco naturale ma non lo è affatto: il prodotto tra numeri complessi $(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$ non è altro è altro che il risultato che si ottiene semplificando il prodotto tra polinomi

$$(a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) \quad = \quad a_1\,a_2 + i\,(b_1 + b_2) + i^2\,(b_1 b_2)$$

mediante la sostituzione di i^2 con -1. Questa prerogativa ha una conseguenza importante: possiamo considerare i numeri complessi, nonché svolgere le operazioni tra questi, come se fossero polinomi. In particolare valgono tutte quelle proprietà alle quali siamo abituati: associativa, commutativa, distributiva, esistenza dello zero e dell'opposto, esistenza dell'unità. In altri termini, vale la proposizione che segue.

Proposizione A.7. *Somma e prodotto di numeri complessi soddisfano le proprietà associativa, commutativa, distributiva, dell'esistenza dello zero, dell'opposto e dell'unità. In simboli, dati comunque dei numeri complessi $u = a + i\,b$, v e z si ha*

$$\text{(A.7}'\text{)} \qquad \begin{array}{ll} u + (v + z) \;=\; (u + v) + z \;\;, & u + v \;=\; v + u\,, \\ u \cdot (v \cdot z) \;=\; (u \cdot v) \cdot z \;\;, & u \cdot v \;=\; v \cdot u\,, \\ (u + v) \cdot z \;=\; u \cdot z \,+\, v \cdot z\,, & \\ 0 + u \;=\; u \;\;, & \exists\; -u \,|\, u + (-u) \;=\; 0 \\ 1 \cdot u \;=\; u \;\;, & 0 \cdot u \;=\; 0\;. \end{array}$$

(Naturalmente, $-u \;=\; -a - i\,b$, dove, per abuso di notazione, con $-a - i\,b$ intendiamo l'espressione formale $c + i\,d$, essendo $c = -a$ e $d = -b$, della Definizione A.1).

Esercizio A.8. Verificare le proprietà (A.7′) utilizzando direttamente la Definizione A.3.

La Proposizione (A.7) ci dice che $\mathbb{C}$ è un *anello commutativo unitario* (questo è il nome che si dà ad un insieme sul quale sono definite due operazioni che soddisfano le proprietà[28] (A.7′)). In effetti $\mathbb{C}$ è un *campo*: oltre alle proprietà indicate, ogni elemento non nullo ammette un inverso (che risulta essere unico). Possiamo essere più precisi:

(A.10) $\quad$ dato $u = a + ib \neq 0$ e posto $\rho := a^2 + b^2$, $\quad$ risulta $u \cdot \left(\frac{a}{\rho} - i\frac{b}{\rho}\right) = 1$

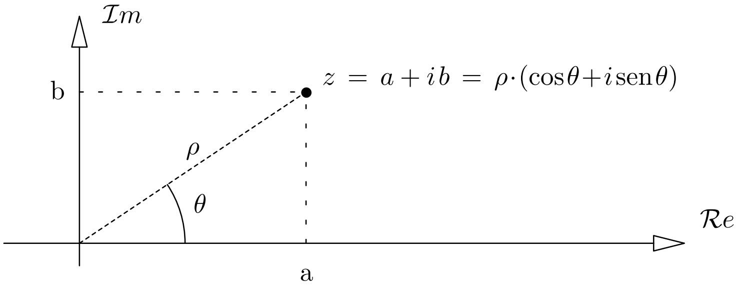
(si osservi che essendo u non nullo per ipotesi risulta anche $\rho \neq 0$). Tale numero, che viene denotato con u^{-1}, è l'unico numero che gode di questa proprietà (si ha esistenza e unicità[29] del reciproco di un numero complesso non nullo).

Esempio. L'inverso di $2 + 5i$ è il numero $\frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$ (lo studente svolga il prodotto e verifichi che dà 1).

Esercizio A.11. Calcolare $\big(1 + 7i\big)^{-1}$, $\big(19i\big)^{-1}$, $\big(14\big)^{-1}$, $\big(3 + 4i\big)^{-1}$, $\big(8 - i\big)^{-1}$.

A questo punto vogliamo fornire una rappresentazione grafica dei numeri complessi ed introdurre un po' di terminologia. La rappresentazione grafica di $z = a + ib$ è quella indicata in figura.

(fig. A.12)



dove $\mathcal{R}e$ ed $\mathcal{I}m$ denotano parte reale e parte immaginaria. La lunghezza ρ del segmento che unisce l'origine degli assi con "z", o meglio, se preferite, con il punto di coordinate (a, b), si chiama *modulo* di z e si indica con $|z|$. Ora assumiamo $z \neq 0$, l'angolo θ rappresentato in figura si chiama *argomento* di z. Chiaramente risulta $a = \rho\cdot\cos\theta$, $b = \rho\cdot\mathrm{sen}\theta$. La rappresentazione

(A.13) $$z \;=\; \rho\cdot(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$$

si chiama *rappresentazione polare* di z, modulo e argomento di z (cioè i valori ρ e θ) si chiamano anche *coordinate polari* di z. Il numero complesso $\overline{z} := a - ib$ si chiama *coniugato* di z (la notazione usuale è quella che abbiamo appena adottato: per indicare il coniugato di un numero complesso ci si mette una barra sopra, ad esempio $\overline{3 + 7i} = 3 - 7i$). La funzione coniugio è, per definizione, la funzione che associa ad un numero complesso il suo coniugato. Si osservi che $\overline{z} := a - ib = \rho\cdot(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta) = \rho\cdot\big(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\big)$, pertanto $\overline{z}$ ha stesso modulo ed argomento opposto di z. Si osservi quanto segue:

(A.14)
$$\begin{aligned} z\cdot\overline{z} \;&=\; \rho^2 \;=\; |z|^2 \qquad \text{(in particolare è un numero reale)} \\ \frac{1}{z} \;&=\; \frac{a}{\rho^2} - i\,\frac{b}{\rho^2} \;=\; \frac{\overline{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

(di fatto abbiamo riscritto la (A.10)).

[28] In inciso, la proprietà $0 \cdot u = 0$ può essere dedotta dalle altre. Dalle proprietà (A.7′) si ottiene anche $-1 \cdot u = -u = 1 \cdot (-u)$.

[29] L'unicità segue dalle proprietà (A.7′):
$$a \cdot u = b \cdot u = 1 \quad\Longrightarrow\quad a = a \cdot 1 = a \cdot (b \cdot u) = a \cdot (u \cdot b) = (a \cdot u) \cdot b = 1 \cdot b = b\,.$$

In termini di coordinate polari, il prodotto di numeri complessi si effettua moltiplicando i moduli e sommando gli argomenti. Infatti:

$$\text{(A.15)} \qquad \big[\,\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\big]\cdot\big[\,\ell(\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\,\psi)\,\big] \;=\; \rho\,\ell\,\big[\cos(\theta+\psi) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta+\psi)\big]$$

Pertanto, si ha anche

$$\text{(A.16)} \qquad \big[\,\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\big]^n \;=\; \rho^n\,\big[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta)\big]\;.$$

Questa formula consente di estrarre senza difficoltà le radici di un numero complesso: consideriamo $z = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)$, i numeri complessi x che soddisfano l'equazione $x^n = z$ sono i numeri complessi di modulo $\sqrt[n]{\rho}$ e di argomento φ che soddisfa l'equazione

$$\text{(A.17)} \qquad n\varphi \;=\; \theta \qquad (\mathit{modulo}\ 2\pi)\;,$$

dove la postilla tra parentesi sottintende il fatto che si tratta di un'identità di angoli, algebricamente ha il significato che segue: consideriamo $n\varphi$ uguale a θ se la loro differenza è un multiplo intero di 2π (che è l'angolo nullo). Ogni angolo del tipo $\varphi_k := \frac{2k\pi+\theta}{n}$ (con k intero) è una soluzione dell'equazione (A.17), d'altro canto $\varphi_k = \varphi_{k+n}$ ed è quindi chiaro che per ottenere tutte le soluzioni senza ripetizioni l'indice k deve variare da 0 ad $n-1$:

$$\text{(A.18)}\ \ \text{le soluzioni dell'equazione } (A.17) \text{ sono :} \quad \frac{2\pi+\theta}{n},\ \ \frac{4\pi+\theta}{n},\ \ \ldots,\ \ \frac{2(k-1)\pi+\theta}{n}\;.$$

In definitiva, l'equazione $x^n = z$ ha esattamente n radici distinte:

$$\text{(A.19)} \qquad \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) \;+\; i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right], \qquad k \;=\; 0,\,1,\,\ldots,\,n-1\,.$$

Esercizio A.20. Calcolare le radici cubiche del numero $2+2i$.

Soluzione. Scriviamo $2+2i$ in forma polare: $|2+2i| = 2\sqrt{2}$, quindi

$$2+2i \;=\; 2\sqrt{2}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right] \;=\; 2\sqrt{2}\left[\cos\tfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}\right].$$

Gli angoli φ che soddisfano l'equazione $3\varphi = \frac{\pi}{4}$ sono $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, quindi le radici cubiche cercate sono

$$\sqrt{2}\left[\cos\tfrac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{12}\right], \qquad -1+i, \qquad \sqrt{2}\left[\cos\tfrac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{17\pi}{12}\right].$$

□

Esercizio A.21. Calcolare:

a) le radici quadrate dei numeri $1+\sqrt{3}i$, i, $-i$, 1, -1.

b) le radici cubiche dei numeri $27i$, -1.

c) le radici quarte dei numeri -4, 1, -1, $-2+2\sqrt{3}i$.

d) le radici seste dei numeri $2+2i$, $-27i$, $4+4\sqrt{3}i$.

Prima di procedere ricordiamo un fatto generale concernente la divisione tra polinomi: dati due polinomi $p(x)$ di grado n e $d(x)$ di grado m si ha che esistono (e sono unici) due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$, quest'ultimo di grado strettamente minore di m, tali che

$$p(x) \;=\; d(x)\cdot q(x) + r(x)\;, \qquad \mathrm{grado}\,r(x) \;\leq\; m-1$$

Il calcolo di $q(x)$ ed $r(x)$ si chiama *divisione con resto*. Sicuramente avrete visto l'algoritmo della divisione tra polinomi reali (che peraltro è assolutamente identico a quello della divisione tra numeri interi). Qualora $p(x)$ e $d(x)$ siano polinomi complessi non cambia una virgola. Ad esempio, la divisione $5x^4+(2-i)x^3+(-3+2i)x^2+2x+5-i \,:\, (2-i)x^2-1$ si effettuerà scrivendo

$$
\begin{array}{r|l}
5x^4+(2-i)x^3+(-3+2i)x^2+2x+5-i & (2-i)x^2-1 \\ \cline{2-2}
5x^4 \qquad\qquad -(2+i)x^2 \qquad\qquad\quad & (2+i)x^2 + x - 1 + i \\ \cline{1-1}
(2-i)x^3+(-1+3i)x^2+2x+5-i & \\
(2-i)x^3 \qquad\qquad\quad -x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
(-1+3i)x^2+3x+5-i & \\
(-1+3i)x^2 \qquad +1-i & \\ \cline{1-1}
3x + 4 &
\end{array}
$$

In definitiva risulta

$$5x^4+(2-i)x^3+(-3+2i)x^2+2x+5-i \;=\; \big[(2-i)x^2-1\big]\cdot\overbrace{\big[(2+i)x^2+x-1+i\big]}^{\text{quoziente}}+\overbrace{3x+4}^{\text{resto}}.$$

Abbiamo visto che l'equazione $x^n = z$ ha esattamente n radici. Più in generale, ciò vale per ogni polinomio.

Teorema Fondamentale dell'Algebra. *Ogni polinomio $P(x)$ a coefficienti complessi si può fattorizzare nel prodotto di polinomi di primo grado*:

$$p(x) \quad = \quad a\cdot(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$$

dove $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\ \in \mathbb{C}$.

Da notare che risulta $p(\lambda_i) = 0$ per ogni i. D'altro canto, fissato un valore λ è possibile scrivere $p(x) = (x-\lambda)\cdot q(x) + r$, dove $q(x)$ ed r sono quoziente e resto della divisione $p(x) : (x-\lambda)$ (il resto di questa divisione deve avere grado zero, ovvero deve essere una costante). Di conseguenza, se risulta $p(\lambda) = 0$ si ha anche $r = 0$ e pertanto $x-\lambda$ è un fattore di $p(x)$. Naturalmente la stessa radice potrà comparire più volte. Ricapitolando:

i) i λ_i sono esattamente le radici del polinomio;

ii) i λ_i **non** sono necessariamente distinti.

Come conseguenza del risultato sulla divisione tra polinomi abbiamo che il Teorema Fondamentale dell'Algebra è equivalente all'affermazione che segue:

(A.22) *ogni polinomio complesso ammette almeno una radice*

Dimostrazione. Se ogni polinomio ha una radice, dato un polinomio $p(x)$ lo possiamo scrivere nella forma $p(x) = (x-\lambda)\cdot q(x)$, quindi iterando il discorso o se preferite per ragioni induttive sul grado dei polinomi da decomporre, lo possiamo decomporre in fattori di primo grado. □

Il Teorema Fondamentale dell'Algebra può essere dimostrato sia con metodi algebrici che analitici che topologici. Noi non lo dimostriamo.

Concludiamo questa appendice con due importanti conseguenze del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Premettiamo due osservazioni.

Osservazione A.23. Siano z e w due numeri complessi, si ha

$$(\text{A.23}') \qquad \overline{z}+\overline{w} \;=\; \overline{z+w}\,, \qquad \overline{z}\cdot\overline{w} \;=\; \overline{z\cdot w}\,.$$

Ne segue che se $p(x)$ è un polinomio **reale** (cioè i suoi coefficienti sono numeri reali) allora

$$(\text{A.23}'') \qquad p(\overline{z}) \;=\; \overline{p(z)}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Dimostrazione. La (A.23′) è immediata: per dimostrarla basta porre $z = a+ib$, $w = c+id$ e scrivere per esteso le espressioni ivi indicate (lo studente è invitato a scriverle).
La (A.23″) segue dalla (A.23′): un polinomio è fatto di somme e prodotti (i coefficienti non cambiano perché essendo per ipotesi reali coincidono con i propri coniugati). □

Come conseguenza della (A.23″) si ottiene il seguente lemma.

Lemma A.24. Sia $p(x)$ un polinomi **reale**. Allora

$$p(\lambda) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p\big(\overline{\lambda}\big) \;=\; 0$$

cioè se λ è una radice di $p(x)$ allora anche $\overline{\lambda}$ lo è.

Dimostrazione. Si ha $p\big(\overline{\lambda}\big) \;=\; \overline{p(\lambda)} \;=\; \overline{0} \;=\; 0\,.$ □

Corollario A.25. Ogni polinomio **reale** si fattorizza nel prodotto di polinomi **reali** di primo e secondo grado.

Dimostrazione. Sia $p(x)$ un polinomio reale. Fattorizziamolo sui complessi. Per il Lemma A.24, per ogni radice $\lambda = a+ib$ non reale (cioè con $b \neq 0$) troviamo anche la radice $\overline{\lambda} = a - ib$ (distinta da λ). D'altro canto

$$(x-\lambda)\cdot(x-\overline{\lambda}) \;=\; (x-a-ib)\cdot(x-a+ib) \;=\; x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

è un polinomio reale nonché un fattore di $p(x)$. Quanto visto permette di raccogliere in ogni polinomio almeno un polinomio di grado uno o due. Per ragioni induttive otteniamo la tesi. □

Da notare che questo risultato concerne esclusivamente l'ambito reale ma che lo abbiamo dedotto dal Teorema Fondamentale dell'Algebra, in particolare usando i numeri complessi.

Soluzione degli esercizi.

A.11. $\big(1+7i\big)^{-1} = \frac{1}{50}-\frac{7}{\sqrt{50}}i$; $\big(19i\big)^{-1} = -\frac{1}{19}i$; $\big(14\big)^{-1} = \frac{1}{14}$; $\big(3+4i\big)^{-1} = \frac{3}{25}-\frac{4}{\sqrt{25}}i$; $\big(8-i\big)^{-1} = \frac{8}{65}+\frac{1}{65}i$.

A.21. **a)** $1+\sqrt{3}i = \Big[\pm\Big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^2$; $i = \Big[\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^2$; $-i = \Big[\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^2$; $1 = [\pm 1]^2$; $-1 = [\pm i]^2$; **b)** $27i = \Big[\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\Big]^3 = \Big[-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\Big]^3 = [-3i]^3$; $-1 = [-1]^3 = \Big[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big]^3 = \Big[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big]^3$; **c)** $-4 = [\pm(1+i)]^4 = [\pm(1-i)]^4$; $1 = [\pm 1]^4 = [\pm i]^4$; $-1 = \Big[\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^4 = \Big[\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^4$;
$-2+2\sqrt{3}i = \Big[\pm\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\Big)\Big]^4 = \Big[\pm\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)\Big]^4$;
d) $2+2i = \Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{(1+8k)\pi}{24}+i\,\mathrm{sen}\frac{(1+8k)\pi}{24}\Big)\Big]^6$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;
$-27i = \Big[\sqrt{3}\Big(\cos\frac{(3+4k)\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\frac{(3+4k)\pi}{12}\Big)\Big]^6$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;
$4+4\sqrt{3}i = \Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{(1+6k)\pi}{18}+i\,\mathrm{sen}\frac{(1+6k)\pi}{18}\Big)\Big]^6$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

III

ESERCIZI DI RIEPILOGO E TESTI D'ESAME

Gli esercizi contrassegnati con un asterisco appartengono a testi d'esame. È importante che lo studenti impari a motivare in forma scritta (e si richiede un lavoro in tal senso), con spiegazioni chiare ed essenziali, le risposte date ai quesiti proposti.

Gli esercizi sono catalogati per argomenti. Naturalmente, per quel che riguarda i testi d'esami questa catalogazione è meno rigorosa: può accadere che un esercizio catalogato sotto una certa etichetta richieda in parte la conoscenza di nozioni successive.

§1. Matrici.

Esercizio 1.1. Calcolare i seguenti prodotti tra matrici

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ -k & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2k & -3k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.2. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},$$

calcolare i seguenti prodotti: *i)* $(AB)C$, $A(BC)$; *ii)* $C(AB)$, $(CA)B$; *iii)* $(AB)(CD)$, $A(B(CD))$, $A((BC)D)$, $((AB)C)D$, $(A(BC))D$.

Esercizio 1.3. Calcolare il determinante (sia usando l'E.G. che lo sviluppo di Laplace) delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 19 & 342 \\ 0 & 2 & 119 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 109 & 329 & 7 \\ 214 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 437 \\ 7 & 259 & 372 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 943 & 2 & 0 \\ 234 & -698 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.4. Calcolare il determinante (in funzione del parametro k) delle matrici che seguono ed indicare per quali valori di k non sono invertibili.

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k-4 \\ 1 & 2-3k \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k+2 & k-4 \\ -3k-16 & 2-3k \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -k+3 & k+2 \\ k & -1+k \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2-k & k+1 \\ k & 2+3k \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & -1 \\ -1 & k & 1 \\ 2k-1 & 1-k & 1-2k \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -k & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ k & k+1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -k \\ 3k & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k+1 & k-3 \\ 5 & 1+3k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2k+3 & -k & 1-k \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k+1 & 71k-328 & k-3 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 5 & 34k-519 & 1+3k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k+5 & k+1 & -11-k \\ 0 & 3k-4 & -11k-81 \\ 0 & 0 & 16+k^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16+k^2 \\ 0 & 3k-4 & -11k-81 \\ k+5 & k+1 & -11-k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3k-4 & -11k-81 \\ k+5 & k+1 & -11-k \\ 0 & 0 & 16+k^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.5. Sia $A \in M_{n,n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Esprimere $\det(\lambda A)$ in funzione di $\det A$ e di λ.

Esercizio 1.6. Si considerino le matrici che seguono

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} k & 19 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k-1 & 3 & 1 \\ 0 & k-8 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & k+6 \\ -1 & -3 & 1 \\ k+6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k+1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2-k & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare l'invertibilità e calcolare l'inversa delle matrici A, B, C, D, E, F, G, H, effettuare inoltre la controprova (ricordiamo che due matrici sono l'una l'inversa dell'altra se e solo se il loro prodotto dà la matrice identica);

b) calcolare i determinanti: $\det\big(A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A\big)$, $\det\Big(2 \cdot \big(B^{-1}\big)^2\Big)$, $\det\big(6 \cdot C^{-1}\big)$, $\det\big(3(F^{-1})^2 \cdot M^2\big)$, $\det\big(2H - N\big)$, $\det\big(3(H^{-1})^2 N^3\big)$, $\det\big(3A^{-2}B^3\big)$, $\det\big(G - M\big)$, $\det\big(A \cdot G - A \cdot M\big)$, $\det\big(G^2 \cdot M - G \cdot M^2\big)$, $\det\big(2A - A \cdot N \cdot H^{-1}\big)$, $\det\big(H^{-3} - H^{-4}\big)$.

c) determinare i valori del parametro k per i quali le matrici che seguono sono invertibili: $E^{-1} \cdot J^2 \cdot K$, $3G^{-2} \cdot M^2$, $2B \cdot D^{-3} \cdot H \cdot J^2 \cdot N$; $19A \cdot B^{-5} \cdot C \cdot D^3 \cdot E \cdot F^{11} \cdot G \cdot H^7$.

d) trovare delle matrici Q, R, S, T, U, $\in M_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ che soddisfano le proprietà indicate: $\det(A - Q) = 1$, $\det(A \cdot R) = 1$, $\operatorname{rango}(B \cdot S) = 2$, $\operatorname{rango}(C \cdot T) = 1$, $\ker(A \cdot U) = \operatorname{Span}\{\vec{e}_1\}$. $\dim\ker(A \cdot X) = 2$, $\dim\ker(Y \cdot A) = 2$.

Esercizio 1.7. Determinare il rango (in funzione del parametro k) delle matrici che seguono:

$$M = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & k-7 & 7-k & 0 \\ 7 & 4 & k & -k & 2k+8 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} k+4 & k-1 & 0 & k+4 & 2k+3 \\ 1 & k-1 & 2k-2 & 2k-1 & k \\ k+3 & 0 & 2-2k & 5-k & k+3 \\ 3 & 2k-2 & 2k-2 & 2k+1 & 2k+1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.8. Per ognuna delle matrici che seguono, determinare i valori del parametro t per i quali è invertibile e, per tali valori, calcolarne l'inversa in funzione di t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t+1 \\ 4-t & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & t+1 \\ 4-t & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & t+1 & 0 & 0 \\ 4-t & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & t+1 \\ 0 & 0 & 4-t & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3t & 15-6t \\ -2t & 4t-10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & t+1 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 2t-4 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & t & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-7 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^3 & t^2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & t-3 & -3 & 1 \\ t+2 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 3t-1 & 5 & 2 & 2 & t+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t-13 & 0 & t^2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & t-3 & -3 & 1 \\ t & t & t & t & t \\ 3t-1 & 5 & 2 & 2 & t+5 \\ t & t & t & t & t \\ t-13 & 0 & t^2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.9. Trovare quattro matrici $A, B, C, D \in M_{2,2}$ tali che:
a) $\det(A+B) \neq \det A + \det B$; **b)** $\det(C+D) = \det C + \det D$.

Esercizio 1.10. Trovare due matrici quadrate invertibili la cui somma non è invertibile.

Esercizio 1.11. Si considerino le matrici che seguono (dove $a, b, c \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$; **b)** calcolare $\det B$; **c)** calcolare la potenza n-esima C^n della matrice C (cioè il prodotto di C con se stessa n volte) per ogni $n \in \mathbb{N}$; **d)** calcolare la potenza n-esima D^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.12. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, trovare tutte le matrici $B \in M_{2,2}$ tali che $AB = BA$.

Esercizio 1.13. Trovare tutte le matrici $P \in M_{2,2}$ tali che $P^2 = P$.

Esercizio 1.14. Trovare tutte le matrici $A \in M_{2,2}$ tali che $A^2 = 0$ (matrice nulla 2×2).

$*$ **Esercizio 1.15.** Determinare tutti i valori di k per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-6 & 3 & -k-2 & 3 & -k-2 \\ 2k+1 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 5k+9 & 6 & k+17 & 6 & k+17 \end{pmatrix}$$

a) ha rango 0; **b)** ha rango 1; **c)** ha rango 2; **d)** ha rango 3.

$*$ **Esercizio 1.16.** Siano $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Calcolare l'inversa della matrice A;
b) Determinare le soluzioni del sistema lineare $A^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

$*$ **Esercizio 1.17.** Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ k & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ due matrici.

a) Calcolare l'inversa della matrice A;
b) determinare i valori del parametro k per i quali il prodotto $A^2 \cdot B^3$ è invertibile;
c) posto $k = 0$, calcolare $A^2 \cdot B^3 \cdot \vec{e}_1$, dove $\vec{e}_1$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 1.18.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) calcolare: l'inversa di A, $\det(2AB^2)$, $\det(2A+B)$, $\det\big(2(A^{-1})^2B^2\big)$;
b) trovare una matrice C in modo tale che $A + C$ abbia rango 1;
c) trovare una matrice D in modo tale che $A \cdot D$ abbia rango 1.

$*$ **Esercizio 1.19.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \\ -2 & -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) calcolare: l'inversa di A, $\det(2AB^2)$, $\det(2A+B)$, $\det\big(2(A^{-1})^2B^2\big)$, $AB(\vec{v})$;
b) trovare una matrice D in modo tale che il nucleo del prodotto $A \cdot D$ sia uguale allo spazio $\mathrm{Span}\{\vec{v}\}$.

$*$ **Esercizio 1.20.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare:

a) A^{-2}; **b)** i determinanti $\det\big(A^n\big)$ e $\det\big(n\cdot A\big)$ (al variare di $n \in \mathbb{N}$).

$*$ **Esercizio 1.21.** Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ una matrice, sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice che dipende da un parametro k, sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Calcolare l'inversa della matrice A; **b)** posto $k = 0$, calcolare $B \cdot A^3 \cdot \vec{e}_3$;
c) determinare i valori del parametro k per i quali il prodotto $A^3 \cdot B^2$ è invertibile;
d) posto $k = 0$, determinare una soluzione $\vec{x}$ dell'equazione $A\cdot\vec{x} = B\cdot\vec{e}_3$.

$*$ **Esercizio 1.22.** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_t = \begin{pmatrix} t-1 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che A è invertibile e determinare i valori di t per i quali B_t è invertibile;
b) calcolare $\det\big(4 \cdot A^{-3} \cdot B^2\big)$ e $\det(A + B)$; **c)** calcolare $C = A^{-1}\cdot(A + A\cdot B)$ (suggerimento: usate la proprietà distributiva, evitate calcoli inutili!)

$*$ **Esercizio 1.23.** **a)** Determinare tutte le matrici invertibili $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ (con n arbitrario) soddisfacenti la condizione $A^3 = A^2$; **b)** (*facoltativo*) siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici e sia $a = \det A$, $b = \det B$, $c = \det(A + B)$. Calcolare il determinante della matrice $\lambda\big(A^2BA + A^2B^2\big)$ (suggerimento: usate la proprietà distributiva).

$*$ **Esercizio 1.24.** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) determinare l'inversa della matrice A;
b) calcolare i determinanti $\det(A^{-1}\cdot B_\kappa\cdot A^2)$, $\det(2B_\kappa)$, $\det(A+B_\kappa)$ in funzione di k;
c) (*facoltativo*) Dimostrare le uguaglianze che seguono (dove I denota la matrice identica): $\text{rango}\big(B_k \cdot A^2\big) = \text{rango}\, B_k$, $\text{rango}\big(A^{-1} \cdot B_k \cdot A^2 + A\big) = \text{rango}\big(B_k + I\big)$.

$*$ **Esercizio 1.25.** Siano A, $B \in M_{n,n}$, $C \in M_{n,k}$ tre matrici dipendenti da un parametro t. Supponiamo che $\det A = t^2 - 1$, $\det B = t + 1$, $\det(A - B) = t^2 + 3$, $\text{rango}\, C = 2$.

a) Studiare l'invertibilità delle matrice $B \cdot A^3 \cdot B^2$ al variare di t;
b) calcolare il rango della matrice $A \cdot C - B \cdot C$ (giustificare la risposta).

Rispondere ad almeno **una** delle seguenti domande (l'altra verrà considerata **facoltativa**):
c) per i valori di t per i quali B è invertibile, calcolare $\det\big(A^4 \cdot B^{-2} - A^3 \cdot B^{-1}\big)$;
d) sia $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trovare due matrici E, $F \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, entrambe di rango 2, tali che risulti $\text{rango}\,(D \cdot E) = 1$, $\text{rango}\,(D \cdot F) = 2$.

§2. Sistemi Lineari.

Esercizio 2.1. Risolvere i sistemi lineari che seguono utilizzando:
i) il metodo di Gauss; *ii*) il calcolo dell'inversa della matrice incompleta;
iii) il teorema di Cramer (spiegando cos'è che ne garantisce l'applicabilità).

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 7y + 3z = 2 \\ -x + 2z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 4x - 3y - z = 1 \\ 9x - 7y + 2z = 2 \\ -17x + 13y + 2z = 3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3x + 5y + 3z = -1 \\ 6x + 9y + 5z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

(...metodi differenti devono dare lo stesso risultato!).

Esercizio 2.2. Risolvere, utilizzando l'E.G., i sistemi lineari (nelle incognite indicate)

$$\begin{cases} x + y - z + 2w = 3 \\ x - y - z - w = -2 \\ x + 2y - 2z + 3w = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y - z + 2w = 5 \\ 3x + y - 5z + w = 0 \\ 2x - 4z - 5w = -7 \\ x + 7y - 2z + 8w = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_1 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_3 + x_5 - 3x_6 - x_7 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 - x_7 = 2 \\ x_1 + 3x_4 - x_5 - 5x_6 + 3x_7 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_5 + 4x_6 + x_7 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 - x_7 = 2 \end{cases}$$

e, per ognuno di essi, indicare esplicitamente i parametri liberi delle soluzioni trovate.

Esercizio 2.3. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari hanno soluzione unica, infinite soluzioni o sono incompatibili:

$$\begin{cases} 2x + ky = 2 \\ kx + 2y = k \\ ky + kz = k \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x + 2y + kz = 11 \\ 2x - 6y - 3z = 0 \\ kx + 4y + 2x = 7 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y + z = k \\ 2x + 3y + 7z = 5 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 2.4. Si considerino i sistemi lineari che seguono. Studiarne la compatibilità e indicarne la dimensione dello spazio delle soluzioni in funzione del parametro k.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 8 & t-2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{pmatrix} 2k-8 & 2k-5 & 3k-4 \\ 0 & k+2 & 2k+8 \\ 0 & 0 & 3k-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ k+4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{S}_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -t & 2 \\ 1 & t+3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -t & t+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t+4 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{S}_4 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & t+6 & t-1 & 3 \\ 2 & t+10 & t-4 & t+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ t+6 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{S}_5 : \begin{pmatrix} k & 0 & -3 \\ -1 & 0 & k+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{S}_6 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1-k & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 7+k & 9+k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{S}_7 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 1-k & 8 & -8 \\ 1 & -1 & 9+k & 1+k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{S}_8 : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & k-6 & 1 \\ k & k+1 & k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.5. Abbiamo visto che possiamo risolvere un sistema lineare nel modo seguente:
1) scriviamo la matrice completa associata $\widetilde{A}$;
2) riduciamo $\widetilde{A}$ ad una matrice a scala tramite l'eliminazione di Gauss (le operazioni consentite sono: cambiare l'ordine delle righe, moltiplicare una riga per una costante non nulla, sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre);
3) scriviamo il sistema associato alla matrice ottenuta (che è un sistema a scala, equivalente a quello di partenza) e lo risolviamo per sostituzione (partendo dall'ultima equazione).

Sarebbe corretto, quando riduciamo $\widetilde{A}$ ad una matrice a scala,
a) cambiare l'ordine delle colonne? Perché?
b) effettuare due passaggi contemporaneamente (ad esempio: sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre e, allo stesso tempo, sommare ad un'altra riga una combinazione lineare delle altre)?
Esempio. Nel passaggio da A a B che segue sommiamo alla prima riga la combinazione lineare di coefficienti 2 e 1 di seconda e terza riga e sommiamo alla terza riga la prima riga:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ -3 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 16 & 4 & 13 & 7 & 14 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ -2 & 10 & 12 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

E' vero che i sistemi lineari associati alle matrici A e B sono equivalenti? Perché?
c) dividere una riga per due? Perché?
d) eliminare una riga costituita da tutti zeri? Perché?
e) eliminare una colonna costituita da tutti zeri? Perché?
f) sommare ad una colonna una combinazione lineare delle altre? Perché?
g) moltiplicare una colonna per una costante non nulla? Perché?

Esercizio 2.6. Siano $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$, $\mathcal{S}_D$, $\mathcal{S}_E$, $\mathcal{S}_F$, $\mathcal{S}_G$, $\mathcal{S}_H$, $\mathcal{S}_L$, $\mathcal{S}_M$, $\mathcal{S}_N$ i sistemi lineari aventi come matrici complete associate rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Indicare quali sistemi lineari sono compatibili, hanno un'unica soluzione, hanno infinite soluzioni (per essi, dire quanti sono i parametri liberi);
b) dire se ci sono sistemi lineari equivalenti tra loro ed indicare quali.

Esercizio 2.7. Discutere, al variare del parametro k, la compatibilità dei sistemi lineari $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ nei seguenti casi:

a) $A = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 \\ -2k-3 & 4k-6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1+k \\ 3-k \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \\ 1 & 4-k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} k+1 & 5 \\ -2k+2 & k \\ 4 & 10+k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ -2k & -4k & k-3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}$.

$*$ **Esercizio 2.8.** Trovare i valori di k per i quali il sistema lineare nelle incognite x ed y,

$$\begin{cases} (6k-4)\,x \;+\; (5k-2)\,y & = \;-8 \\ (7k-7)\,x \;+\; (6k-5)\,y & = \;-7 \end{cases}$$

a) è incompatibile; **b)** ammette una unica soluzione; **c)** ammette infinite soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.9.** Siano $A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 2-k \\ 0 & k+6 & k+3 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2k-8 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Determinare i valori di k per i quali il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ (nelle incognite x_1, x_2, x_3)
a) è incompatibile; **b)** ammette un'unica soluzione; **c)** ammette infinite soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.10.** Si consideri il sistema lineare $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 2t & 5+t & 4 \\ 4 & 9-2t & 7-t & 5+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11+t \\ 10+t \end{pmatrix}$.

Determinare i valori di t per i quali il sistema
a) è incompatibile; **b)** ammette infinite soluzioni, dipendenti da un solo parametro libero; **c)** ammette infinite soluzioni, dipendenti da 2 parametri liberi.

$*$ **Esercizio 2.11.** Si consideri il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} t+30 & t+45 & 15 & t+10 & 5 \\ t-5 & 2t-10 & t-5 & 0 & 0 \\ -2-t & -5-t & -3 & -3 & 4-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare, al variare del parametro t, la dimensione dello spazio W_t delle soluzioni del sistema dato; **b)** scegliere (a proprio piacere) un valore $\tilde{t}$ del parametro e, per tale valore, trovare una base di $W_{\tilde{t}}$.

$*$ **Esercizio 2.12.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} t+12 & t & -2 & t+9 & 5 \\ t+1 & 2t+2 & t+1 & 0 & 0 \\ 10-t & t & -2 & 8 & 4-t \end{pmatrix}$, sia W_t lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
a) Determinare, al variare del parametro t, la dimensione di W_t;
b) per i valori del parametro t per i quali W_t ha dimensione 3, trovare una base di W_t.

$*$ **Esercizio 2.13.** Si consideri il sistema lineare $\begin{pmatrix} t & 0 & t+3 \\ 6 & t+2 & 1 \\ 1 & 0 & t+2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinare i valori del parametro t per i quali il sistema
a) è incompatibile; **b)** ammette un'unica soluzione; **c)** ammette infinite soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.14.** Determinare i valori della costante k per i quali il sistema lineare, nelle incognite x, y, z,

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = \;1 \\ 3x + (k-3)y + 7z & = \;4 \\ -9x + (k+5)y + (k+6)z & = \;2 \end{cases}$$

a) ammette una unica soluzione; **b)** ammette infinite soluzioni; **c)** è incompatibile.

$*$ **Esercizio 2.15.** Dato il sistema lineare $\begin{pmatrix} t+3 & 0 & 2 & -1 & 2t-1 \\ 2t+9 & 0 & t+9 & -2 & t-11 \\ t+1 & 0 & 2 & -3 & 2t-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinare i valori del parametro t per i quali il sistema
a) è incompatibile; **b)** ammette un'unica soluzione; **c)** ammette infinite soluzioni e, per ciascuno di tali valori di t, indicare da quanti parametri liberi dipendono le soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.16.** Si consideri il sistema lineare $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$, nelle incognite x, y, z. Determinare i valori del parametro λ per i quali il sistema è compatibile e per tali valori scrivere esplicitamente le soluzioni del sistema, indicando chiaramente gli eventuali parametri liberi dai quali dipendono le soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.17.** Si consideri il sistema lineare $\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ -1 & k-3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-7 \\ k+1 \\ 2k-7 \end{pmatrix}$ nelle incognite x, y. Determinare i valori della costante k per i quali il sistema è incompatibile, ammette una unica soluzione, ammette infinite soluzioni. Scrivere (per i valori di k per i quali il sistema è compatibile) le soluzioni del sistema al variare di k.

$*$ **Esercizio 2.18.** Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} (7-2k)\,x + (4-k)\,y = 1 \\ 3\,k\,x + (k+2)\,y = 2 \end{cases}$ nelle incognite x, y, dipendente del parametro k.
Studiarne la compatibilità al variare di k nonché determinarne esplicitamente le soluzioni per $k = 0$ e per gli eventuali valori di k per i quali ammette infinite soluzioni.

$*$ **Esercizio 2.19.** Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ (con coordinate x, y, z) e l'insieme $\mathcal{S}_t$ delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} t+3 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+t \\ t+4 \end{pmatrix}$$

nelle incognite x, y, z, dipendente dal parametro t.
a) Per i valori della costante t per i quali il sistema è compatibile, si indichi, in funzione di t, il numero dei parametri liberi dai quali dipende $\mathcal{S}_t$; **b)** Per il valore $t = 0$, determinare esplicitamente le soluzioni del sistema lineare dato; **c)** Indicare per quali valori di t l'insieme $\mathcal{S}_t$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
d) (*facoltativo*) sia r la retta passante per i punti P di coordinate $1, -2, 1$, Q di coordinate $1, 0, 1$. Determinare, in funzione del parametro t, quali relazioni tra quelle che seguono sono vere: $\mathcal{S}_t \subseteq r$, $r \subseteq \mathcal{S}_t$, $r = \mathcal{S}_t$, $r \neq \mathcal{S}_t$. (Spiegare le risposte date).

$*$ **Esercizio 2.20.** Si considerino il sistema lineare
$\begin{pmatrix} t & 3 & 2 \\ 2 & t-1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ t+1 \\ 5+t \end{pmatrix}$ nelle incognite x, y, z, ed il vettore $\vec{c} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
a) Studiarne la compatibilità e determinare il numero dei parametri liberi dai quali dipende l'insieme delle eventuali soluzioni, in funzione del parametro t;
b) determinare i valori del parametro t per i quali $\vec{c}$ è una soluzione del sistema dato;
c) (*facoltativo*) dimostrare che se $\vec{c}$ e $\vec{d}$ sono due soluzioni di un sistema lineare, allora anche $\lambda\vec{c} + (1-\lambda)\vec{d}$ ne è una soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

$*$ **Esercizio 2.21.** Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 0 & t+1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire i valori di t per i quali A_t è invertibile;
b) per i valori di t per i quali A_t è invertibile calcolare il determinante della matrice $5 \cdot (A_t)^{-2}$;
c) posto $t = 2$ calcolare l'inversa di A_t nonché determinare le soluzioni del sistema lineare $(A_2)^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{e}_3$ (essendo $\vec{e}_3$ il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$).

§3. Spazi Vettoriali.

Esercizio 3.1. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è un insieme indipendente; **b)** dedurre che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$; **c)** determinare le coordinate del vettore $\vec{w}$ rispetto alla base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Esercizio 3.2. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente utilizzando i vettori

a) $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix};$$

b) $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix};$$

c) $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.3. Sia $\vec{w}$ la **c.l.** di coefficienti 2, 3, 5 dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Sia} \quad V = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

a) Calcolare $\vec{w}$; **b)** verificare che $\vec{w} \in V$!!! **c)** dopo aver verificato che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di V, determinare le coordinate di $\vec{w}$ rispetto a tale base!

Esercizio 3.4. Verificare le seguenti identità:

a) $$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\};$$

b) $$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 3.5. Si determini la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}; \quad W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 3.6. Determinare delle equazioni parametriche dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ (con coordinate x_1, x_2, x_3, x_4):

$$U = \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}; \qquad V = \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$W = \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}; \qquad H = \left\{ x_1 + x_3 = 0 \right. .$$

Esercizio 3.7. Determinare delle equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$A = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \quad B = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \quad C = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 3.8. Determinare delle equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$A = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8\\4\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad B = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\4\\11\\-7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\4\\5\\-3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3.9. Siano $U = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Determinate una base dello spazio somma $U + W$ ed una base dell'intersezione $U \cap W$ quando

a) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2\\2\\1\\1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 4\\6\\3\\3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3\\4\\2\\2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1\\7\\-3\\1 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4\\2\\5\\-1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -7\\2\\1\\1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 5\\2\\1\\3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 4\\-2\\1\\-4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 13\\-2\\3\\-5 \end{pmatrix}$;

Verificate che le dimensioni degli spazi trovati soddisfano la formula di Grassmann.

Esercizio 3.10. Nei casi indicati sotto, determinare equazioni cartesiane per lo spazio W, trovare i valori del parametro t per i quali il vettore $\vec{v}_t$ appartiene a W e, per tali valori di t, scrivere le coordinate di $\vec{v}_t$ rispetto ad una base di W (indicare la base scelta).

a) $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\3\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\3\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad \vec{v}_t = \begin{pmatrix} 7\\t+4\\1\\t \end{pmatrix}$;

a) $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad \vec{v}_t = \begin{pmatrix} t-3\\7-t\\-3\\-3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.11. Nei casi che seguono, determinare basi e dimensioni di U, W, $U \cap W$, $U + W$ in funzione del parametro t, determinare gli eventuali valori di t per i quali accade qualcosa di geometricamente significativo (uno dei due spazi è contenuto nell'altro, lo spazio somma è uguale allo spazio ambiente eccetera), completare una base dell'intersezione ad una base di U, completare una base di W ad una base di $U + W$ nonché ad una base dello spazio ambiente. Nei casi $a)$, $d)$, $f)$, $g)$, $l)$ scrivere equazioni cartesiane per lo spazio U.

a) $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\-3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\3\\4 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\5\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5\\4\\-4 \end{pmatrix} \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^3$;

b) $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\3\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\-3\\3\\-6 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\7\\1\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\9\\3\\2 \end{pmatrix} \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^4$;

c) $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\t-9\\3\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\t-5\\t-7 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4\\0\\4\\8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8\\0\\-2-2t\\-10-2t \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

d) $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\-1\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\-1\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\2\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\0\\11\\4 \end{pmatrix} \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^4$;

e) $U = \ker \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -9\\ -1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\-1\\2\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2\\1\\2\\4 \end{pmatrix} \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^4$;

f) $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_k = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\k-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\5-k\\3-k\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

g) $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $W : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^4$;

h) $U : \begin{cases} 3y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, $W_t := \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1-t\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\t-4\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

i) $U = \ker\begin{pmatrix}3 & 2 & -3 & 5\\0 & 7 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\4\\-5\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

l) $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $W_k = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\k\\k+4\\6-k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\k-2\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

m) $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\8\\-7\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\-5\\6\end{pmatrix}\right\}$, $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}4\\8\\2+2t\\16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1+t\\7-t\\5+t\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.12. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{37}$. Determinate le possibili dimensioni della loro intersezione sapendo che $\dim U = 19$, $\dim W = 21$.
Suggerimento: usare la formula di Grassmann e la stima $21 \leq \dim(U+W) \leq 37$.

Esercizio 3.13. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{49}$. Supponiamo che $\dim(U \cap W) = 3$ e che $\dim U = 30$. Provare che $3 \leq \dim W \leq 22$.

Esercizio 3.14. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{50}$. Supponiamo che U sia definito da 8 equazioni cartesiane e che $\dim W = 36$. Provare le seguenti disuguaglianze:

$$28 \leq \dim(U \cap W) \leq 36 ; \qquad 42 \leq \dim(U+W) \leq 50 .$$

Suggerimento: innanzi tutto stimate la dimensione di U.

Esercizio 3.15. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ un insieme di vettori in $\mathbb{R}^4$. Provare che le tre affermazioni che seguono sono equivalenti:

i) $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$; **ii)** $\mathcal{B}$ è una base di $\mathrm{Span}\mathcal{B}$; **iii)** $\mathrm{Span}\mathcal{B} = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.16. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^4$ ed i suoi sottospazi $U = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ e $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, essendo $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\-5\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}7\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\-7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}11\\0\\-4\\0\end{pmatrix}$.

a) scrivere equazioni parametriche e cartesiane per gli spazi U e W;
b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$ e una base dello spazio somma $U + W$;
c) trovare delle equazioni cartesiane per $U \cap W$ e $U + W$;
d) trovare un vettore $\vec{v}$ tale che $\vec{v} \in U$, $\vec{v} \notin W$;
e) verificare che $\mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2\} = U + W$;
f) trovare un vettore $\vec{z}$ che non appartiene allo spazio somma $U + W$;
g) verificare che l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$;
h) dimostrare che per ogni scelta di $\vec{v}'$ e $\vec{z}'$ che soddisfano le condizioni $\vec{v}' \in U$, $\vec{v}' \notin W$, $\vec{z}' \notin U+W$ (come ai punti "d" e "f"), l'insieme $\{\vec{z}', \vec{v}', \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.17. Siano $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^5$.

a) Determinare una base degli spazi U, W, $U \cap W$, $U + W$ (indicare le dimensioni di tali spazi e verificare che soddisfano la formula di Grassmann);
b) completare: la base di U ad una base di $U + W$, la base di U ad una base di $\mathbb{R}^5$, la base di $U \cap W$ ad una base di $U + W$, la base di W ad una base di $U + W$;
c) trovare dei vettori $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{s}$, $\vec{r}$ tali che: $\vec{w} \in W$, $\vec{w} \notin U$, $\vec{u} \in U$, $\vec{u} \notin W$, $\vec{s} \in U + W$, $\vec{s} \notin U \cup W$ (unione insiemistica) $\vec{r} \in U + W$, $\vec{r} \notin U \cup W$, $\vec{r} \notin \text{Span}\{\vec{s}\}$;
d) siano $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ due vettori indipendenti appartenenti allo spazio U, dimostrare che l'insieme di vettori $\{\vec{s}, \vec{r}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ costituisce una base dello spazio somma $U + W$;
e) trovare delle equazioni cartesiane per gli spazi U, W, $U \cap W$, $U + W$.

Esercizio 3.18. Sia W l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 4 che soddisfano la relazione $p(1) = 0$.

a) Dimostrare che W è uno spazio vettoriale; **b)** trovare una base di W;
c) trovare le coordinate del polinomio $q(x) = x - x^2 + x^3 - x^4$ rispetto alla base trovata;
d) completare la base di W trovata ad una base dello spazio vettoriale V di tutti i polinomi di grado minore o uguale a 5.

∗ **Esercizio 3.19.** Siano $U = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -41 \end{pmatrix} \}$ e $W = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare un vettore $\vec{v}$ non appartenente né ad U né a W (cioè $\vec{v} \notin U$, $\vec{v} \notin W$);
b) è vero che esiste un vettore $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ non appartenente allo spazio somma $U + W$?
c) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$ ed una base dello spazio somma $U + W$.

∗ **Esercizio 3.20.** Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W := \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad \text{Sia inoltre } \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -35 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare una base e la dimensione di W; **b)** stabilire se $\vec{v} \in W$ e, in caso affermativo, determinare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base trovata.

∗ **Esercizio 3.21.** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t-5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ t-4 \\ t-1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6-2t \\ -2-2t \end{pmatrix} \right\}$$

a) Determinare i valori del parametro t per i quali si ha l'uguaglianza $U = W$;
b) determinare i valori del parametro t per i quali l'intersezione $U \cap W$ ha dimensione 1 e, per tali valori di t, determinare una base dello spazio somma $U + W$;
c) determinare i valori del parametro t per i quali lo spazio somma $U + W$ ha dimensione 2 e, per tali valori di t, determinare una base dello spazio somma $U + W$;
d) per il valore $t = 0$, trovare, se esiste, un vettore $\vec{v}$ appartenete allo spazio somma $U + W$ ma non appartenente all'unione insiemistica $U \cup W$, cioè $\vec{v} \in U + W$, $\vec{v} \notin U \cup W$.

$*$ **Esercizio 3.22.** Si considerino i vettori

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ k+4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4 .$$

Sia $U = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

a) determinare i valori del parametro k per i quali l'intersezione $U \cap W$ ha dimensione 1;
b) per uno dei valori di k trovati al punto a), determinare una base dell'intersezione $U \cap W$;
c) per uno dei valori di k trovati al punto a), dire se esiste un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ che non appartiene allo spazio somma $U+W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare esplicitamente un tale vettore.

$*$ **Esercizio 3.23.** Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, w.
Sia U il sottospazio spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - z \ = \ 0 \\ x - 2y + z + w \ = \ 0 \end{cases}, \quad \text{sia inoltre} \quad W := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Trovare una base e la dimensione degli spazi U e W; **b)** determinare una base dello spazio somma $U+W$; **c)** determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

$*$ **Esercizio 3.24.** Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $W_t = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t+2 \\ -2t \\ -t+4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ t+11 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Trovare un valore t' per il quale $\vec{v} \in W_{t'}$; **b)** trovare una base $\mathcal{B}$ di $W_{t'}$;
c) determinare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$*$ **Esercizio 3.25.** Sia $U_t = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t+11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Calcolare i valori del parametro t per i quali l'intersezione $U_t \cap W$ ha dimensione 0, ovvero 1, ovvero 2; **b)** scegliere un valore τ per il quale $U_\tau \cap W$ ha dimensione 1 e scrivere esplicitamente una base di $U_\tau \cap W$;
c) completare la base di $U_\tau \cap W$ trovata al punto b) a una base di U_τ.

$*$ **Esercizio 3.26.** Siano U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x+y-2z+w = 0$,

$$W_t \ = \ \mathrm{Span}\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) determinare una base dello spazio U; **b)** determinare i valori del parametro t per i quali si ha l'inclusione $W_t \subseteq U$; **c)** scegliere un valore τ in modo tale che risulti $\dim\big(U \cap W_\tau\big) = 1$ e scrivere un vettore che genera $U \cap W_\tau$;
d) completare la base di $U \cap W_\tau$ trovata al punto c) a una base di U.

$*$ **Esercizio 3.27.** Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} 7x + y - 2z + w \ = \ 0 \\ x - y - z + w \ = \ 0 \end{cases}$ e sia $\vec{w}_t$ il vettore di coordinate $1, t, 0, -4$.

a) determinare una base dello spazio U; **b)** determinare un valore τ per il quale risulti $\vec{w}_\tau \in U$; **c)** trovare una base di U contenente il vettore $\vec{w}_\tau$.

$*$ **Esercizio 3.28.** Si considerino i sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$, il vettore $\vec{v}_t \in \mathbb{R}^4$ (dipendente dal parametro t) definiti come segue:

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\-2\\-9\end{pmatrix}\right\}, \quad W = \ker\begin{pmatrix}1 & -6 & 1 & -2\\-3 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_t = \begin{pmatrix}2\\t\\-2\\-3t\end{pmatrix}.$$

a) determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ dell'intersezione $U \cap W$;
b) determinare i valori del parametro t per i quali $\vec{v}_t$ appartiene allo spazio W nonché i valori per i quali $\vec{v}_t$ appartiene all'intersezione $U \cap W$;
c) completare la base di $U \cap W$ trovata al punto $a)$ a una base di $U + W$.

$*$ **Esercizio 3.29.** Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, w. Siano W lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2w = 0 \end{cases}$, $V_\lambda = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\\lambda+1\\0\\\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2-\lambda\\2\\3\\\lambda-3\end{pmatrix}\right\}$.

Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione di V_λ. Determinare equazioni parametriche per lo spazio somma $V_\lambda + W$. Dedurre, utilizzando la formula di Grassmann, per quali valori del parametro λ si ha $V_\lambda \cap W = \{\vec{0}\}$.

$*$ **Esercizio 3.30.** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \ker\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 0\\-3 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad W_t = \text{Span}\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}t\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

a) Determinare una base dello spazio U; **b)** determinare i valori del parametro t per i quali lo spazio somma $W_t + U$ ha dimensione 3; **c)** scegliere un valore t' in modo tale che risulti $\dim\big(U \cap W_{t'}\big) = 1$ e scrivere una base di $U \cap W_{t'}$; **d)** completare la base di $U \cap W_{t'}$ trovata al punto $c)$ a una base di U.

$*$ **Esercizio 3.31.** Siano $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-6\end{pmatrix}\right\}$, $W_k = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\k+2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2k+5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\k+2\\2k-5\end{pmatrix}\right\}$.

a) Determinare la dimensione dell'intersezione $U \cap W_k$ in funzione del parametro k;
b) scegliere un valore di k per il quale l'intersezione $U \cap W_k$ ha dimensione 1 e, per tale valore, scrivere una base di tale intersezione.

$*$ **Esercizio 3.32.** Sia $U = \text{Span}\left\{\vec{u}_1 := \begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ e sia $\vec{v}_k = \begin{pmatrix}k+4\\-3\\k-4\end{pmatrix}$.

a) Determinare equazioni cartesiane per lo spazio U; **b)** trovare il valore k_0 del parametro k per il quale $\vec{v}_{k_0} \in U$; **c)** scrivere le coordinate di $\vec{v}_{k_0}$ rispetto alla base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$*$ **Esercizio 3.33.** Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^4$. Sia $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ e sia $W_k = \ker\begin{pmatrix}1 & 2 & k & 3\end{pmatrix}$ (il nucleo dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ associata alla matrice indicata, dipendente dal parametro k).
a) Determinare una base di $W_{k=0}$ e una base dell'intersezione $U \cap W_{k=0}$ (si sceglie $k = 0$);
b) determinare la dimensione dell'intersezione $U \cap W_k$ in funzione del parametro k.

$*$ **Esercizio 3.34.** Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, w. Siano

$$W_k = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & k & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & k & 1\end{pmatrix}, \quad U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

a) Determinare equazioni cartesiane per lo spazio U;
b) determinare la dimensione dell'intersezione $U \cap W_k$ al variare del parametro k;
c) determinare una base dell'intersezione $U \cap W_0$ (poniamo $k = 0$).

$*$ **Esercizio 3.35.** Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $W = \operatorname{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_1 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

$*$ **Esercizio 3.36.** Stabilire, nei casi indicati sotto, per quali valori della costante c il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V.

a) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3), $W = \{p(x) \mid p(0) = c\}$;

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{\text{soluzioni del sistema lineare } A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, dove $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$;

$*$ **Esercizio 3.37.** Stabilire, nei casi indicati sotto, per quali valori della costante c il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V.

a) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3), $W = \{\, p(x) \mid p(c) = 0 \,\}$;

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{\text{soluzioni del sistema lineare } A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}\right\}$, dove $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

$*$ **Esercizio 3.38.** Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una sua base. Si consideri inoltre il sottospazio $W = \operatorname{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, dove $\vec{w}_1 = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ e $\vec{w}_2 = -2\vec{v}_1 + 5\vec{v}_3$.

a) Dimostrare che i vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ sono indipendenti e completare l'insieme $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ad una base $\mathcal{B}_2$ di V; **b)** determinare le coordinate del vettore $2\vec{v}_1 - 5\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$ di V trovata al punto *a*).

$*$ **Esercizio 3.39.** Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $W = \operatorname{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_1 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

$*$ **Esercizio 3.40.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 3. Denotiamo con $p'(x)$ la derivata del polinomio $p(x)$. Si consideri l'applicazione lineare $L : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come segue: $L\big(p(x)\big) =$ "vettore di coordinate $p(0)$, $p(1)$, $p'(0)$".

a) Trovare una base di V e determinare la sua dimensione;
b) trovare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base di V trovata nel punto *a*) ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
c) determinare la dimensione ed una base del nucleo $\ker L$.

$*$ **Esercizio 3.41.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 2. Siano inoltre U il sottospazio di V dei polinomi soddisfacenti $p(-1) = 0$ e W il sottospazio di V dei polinomi soddisfacenti $p(3) = 0$.

a) Trovare una base e la dimensione degli spazi U e W; **b)** determinare una base dello spazio somma $U + W$; **c)** determinare una base dell'intersezione $U \cap W$; **d)** stabilire se $U + W$ è somma diretta di U e W (=stabilire se gli spazi U e W sono indipendenti).

$*$ **Esercizio 3.42.** Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2, sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si consideri la funzione $F : V \longrightarrow V$ definita ponendo $F(A) = B \cdot A - A \cdot B$ (essendo "$\cdot$" il prodotto righe per colonne di matrici).

a) Dimostrare che F è lineare; **b)** scrivere una base $\mathcal{B}_V$ dello spazio vettoriale V;
c) scrivere la matrice rappresentativa M della trasformazione lineare F, rispetto alla base $\mathcal{B}_V$ scelta precedentemente; **d)** determinare una base del nucleo di F.

$*$**Esercizio 3.43.** Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Sia W il sottoinsieme delle matrici simmetriche, sia U l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che $3a + b = -c$.

a) dimostrare che W è un sottospazio di V; **b)** trovare basi di U e W;
c) determinare le dimensioni dello spazio somma $U + W$ e dell'intersezione $U \cap W$;
d) stabilire se il sottoinsieme di V delle matrici A soddisfacenti $A^2 = 0$ è un sottospazio di V (giustificare la risposta).

§4. Applicazioni Lineari.

Esercizio 4.1. Si considerino le applicazioni lineari associate alle matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 11 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di esse,
a) indicare chiaramente dominio e codominio; **b)** determinarne nucleo e immagine;
c) discutere suriettività e iniettività; **d)** verificare la formula

$$(\star) \qquad \dim \text{“}\textit{dominio}\text{”} \;=\; \dim \text{“}\textit{nucleo}\text{”} + \dim \text{“}\textit{immagine}\text{”}.$$

Esercizio 4.2. Spiegare la formula $(\star)$ dell'esercizio (1) in termini della teoria dei sistemi lineari: il nucleo $\ker L$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare di n equazioni in m incognite ..., le dimensioni di dominio e immagine di L sono rispettivamente ... .

Esercizio 4.3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli, e si descriva esplicitamente,

a) $L_A \circ L_B$, $L_C \circ L_A \circ L_B$, $L_A \circ L_A \circ L_B$, $L_C \circ L_{A^{-1}} \circ L_B$, $L_C \circ L_{A^{-1}} \circ L_{A^{-1}} \circ L_B$,

b) $L_C \circ L_A$, $L_C \circ L_A \circ L_A$, $L_A \circ L_{(A^{-1})}$, $L_{(A^3)}$, $L_C \circ L_{A^{-1}}$,

dove L_A è l'applicazione lineare associata alla matrice A eccetera. Si determini l'immagine del vettore $\vec{v}$ per ognuna delle applicazioni in **(a)** e l'immagine del vettore $\vec{w}$ per ognuna delle applicazioni in **(b)**.

Esercizio 4.4. Sia $L : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^{14}$ una applicazione lineare rappresentata da una matrice $A \in M_{14,8}(\mathbb{R})$ di rango 3. Calcolare $\dim \ker L$ e $\dim \mathrm{Im}\, L$.

Esercizio 4.5. Sia $L : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare e sia $W \subseteq \mathbb{R}^9$ un sottospazio di dimensione 7. Provare che $\dim\big(\ker L \cap W\big) \geq 3$.

Suggerimento: stimate la dimensione di $\ker L$ usando il fatto che $\dim \mathrm{Im}\, L \leq 4$, osservate che $\dim(\ker L + W) \leq 9$, infine stimate $\dim\big(\ker L \cap W\big)$ usando la formula di Grassmann.

Esercizio 4.6. Si considerino le applicazioni lineari $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L_B : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associate alle matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trovare delle basi, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche, di $\ker L_A$, $\ker L_B$, $\operatorname{Im} L_A$, $\operatorname{Im} L_B$; **b)** discutere iniettività e suriettività di L_A ed L_B.

Esercizio 4.7. Trovare una matrice $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ in modo tale che l'applicazione lineare ad essa associata $L_B : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfi le seguenti proprietà:

$$(\star) \qquad \begin{cases} \text{il primo vettore della base canonica di } \mathbb{R}^4 \text{ appartiene al nucleo di } L_B, \\ L_B \text{ è suriettiva.} \end{cases}$$

a) dimostrare che le condizioni $(\star)$ determinano univocamente nucleo e immagine di L_B;
b) scrivere (senza fare calcoli!) una base del nucleo ed una base dell'immagine di L_B;
c) trovare matrici $C_k \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ tali che il nucleo di $L_{C_k} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ha dimensione k (con $k = 1, 2, 3, 4$; **d)** scrivere una base del nucleo ed una base dell'immagine delle L_{C_k}.

Esercizio 4.8. Si considerino l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ nonché il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di L_A;
b) trovare delle equazioni cartesiane per il nucleo e per l'immagine di L_A;
c) trovare, se esiste, un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^7$ la cui immagine è il vettore $\vec{w}$;
d) trovare, se esistono, 5 vettori indipendenti (in $\mathbb{R}^7$) che hanno come immagine $\vec{w}$;
e) trovare, se esistono, 6 vettori indipendenti (in $\mathbb{R}^7$) che hanno come immagine $\vec{w}$;
f) trovare, se esistono, 7 vettori indipendenti (in $\mathbb{R}^7$) che hanno come immagine $\vec{w}$.

Esercizio 4.9. Sia $A \in M_{3,5}$ una matrice e sia $L_A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A.

a) Dimostrare che il nucleo di L_A contiene almeno due vettori indipendenti;
b) dimostrare che L_A è un'applicazione suriettiva se e solo se il nucleo di L_A non contiene tre vettori indipendenti;

Esercizio 4.10. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare che soddisfa le condizioni

$$L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$$

Determinare (esplicitamente) una base del nucleo di L ed una base dell'immagine di L.

Esercizio 4.11. Si considerino le applicazioni lineari

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3t \\ t & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} \qquad M: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3t \\ t & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Determinare i valori del parametro t per i quali

a) il nucleo di L ha dimensione $0, 1, 2, 3$; **b)** l'immagine di L ha dimensione $0, 1, 2$.
c) M non è suriettiva; **d)** M non è iniettiva! **e)** $\dim\ker M = 1$.

Esercizio 4.12. Si considerino i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare, se esistono, delle applicazioni lineari $A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N$ che

soddisfano le proprietà indicate (giustificare la risposta).
$A:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Span}\{\vec{w}\}$, $\ker A = \mathrm{Span}\{\vec{z}\}$;
$B:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im}\,B = \mathrm{Span}\{\vec{w}\}$, $\ker B = \mathrm{Span}\{\vec{w}\}$;
$C:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}\,C = \mathrm{Span}\{\vec{g}, \vec{h}\}$;
$D:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker D = \mathrm{Span}\{\vec{c}, \vec{d}\}$;
$E:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}\,E = \mathrm{Span}\{\vec{g}, \vec{h}\}$, $\ker E = \mathrm{Span}\{\vec{c}, \vec{d}\}$;
$F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\,E = \mathrm{Span}\{\vec{c}+\vec{d}, \vec{c}-\vec{d}\}$, $\ker E = \mathrm{Span}\{\vec{c}, \vec{d}\}$;
$H:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $H(\vec{c}) = \vec{f}$, $H(\vec{d}) = \vec{f}$;
$I:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $I(\vec{e}-2\vec{d}) = \vec{f}$, $I(\vec{e}) = \vec{g}$;
$L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $L(\frac{1}{3}\vec{e}) = \vec{f}-\vec{g}$, $L(\vec{e}) = \vec{g}$;
$M:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $M(\vec{u}) = M(\vec{v})$ e $\vec{a} \in \mathrm{Im}\,M$;
$N:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $N(\vec{u}) = N(\vec{v})$ e $\vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{Im}\,N$.
$O:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che O **non** è iniettiva e $\mathrm{Im}\,O = \mathrm{Span}\{\vec{a}, \vec{c}\}$;
$P:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\,P = \mathrm{Span}\{\vec{e}\}$ e $\ker P = \mathrm{Span}\{\vec{y}\}$;
$Q:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker Q = \mathrm{Span}\{\vec{c}, \vec{e}\}$ e $\mathrm{Im}\,C = \mathrm{Span}\{\vec{y}\}$.
$R:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che R è iniettiva e $\vec{w} \in \mathrm{Im}\,R$;
$S:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\,S = \mathrm{Span}\{\vec{b}\}$ e $\ker S = \mathrm{Span}\{\vec{v}\}$;
$T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T = \mathrm{Span}\{\vec{b}, \vec{c}\}$ e $\mathrm{Im}\,C = \mathrm{Span}\{\vec{w}\}$.

Esercizio 4.13. Sia $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare soddisfacente le condizioni

$$L(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 5\,L(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

a) Stimare la dimensione e trovare 5 vettori del nucleo di L; **b)** trovare due sottospazi A e B di $\mathbb{R}^3$ in modo che necessariamente risulti verificata una delle due seguenti condizioni: $\ker L = A$ oppure $\ker L = B$.

$*$ **Esercizio 4.14.** Si considerino l'applicazione lineare $A_t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} -2 & 4 & t & -5 \\ t+4 & -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{v}_t$ di coordinate $t,\ 1,\ t{+}1,\ 2$.

a) Determinare i valori di t per i quali $\vec{v}_t$ appartiene al nucleo di A_t;
b) scegliere uno di tali valori di t e, per tale valore, trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di A_t.

Esercizio 4.15. Si considerino $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trovare delle matrici $A, B, C, D, E, F \in M_{3,5}$ (indichiamo con L_A, L_B, L_C, L_D, L_E le corrispondenti applicazioni lineari, definite su $\mathbb{R}^5$ e a valori in $\mathbb{R}^3$) tali che
a) il nucleo di L_A ha dimensione 2;
b) il nucleo di L_B ha dimensione 2 e contiene il vettore $\vec{u}$;
c) il nucleo di L_C non contiene il vettore $\vec{v}$;
d) l'immagine di L_D ha dimensione 2 e contiene sia il vettore $\vec{z}$ che il vettore $\vec{w}$;
e) l'immagine di L_E ha dimensione 1 e contiene il vettore $\vec{w}$;
f) l'immagine di L_F ha dimensione 2, contiene il vettore $\vec{z}$ ma non contiene il vettore $\vec{w}$.
g) Determinare delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche di $\mathrm{Im}\,L_A$, $\mathrm{Im}\,L_B$, $\mathrm{Im}\,L_C$, $\mathrm{Im}\,L_D$, $\mathrm{Im}\,L_E$, $\mathrm{Im}\,L_F$ nonché di $\ker L_A$, $\ker L_B$, $\ker L_C$, $\ker L_D$, $\ker L_E$, $\ker L_F$

Esercizio 4.16. Per ognuna delle funzioni che seguono, trovare i valori del parametro t per i quali è una applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cdot\cos(t) + y\cdot\mathrm{sen}(t) \\ -x\cdot\mathrm{sen}(t) + y\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - ty \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ txy \end{pmatrix}$$

$$\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.17. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale 4.
a) Verificare che la "derivata" $D: V \to V$ è lineare;
b) Trovare una base di V e la matrice rappresentativa di D rispetto a tale base.

Esercizio 4.18. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale 4 che soddisfano la relazione $p(2) = 0$. Denotiamo con $p'(x)$ la derivata del polinomio $p(x)$.

a) Trovare una base di V e determinare la sua dimensione;
b) trovare la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare

$$L: V \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad L\big(p(x)\big) = \text{"vettore di coordinate } p(0),\ p(1),\ p'(0)\text{"}$$

rispetto alla base di V trovata e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 4.19.** Sia $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare, assumiamo che

$$L(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) = -3L(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare, se possibile, una base del nucleo di L; **b)** calcolare $L(\vec{e}_1)$, dove $\vec{e}_1$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$; **c)** è possibile determinare la matrice $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ per la quale si ha $L = L_A$? Se la risposta è "si", spiegare come.

$*$ **Esercizio 4.20.** Si considerino le applicazioni lineari $L_A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $L_B: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associate alle matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -9 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Si consideri inoltre la composizione $L_A \circ L_B$.
a) Determinare una base del nucleo di L_B; **b)** calcolare $L_A \circ L_B(\vec{v})$;
c) determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di $L_A \circ L_B$.

$*$ **Esercizio 4.21.** Siano $A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ ed $L_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata.

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di L_A;
b) scegliere un vettore non nullo $\vec{k}$ nell'immagine di L_A e trovare due vettori distinti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ appartenenti ad $\mathbb{R}^3$ la cui immagine è $\vec{k}$ (cioè $L_A(\vec{u}) = L_A(\vec{v}) = \vec{k}$).

$*$ **Esercizio 4.22.** Sia $L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & -7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e sia} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ t+3 \end{pmatrix} \quad \text{un vettore in } \mathbb{R}^3.$$

a) Trovare, se esistono, i valori del parametro t per i quali il vettore $\vec{v}$ appartiene all'immagine di L; **b)** per i valori di t trovati al punto precedente, determinare un vettore $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ tale che $L(\vec{w}) = \vec{v}$.

$*$ **Esercizio 4.23.** Sia $L_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 18+t \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{e sia} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4+m \end{pmatrix} \quad \text{un vettore in } \mathbb{R}^3 .$$

a) Trovare i valori del parametro t per i quali il nucleo di L_t ha dimensione 2;
b) scegliere uno dei valori di t trovati al punto a) e, per tale valore, trovare i valori del parametro m per i quali il vettore $\vec{w}$ appartiene al nucleo di L_t.

$*$ **Esercizio 4.24.** Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di L_A;
b) scrivere delle equazioni cartesiane per il nucleo $\ker L_A$ e per l'immagine $\mathrm{Im}\, L_A$.

$*$ **Esercizio 4.25.** Dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, stabilire se esistono applicazioni lineari L, M, T soddisfacenti le proprietà seguenti e, in caso affermativo, scriverne esplicitamente almeno una.

a) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\dim ker L = 1$ e $\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$;
b) $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\dim ker M = 1$ e $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$;
c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $ker T = \mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ e $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

$*$ **Esercizio 4.26.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare, se esistono, delle applicazioni lineari A, B, C, D che soddisfano le proprietà indicate:

a) $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$;
b) $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che B è iniettiva e $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$;
c) $C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che C è suriettiva e $\ker C = \mathrm{Span}\{\vec{v}\}$;
d) $D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker D = \mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ e $\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Span}\{\vec{v}\}$.

$*$ **Esercizio 4.27.** Si consideri l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{associata alla matrice} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di L_A; **b)** trovare un'applicazione lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker L_B = \mathrm{Im}\, L_A$ nonché indicare qual è la matrice che rappresenta la composizione $L_B \circ L_A$; **c)** trovare un'applicazione lineare iniettiva $L_C : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$; **d)** è vero che il nucleo di L_A è uguale al nucleo della composizione $L_C \circ L_A$? (giustificare la risposta).

$*$ **Esercizio 4.28.** Sia $A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -8 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ e sia $\vec{v}_t \in \mathbb{R}^5$ il vettore di coordinate $t, 2, 3, 0, -1$.

a) Determinare una base $\mathcal{B}$ del nucleo di A; **b)** determinare i valori di t per i quali $\vec{v}_t$ appartiene al nucleo di A; **c)** per i valori di t per i quali $\vec{v}_t \in \ker A$, determinare le coordinate di $\vec{v}_t$ rispetto alla base trovata al punto a).

$*$ **Esercizio 4.29.** Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} k+4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

si considerino le applicazioni lineari $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $L_B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ associate alle matrici A e B.

a) Calcolare $L_A \circ L_B(\vec{v}_k)$ ("$\circ$" denota la composizione); **b)** determinare i valori di k per i quali $\vec{v}_k$ appartiene al nucleo di $L_A \circ L_B$; **c)** trovare un vettore che appartiene all'immagine di L_B ma che **non** appartiene al nucleo di L_A.

$*$ **Esercizio 4.30.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Assumiamo che il nucleo $\ker F$ sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x+y-z = 0$, che 8 sia un autovalore di F avente autospazio V_8 generato dal vettore di coordinate 1, 2, 1. **a)** Dire se F è diagonalizzabile (in questo caso indicare una base di autovettori ed i corrispondenti autovalori); **b)** scrivere il polinomio caratteristico dell'endomorfismo F; **c)** calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$; **d)** scegliere due autovettori indipendenti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcolare $F \circ F(3\vec{u} - 5\vec{v})$ (dove "$\circ$" denota la composizione).

$*$ **Esercizio 4.31.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2.
Si consideri l'applicazione lineare $L : V \longrightarrow V$ definita ponendo $L\big(p(x)\big) = 2p'(x)+p(x)$

a) stabilire se la trasformazione lineare L è iniettiva; **b)** fissare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice rappresentativa di L rispetto a tale base.
Si consideri ora la funzione $F_t : V \longrightarrow V$ definita ponendo $F_t\big(p(x)\big) = t-2+p\big((t+1)\cdot x\big)$.
c) Determinare i valori del parametro t per i quali F_t è lineare.

$*$ **Esercizio 4.32.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia $L : V \to V$ l'applicazione lineare definita ponendo $L\big(p(x)\big) = p(x) + p(-x)$.

a) determinare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine di L; **b)** determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\mathcal{B}_V = \{x^3 + x,\ x^2 + 1, x + 1,\ x - 1\}$;
c) calcolare $L^{25}\big(5x^3 - x^2 + 3x + 2\big)$.

§5. Diagonalizzazione.

Esercizio 5.1. Verificare che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Calcolarne il relativo autovalore e determinare $A\vec{v}$, $A^2\vec{v}$, $A^3\vec{v}$, $A^4\vec{v}$, $A^{38}\vec{v}$.

Esercizio 5.2. Calcolare il polinomio caratteristico, autovalori e basi dei relativi autospazi delle trasformazioni lineari associate alle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 12 & -2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.3. Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & 9 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 8 & -5 \\ 2 & -6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ e sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Denotiamo con L_A la trasformazione lineare associata alla matrice A.

a) Verificare che $\vec{v}$ è un autovettore di L_A e calcolarne il relativo autovalore λ;
b) calcolare la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore λ;
c) calcolare $L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A \circ L_A(\vec{v})$, dove "$\circ$" denota la composizione di applicazioni lineari; **d)** verificare che $\mu = 2$ è anch'esso un autovalore di L_A e determinare

una base del relativo autospazio; **e)** provare che λ e μ sono gli unici due autovalori di L_A. **e)** scrivere il polinomio caratteristico di L_A (senza fare inutili calcoli).

$*$ **Esercizio 5.4.** Si considerino $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita dalle relazioni $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$.

a) Determinare nucleo e immagine di T;
b) scrivere la matrice A che rappresenta T nella base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.5. Nei casi indicati sotto,
a) stabilire quali vettori sono autovettori (e per quali valori dell'eventuale parametro t);
b) per ognuno di tali autovettori determinare il corrispondente autovalore e una base dell'autospazio cui appartiene; **c)** calcolare $A^{19}(\vec{w})$; **d)** determinare tutti gli autovalori e calcolarne le molteplicità algebrica e geometrica, quindi stabilire se esistono una matrice invertibile B ed una matrice diagonale Δ tali che $B^{-1} \cdot A \cdot B = \Delta$ nonché una matrice invertibile C ed una matrice diagonale Λ tali che $C^{-1} \cdot \Lambda \cdot C = A$ (se esistono, indicare tali matrici); **e)** stabilire se esiste una base di autovettori e, se esiste, scrivere tale base e scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto a tale base.

i) $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -12 & 2 & 6 \\ 8 & -6 & -11 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

iv) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ t-3 \end{pmatrix}$;

v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} t-4 \\ -1 \\ t-3 \end{pmatrix}$.

$*$ **Esercizio 5.6.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare soddisfacente le condizioni che seguono:
$T(\vec{z}) = 2\vec{v}$; $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono autovettori rispettivamente di autovalori $\lambda = 2$, $\mu = -5$.

a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di T; **b)** determinare una matrice diagonale Δ e una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale T è rappresentata da Δ;
c) determinare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica.

Esercizio 5.7. Per le matrici dell'esercizio (2) che risultano diagonalizzabili, scriverne la formula di diagonalizzazione e calcolarne esplicitamente la potenza n-esima per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$*$ **Esercizio 5.8.** Sia L_A la trasformazione dello spazio $\mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 4 \\ -3 & 2 & -6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ della matrice A; **b)** Verificare che $\lambda = -7$ è un autovalore di L_A e determinare una base del relativo autospazio; **c)** trovare un autovalore della trasformazione lineare $L_A \circ L_A \circ L_A$ (dove "$\circ$" denota la composizione di applicazioni lineari) e determinare una base del relativo autospazio.

$*$ **Esercizio 5.9.** Si considerino la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix} \text{ ed i vettori } \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Individuare i vettori, tra quelli indicati, che sono autovettori di A (spiegare quale metodo è stato utilizzato); **b)** determinare gli autovalori corrispondenti agli autovettori individuati e determinare le basi dei relativi autospazi.

$*$ **Esercizio 5.10.** Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 21 & -10 \end{pmatrix}$ e B due matrici, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ tre vettori in $\mathbb{R}^2$.

a) determinare tutti gli autovalori e delle basi dei rispettivi autospazi della trasformazione di $\mathbb{R}^2$ associata ad A; **b)** calcolare il prodotto $A \cdot A \cdot (3\vec{e})$;
c) determinare B sapendo che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due autovettori di B, entrambi relativi all'autovalore $\lambda = 2$. Motivare la risposta. *Suggerimento*: non dovete fare calcoli!

$*$ **Esercizio 5.11.** Si consideri la trasformazione lineare L dello spazio $\mathbb{R}^3$ avente i seguenti autovettori e relativi autovalori:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = -7; \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2; \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 3.$$

a) scrivere esplicitamente le immagini dei vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e determinare il polinomio caratteristico $P_L(\lambda)$;
b) determinare una base del nucleo $\ker L$ e una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$;
c) calcolare l'immagine $L(\vec{e}_1)$ del primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 5.12.** Siano $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si consideri la trasformazione lineare L dello spazio $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni che seguono: $L(\vec{u}) = L(\vec{w})$; $\vec{v}_1$ è un autovettore di L di autovalore $\lambda_1 = -6$; $\vec{v}_2$ è un autovettore di L di autovalore $\lambda_2 = 2$.

a) determinare una base del nucleo $\ker L$ e una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$;
b) determinare il polinomio caratteristico $P_L(\lambda)$;
c) calcolare l'immagine $L^3(\vec{v}_1)$ dove L^3 denota la composizione $L \circ L \circ L$.

$*$ **Esercizio 5.13.** Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Determinare il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$;
b) determinare gli autovalori, e delle basi dei corrispondenti autospazi, della trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A; **c)** indicare esplicitamente una matrice M ed una matrice diagonale Δ tali che $A = M^{-1} \cdot \Delta \cdot M$.

$*$ **Esercizio 5.14.** Si considerino i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni $L(\vec{v}) = L(\vec{w}) = -3\vec{z}$, $L(\vec{z}) = 2\vec{v} + \vec{w}$.

a) si determini una base del nucleo $\ker L$ e una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$;
b) determinare un autovettore e un autovalore della trasformazione L;
c) determinare il polinomio caratteristico della trasformazione L;
d) determinare le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$;
e) scrivere esplicitamente la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 5.15.** Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e sia $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare individuata dalle relazioni $L(\vec{u}) = -4\vec{u} - 6\vec{v}$, $L(\vec{v}) = 3\vec{u} + 5\vec{v}$.

a) determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$;
b) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di L;
c) determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$;

$*$ **Esercizio 5.16.** Si consideri la trasformazione lineare

$$L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{associata alla matrice} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -18 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) calcolare il polinomio caratteristico $P(\lambda)$; **b)** determinare tutti gli autovalori, le loro molteplicità algebriche e geometriche e delle basi dei rispettivi autospazi; **c)** è vero che esistono due matrici C e Δ tali che C è invertibile, Δ è diagonale nonché $C^{-1}{\cdot}A{\cdot}C = \Delta$? (giustificare la risposta e, in caso di risposta affermativa, trovare tali matrici).

$*$ **Esercizio 5.17.** Sia $A_t = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -9 \\ 6 & 7 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & t+3 \end{pmatrix}$ e sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) trovare un valore t per il quale il vettore $\vec{v}$ è un autovettore di A_t; **b)** determinare il corrispondente autovalore λ nonché le molteplicità algebrica e geometrica di λ;
c) trovare, se esistono, una matrice $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale $\Delta \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tali che $C^{-1} \cdot A_t \cdot C = \Delta$ (dove t è il valore trovato al punto a).

$*$ **Esercizio 5.18.** Sia $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 4 & -11 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ e sia $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$.

a) trovare un valore τ per il quale il vettore $\vec{v}_\tau$ è un autovettore di A;
b) determinare il corrispondente autovalore λ e le molteplicità algebrica e geometrica di λ;
c) trovare, se esistono, una matrice $C \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale $\Delta \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tali che $C^{-1} \cdot A \cdot C = \Delta$.

$*$ **Esercizio 5.19.** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) determinare l'inversa della matrice A; **b)** trovare un valore del parametro κ per il quale il prodotto $A^{-1}{\cdot}B_\kappa{\cdot}A$ è una matrice diagonale; **c)** sia κ il valore trovato precedentemente, determinare il polinomio caratteristico nonché gli autovalori e delle basi dei rispettivi autospazi della trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice B_κ.

$*$ **Esercizio 5.20.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Si consideri la trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$L(\vec{v}) - 2L(\vec{w}) = \vec{0}, \quad L(\vec{w}) = \vec{w} - \vec{z}, \quad L(\vec{z}) = 6\vec{w} - 4\vec{z}.$$

a) determinare una base del nucleo e una base dell'immagine della trasformazione L;
b) determinare il polinomio caratteristico, gli autovalori e le basi dei rispettivi autospazi di L; **c)** determinare la matrice rappresentativa A di L rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ di $\mathbb{R}^3$ nonché la matrice rappresentativa B di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 5.21.** Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla relazione

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \quad = \quad \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x+y-2z \\ -2x-y \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che $\lambda = 2$ è un autovalore per T; **b)** Determinare autovalori e basi dei corrispondenti autospazi di T; **c)** Dire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto ad una base di autovettori.

$*$ **Esercizio 5.22.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ associata (nella base canonica) alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \end{pmatrix}$. Siano $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} 7-2t \\ 4-t \\ 11-3t \end{pmatrix}$.

a) Verificare che $\vec{w}$ è un autovettore per T; **b)** determinare tutti gli autovalori di T;
c) determinare i due valori t_1 e t_2 del parametro t per i quali $\vec{v}_t$ è un autovettore per T;
d) scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_{t_1}, \vec{v}_{t_2}, \vec{w}\}$ di $\mathbb{R}^3$.

$*$ **Esercizio 5.23.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare che soddisfa le seguenti condizioni: il cui nucleo di T contiene il terzo vettore della base canonica $\vec{e}_3$; $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono autovettori, rispettivamente di autovalori $\lambda = 5$ e $\mu = -2$.

a) Determinare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
b) Trovare una matrice diagonale Δ e una matrice invertibile B tali che $\Delta = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

$*$ **Esercizio 5.24.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$ e sia L la trasformazione di $\mathbb{R}^3$ individuata dalle condizioni

$$L(\vec{v}) \;=\; 5\vec{v} - 4\vec{w}\,, \quad L(\vec{w}) \;=\; 2\vec{v} - \vec{w}\,, \quad L(\vec{z}) \;=\; 2\vec{v} - 2\vec{w} + \vec{z}\,.$$

a) Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ e la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$; **b)** determinare il polinomio caratteristico di L; **c)** determinare, se esiste, una base di autovettori per L.

$*$ **Esercizio 5.25.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori della trasformazione lineare di $\mathbb{R}^4$ associata ad A e, per ognuno di essi, indicarne le molteplicità algebrica e geometrica e scrivere una base del corrispondente autospazio; **b)** determinare i valori di k per i quali $\vec{v}_k$ è un autovettore per A; **c)** per i valori di k trovati al punto "b)", calcolare $A^{15}(\vec{v}_k)$.

$*$ **Esercizio 5.26.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare di autovettori

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

rispettivamente di autovalori $\lambda = 2\,, \quad \mu = 1\,, \quad \nu = 3\,.$

a) Determinare la matrice A che rappresenta la trasformazione T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$; **b)** determinare il polinomio caratteristico della trasformazione T;
c) calcolare $\vec{v} := 3\vec{a} + \vec{b}$ e determinare $T^{15}(\vec{v})$.

$*$ **Esercizio 5.27.** Sia $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare A^{-2}; **b)** calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$;
c) determinare un autovettore e il corrispondente autovalore della matrice A^3.

$*$ **Esercizio 5.28.** Si considerino la trasformazione lineare L di $\mathbb{R}^3$ definita dalla relazione $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \\ 8x-7y+4z \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Scrivere la matrice A rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
b) determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\vec{v}_k$ è un autovettore per L;
c) determinare il polinomio caratteristico di L, tutti gli autovalori e delle basi dei corrispondenti autospazi; **d)** dire se L è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, scrivere esplicitamente una matrice B e una matrice diagonale Δ tali che $\Delta = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

$*$ **Esercizio 5.29.** Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata (nella base canonica) dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per i sottospazi $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$, di $\mathbb{R}^3$;
b) stabilire se L è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L nonché la matrice Δ rappresentativa di L rispetto alla base di autovettori trovata $\left(\Delta = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)\right)$.

$*$ **Esercizio 5.30.** Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, w ed il sottospazio W di equazione cartesiana $x - y + 2w = 0$. Sia inoltre $T : W \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla relazione $T(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+d \\ a+d \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Trovare una base $\mathcal{B}$ dello spazio W;
b) verificare che l'immagine di T è contenuta nello spazio W;
c) considerare T come trasformazione dello spazio W (cioè $T : W \longrightarrow W$) e determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata precedentemente;
d) stabilire se tale $T : W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile (giustificando la risposta).

$*$ **Esercizio 5.31.** Si considerino le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ associate alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire quali trasformazioni sono diagonalizzabili (enunciare in modo chiaro i risultati teorici utilizzati); **b)** scegliere una trasformazione diagonalizzabile tra quelle date e determinare una base di autovettori; **c)** stabilire quali tra queste trasformazioni hanno almeno 2 autovettori indipendenti.

$*$ **Esercizio 5.32.** Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una sua base. Sia $L_t : V \longrightarrow V$ la trasformazione lineare (dipendente dal parametro t) definita dalle relazioni $L(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $L(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$, $L(\vec{v}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + t\vec{v}_3$.

a) Determinare i valori del parametro t per i quali L_t è diagonalizzabile;
b) determinare tutti gli autovalori e basi dei corrispondenti autospazi di L_0 $(t = 0)$.

$*$ **Esercizio 5.33.** Si considerino le matrici $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ t & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2+t & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dipendenti dal parametro t.

a) determinare le dimensioni di nucleo e immagine di A_t e B_t in funzione del parametro t;
b) determinare i valori di t per i quali il prodotto $A_t \cdot B_t$ è invertibile;
c) determinare i valori di t per i quali il prodotto $B_t \cdot A_t$ è invertibile.;
d) determinare un autovettore del prodotto $A_4 \cdot B_4$ $(t = 4)$.

$*$ **Esercizio 5.34.** Sia $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Si consideri la trasformazione lineare T di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le condizioni seguenti: $\vec{v}$ è un autovettore di autovalore $\lambda = 2$, risulta $T(\vec{w}) = -\vec{v} + 3\vec{w} - 2\vec{u}$, $T(\vec{u}) = -2\vec{v} + 2\vec{w} - 2\vec{u}$.

a) Stabilire se T è diagonalizzabile; **b)** determinare il polinomio caratteristico di T; **c)** calcolare $T^5(\vec{v} - \vec{w} + 2\vec{u})$.

$*$ **Esercizio 5.35.** Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e la trasformazione lineare

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{definita da} \quad T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -27\,x \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il polinomio caratteristico e stabilire l'eventuale diagonalizzabilità della trasformazione T; **b)** stabilire se esiste un autovettore di T^3 che **non** è un autovettore per T; **c)** stabilire se esiste un autovettore di T^{-1} che **non** è un autovettore per T; **d)** determinare una base dell'immagine della trasformazione T^{19}.

$*$ **Esercizio 5.36.** Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ una sua base. Sia $T : V \to V$ la trasformazione lineare definita dalle condizioni che seguono: $\vec{v}$ è un autovettore di autovalore $\lambda = 5$, $\vec{w} + \vec{z}$ è un autovettore di autovalore $\lambda = 3$, $T(2\vec{v} + 2\vec{w}) = 6\vec{v} + 2\vec{w}$.

a) determinare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B}_V$; **b)** determinare autovalori e basi dei corrispondenti autospazi della trasformazione T; **c)** determinare il polinomio caratteristico di T; **d)** stabilire se T è diagonalizzabile (giustificare la risposta).

Esercizio 5.37. **a)** Dimostrare che le matrici $P \in M_{n,n}$ soddisfacenti $P^2 = P$ sono caratterizzate dalla proprietà $P \cdot \vec{w} = \vec{w}$, $\forall \vec{w} \in \mathrm{Im}\, P$ (per questo motivo sono chiamate "matrici di proiezione"); **b)** determinare gli autovalori e descrivere gli autospazi delle matrici di proiezione;
c) verificare che se $P \in M_{n,n}$ è una matrice di proiezione allora si ha una decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^n = \ker P \oplus \mathrm{Im}\, P$.

§6. Geometria Euclidea.

Esercizio 6.1. Si considerino, nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, i punti
$P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \end{pmatrix}$. Determinare
a) le coordinate del vettore che è rappresentato dal segmento orientato il cui estremo iniziale è il punto P ed il cui estremo finale è il punto Q; disegnare i due punti ed il vettore;
b) l'estremo finale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$ ed il cui estremo iniziale è il punto P; **c)** l'estremo iniziale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$ ed il cui estremo finale è il punto P; **d)** la distanza tra i punti H e K.

Esercizio 6.2. Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ vettori geometrici del piano Euclideo $\mathbb{R}^2$. Trovare
a) un vettore di norma 39 parallelo al vettore $\vec{v}$; **b)** un vettore di norma 30 ortogonale al vettore $\vec{u}$; **c)** i coseni degli angoli $\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$, $\widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$, $\widehat{\vec{v}\,\vec{z}}$ (per quale motivo geometrico gli ultimi due sono uguali in modulo e di segno opposto?); **d)** l'area del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$; **e)** la proiezione del vettore $\vec{u}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w}$; **f)** la proiezione del vettore $\vec{u}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{z}$ (il risultato deve essere uguale a quello trovato al punto precedente, spiegare il perché).

Esercizio 6.3. Si considerino, nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, la retta r di equazione $x+2y-3 = 0$, i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Determinare: **a)** la distanza del punto T dalla retta r; **b)** un'equazione cartesiana che descrive la retta s passante per i punti P e Q; **c)** la distanza del punto K dalla

retta s; **d)** la proiezione H del punto K sulla retta s di cui al punto "b" e verificare che la distanza tra i punti H e K è uguale alla distanza calcolata al punto "c";
e) equazioni parametriche della retta passante per i punti P e K;
f) equazioni parametriche della retta passante per il punto P ed ortogonale al vettore $\vec{v}$;
g) un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e parallela al vettore $\vec{w}$.

Esercizio 6.4. Si considerino i punti $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed il triangolo $\mathbb{T}$ di vertici B, C, D.
Calcolare: l'area $\mathcal{A}$, le misure degli angoli interni β, γ e δ di vertici B, C e D, la misura dell'altezza relativa alla base $\overline{BC}$, la proiezione del punto D sulla base $\overline{BC}$, del triangolo $\mathbb{T}$.

Esercizio 6.5. Consideriamo i seguenti punti e vettori geometrici dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$.
Punti: $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vettori: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Trovare: **a)** l'estremo iniziale del segmento orientato di estremo finale P che rappresenta $\vec{v}$;
b) la distanza tra i punti P e Q; **c)** il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
d) due vettori paralleli al vettore $\vec{v}$ rispettivamente di norma uno e norma 15;
e) due vettori indipendenti, entrambi ortogonali al vettore $\vec{v}$; **f)** due vettori indipendenti, entrambi di norma 8 ed ortogonali al vettore $\vec{v}$; **g)** due vettori (non nulli) $\vec{h}$ e $\vec{k}$ ortogonali tra loro ed ortogonali al vettore $\vec{v}$ (verificare che $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{h}, \vec{k}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$).
Calcolare: **h)** i prodotti vettoriali ed i prodotti misti che seguono:

$$\vec{v} \wedge \vec{w}, \quad \vec{v} \wedge \vec{v}, \quad \vec{u} \wedge \vec{v}, \quad \vec{v} \wedge (4\vec{z}), \quad \vec{z} \wedge \vec{v}, \quad \vec{z} \wedge \vec{u}, \quad \vec{v} \wedge (\vec{v} + \vec{u}), \quad \vec{v} \wedge \vec{u}$$

(verificare, in tutti i casi, che il vettore ottenuto è ortogonale ad entrambi gli argomenti);
$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{z}$, $(\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z}$, $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z})$ ("$\cdot$" denota il prodotto scalare);
i) l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
l) le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ di $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$.

∗ **Esercizio 6.6.** Si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ed il triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, Q, K. Determinare
a) l'area del triangolo $\mathbb{T}$; **b)** il coseno $\cos\theta$ dell'angolo di $\mathbb{T}$ di vertice Q;
c) un'equazione cartesiana della retta r passante per i punti P e Q.

∗ **Esercizio 6.7.** Sia $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{R}^3$ e siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ due vettori geometrici.
a) Trovare un vettore $\vec{k}$ di norma 7 ortogonale ad entrambi i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) determinare l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
c) determinare il coseno $\cos(\theta)$ dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
d) determinare le coordinate dell'estremo iniziale I del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$ ed il cui estremo finale è il punto P.

∗ **Esercizio 6.8.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vettori geometrici dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Determinare: **a)** il coseno $\cos(\theta)$ dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
b) l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
c) le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ di $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$.
d) (*facoltativo*) verificare che il prodotto scalare $\vec{\pi} \cdot \vec{w}$ è uguale al prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e spiegare perché $\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \vec{\pi}' \cdot \vec{w}'$ per ogni coppia di vettori $\vec{v}'$ e $\vec{w}'$ (essendo $\vec{\pi}'$ la proiezione di $\vec{v}'$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}'$).

$*$ **Esercizio 6.9.** Si consideri il piano $\mathbb{R}^2$, i punti $P = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e la retta r di equazione cartesiana $5x + 12y - 76 = 0$.

a) Trovare un vettore $\vec{v}$ di norma 26 parallelo ad r; **b)** calcolare la distanza $d = \text{dist}\{P, r\}$ e trovare le coordinate del punto $Q \in r$ tale che $\text{dist}\{P, Q\} = d$; **c)** calcolare l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, Q, K; **d)** determinare il coseno $\cos\theta$ dell'angolo di $\mathbb{T}$ di vertice Q.

$*$ **Esercizio 6.10.** Si considerino, nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$, i punti $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i vettori geometrici $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) determinare le coordinate dell'estremo iniziale I del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$ ed il cui estremo finale è il punto P;
b) determinare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo di vertici i punti P, Q, I;
c) trovare un vettore $\vec{h}$ di norma 3 ortogonale ad entrambi i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
d) determinare il coseno $\cos(\theta)$ dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
e) determinare le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ di $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$.

$*$ **Esercizio 6.11.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ due vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

a) Trovare due vettori $\vec{u}$ e $\vec{w}$ ortogonali tra loro, entrambi ortogonali al vettore $\vec{v}$ nonché entrambi di norma 3; **b)** calcolare il prodotto vettoriale $\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{w}$; **c)** determinare il coseno $\cos(\theta)$ dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{k}$; **d)** determinare le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ di $\vec{k}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{z}$.

$*$ **Esercizio 6.12.** Si consideri, nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, la retta r passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si consideri inoltre il vettore geometrico $\vec{k} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di r; **b)** trovare un vettore $\vec{v}$ di norma 7 parallelo alla retta r; **c)** trovare una equazione cartesiana di una retta s parallela ad r e tale che la distanza di s da r vale 5; **d)** determinare le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ del vettore $\vec{k}$ lungo la direzione individuata dalla retta r.

$*$ **Esercizio 6.13.** Si consideri il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed i vettori $\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare le coordinate dell'estremo iniziale Q del segmento orientato che ha P come estremo finale e che rappresenta il vettore $\vec{k}$; **b)** trovare un vettore $\vec{v}$ di norma 5 nonché ortogonale ai vettori $\vec{k}$ e $\vec{w}$; **c)** determinare le coordinate delle proiezioni $\vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w})$, $\vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w}+7\vec{v})$, e $\vec{\pi}_{\vec{k}}(2\vec{w}+11\vec{v})$, dei vettori $\vec{w}$, $\vec{w}+7\vec{v}$ e $2\vec{w}+11\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{k}$. **d)** (*facoltativo*) Scrivere una base del nucleo e una base dell'immagine dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $L(\vec{x}) = \vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{x})$.

$*$ **Esercizio 6.14.** Siano $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ tre punti del piano Euclideo, sia $\mathbb{T}$ il triangolo di vertici P, Q, R e sia θ l'angolo di vertice P (del triangolo $\mathbb{T}$). Determinare:

a) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $\mathbb{T}$; **b)** il coseno $\cos\theta$ dell'angolo θ; **c)** equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela a $\overline{QR}$; **d)** le coordinate del punto K ottenuto proiettando P sulla retta s passante per Q ed R.

$*$ **Esercizio 6.15.** Si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) Determinare le coordinate del vettore $\vec{w}$ rappresentato dal segmento orientato che ha Q come estremo finale ed ha P come estremo iniziale; **b)** trovare un vettore $\vec{v}$ di norma 2 nonché ortogonale ai vettori $\vec{k}$ e $\vec{w}$; **c)** determinare le coordinate della proiezione $\pi_{\vec{k}}(\vec{w})$, del vettore $\vec{w}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{k}$; **d)** determinare le coordinate di un vettore $\vec{r}$ che soddisfa le condizioni $\vec{r} \neq \vec{w}$ e $\pi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \pi_{\vec{k}}(\vec{w})$.

$*$ **Esercizio 6.16.** Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ rispettivamente un vettore geometrico e due punti dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Sia r la retta di equazione parametrica $\vec{x} = P + t \cdot \vec{v}$. Determinare:

a) la proiezione ortogonale π del punto Q sulla retta r; **b)** l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici π, P, Q; **c)** il coseno dell'angolo θ individuato dal vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{PQ}$ e dal vettore $\vec{v}$.

$*$ **Esercizio 6.17.** Si consideri il piano Euclideo $\mathbb{R}^2$ (con coordinate x, y), la retta r di equazione $x + 3y - 2 = 0$ ed il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Determinare equazioni parametriche per r, trovare un vettore di norma 2 parallelo ad r, trovare un punto P la cui distanza da r vale 5. Scrivere una equazione cartesiana per la retta s ortogonale ad r e passante per il punto A.

$*$ **Esercizio 6.18.** Siano $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ rispettivamente due punti e un vettore geometrico del piano Euclideo. Sia R l'estremo iniziale del segmento orientato di estremo finale Q e che rappresenta il vettore $\vec{v}$. Determinare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, Q, R, equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto P e ortogonale a $\vec{v}$, le coordinate del punto K ottenuto proiettando Q sulla retta r.

$*$ **Esercizio 6.19.** Nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, siano $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ un punto e $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ due vettori geometrici. Siano A e B gli estremi finali dei segmenti orientati di estremo iniziale P e che rappresentano rispettivamente i vettori $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$. Determinare

a) equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per i punti A, B;
b) il coseno $\cos\theta$ dell'angolo θ di vertice P del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, A, B;
c) le coordinate del punto K ottenuto proiettando A sulla retta passante per i punti P e B.

$*$ **Esercizio 6.20.** Si considerino, nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, il vettore geometrico $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ed i punti $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della r, parallela a $\vec{v}$ e passante per P; **b)** calcolare la distanza $\mathrm{dist}\{Q, r\}$; **c)** determinare le coordinate del punto K, ottenuto proiettando ortogonalmente il punto Q sulla retta r; **d)** calcolare l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, Q, K.

$*$ **Esercizio 6.21.** Nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, si consideri il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la retta r passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di r; **b)** trovare la distanza di Q da r; **c)** determinare le coordinate della proiezione $\vec{\pi}$ del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato $\overline{AQ}$ lungo la direzione di r.

$*$ **Esercizio 6.22.** Si consideri, nel piano Euclideo $\mathbb{R}^2$, la r retta ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Sia $Q = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ un altro punto.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per r; **b)** calcolare le coordinate della proiezione K ortogonale del punto Q su r; **c)** calcolare la distanza del punto Q da r; **d)** determinare le coordinate di un vettore di norma 5 parallelo ad r.

$*$ **Esercizio 6.23.** Si considerino lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette

$$r \ : \ \begin{cases} x - 2y \ = \ 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}, \qquad s \ : \ \begin{cases} x + y - z \ = \ 0 \\ y \ = \ 1 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette date hanno un punto in comune; **b)** scrivere equazioni parametriche per la retta r. **c)** determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale ad r; **d)** determinare la distanza dell'origine dalla retta r.

$*$ **Esercizio 6.24.** Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x+y-2z = 0$ ed il vettore $\vec{v}_t$ di coordinate $1, t, 3$.

a) trovare il valore t_0 per il quale $\vec{v}_{t_0}$ appartiene ad $\mathcal{H}$;
b) trovare i valori t_1 per i quali risulta $\mathrm{Span}\{\vec{v}_{t_1}\} + \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$;
c) trovare una base di $\mathcal{H}$ contenente il vettore $\vec{v}_{t_0}$;
d) si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della naturale struttura di spazio Euclideo. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{H}$, determinarne la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).

$*$ **Esercizio 6.25.** Si considerino lo spazio $\mathbb{R}^3$ i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) determinare un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{H}$ passante per i tre punti dati.
b) Considerando su $\mathbb{R}^3$ la struttura naturale di spazio Euclideo, calcolare l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici P, Q, R e la la distanza dell'origine dal piano $\mathcal{H}$

$*$ **Esercizio 6.26.** Si considerino lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ ed i punti $P_t = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) determinare un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{H}$ passante per il punto Q e contenente P_t per ogni valore di t; **b)** Calcolare l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici Q, P_0, P_1;
c) determinare la distanza dell'origine dal piano $\mathcal{H}$.

§7. Soluzione degli esercizi.

1.4. $\det A = -3k^2 - 5k + 8$, $\det B = -60$, $\det C = -2k^2 + 2k - 3$, $\det D = -4k^2 + 3k + 4$, $\det E = -2k^3 - k$, $\det F = -k^2 + 2k - 1$.

1.5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

1.6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ -2 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$,
$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \\ -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 10/7 & -5/7 & 6/7 \\ -4/7 & 2/7 & -1/7 \\ -5/7 & 6/7 & -3/7 \end{pmatrix}$, $F^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $H^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 7/3 & -2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$;

b) 216; 1/50; -27; $243(t+5)^2(t+8)^2$; $2k^2-2k-40$; $-3(8k+4)^3$; 10125/4; $-4t^2-36t-108$; $-24t^2 - 216t - 648$; $-48(t^2 + 9t + 27)(t^2 + 13t + 24)$; $-4(k^2 - k - 20)$; 2/27.

Nota. Gli ultimi quattro sono stati calcolati usando le uguaglianze che seguono (così da evitare lunghi calcoli): $A \cdot G - A \cdot M = A \cdot (G - M)$; $G^2 \cdot M - G \cdot M^2 = G \cdot (G - M) \cdot M$; $2A - A \cdot N \cdot H^{-1} = A \cdot (2H - N) \cdot H^{-1}$; $H^{-3} - H^{-4} = H^{-4}(H - I)$.

c) Il prodotto $E^{-1} \cdot J^2 \cdot K$ è invertibile se e solo se J e K sono entrambe invertibili (E^{-1} è invertibile). Si ha $\det J = k^2 - 5k - 14 = (k+2)(k-7)$ e $\det K = (k-1)(k-8)$, quindi $E^{-1} \cdot H^2 \cdot J$ è invertibile per ogni k diverso da -2, 7, 1, 8 (e non è invertibile se k è uno dei valori indicati). I prodotti $3G^{-2} \cdot M^2$ e $2B \cdot D^{-3} \cdot H \cdot J^2 \cdot N$ sono invertibili rispettivamente per $k \neq -13/2 \pm \sqrt{73}/2$ e per $k \neq -2, 7, -1/2$.

d) Si ha ampia possibilità di scelta, basta scrivere delle matrici "del tipo/soddisfacenti": $Q = A + J$, dove $\det J = 1$; $\det R = \det A^{-1}$; $\mathrm{rango} S = 2$; $\mathrm{rango} T = 1$; $U = A^{-1} \cdot W$, dove W ha rango 2 e prima colonna nulla (così $W \cdot \vec{e}_1 = \vec{0}$); $\mathrm{rango} X = 2$; $\mathrm{rango} Y = 1$.

1.7. La matrice M è sostanzialmente già a scala (anche se si tratta di una scala *capovolta*), ha rango 3 per k diverso da 3, 7, -4. Sostituendo questi valori troviamo che per $k = 3$ e per $k = -4$ ha rango 2, mentre per $k = 7$ ha comunque rango 3. In definitiva: $\mathrm{rg}(M) = 2$ per $k = 3, -4$; $\mathrm{rg}(M) = 3$ per $k \neq 3, -4$.

Risulta: $\mathrm{rg}(N) = 1$ per $k = 1$; $\mathrm{rg}(N) = 2$ per $k = -2$; $\mathrm{rg}(N) = 3$ per $k \neq 1, -2$.

1.8. Le matrici D, G, H, L, M, N hanno determinante nullo, quindi non sono invertibili per nessun valore di t; A è invertibile per $t \neq 1, 2$; B lo è per $t \neq 2, -2$; C lo è per $t \neq 1, 2, -2$; E lo è per $t \neq 3, 4, -1$; F lo è per $t \neq \sqrt{2}, -\sqrt{2}$; J lo è per $t \neq 0, 1, -1$.

1.11. **a)** basta scriverlo! **b)** $\det B = a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)$;
c) $C^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $D^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2} ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.12. Le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1.13. Posto $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'identità $P^2 = P$ si traduce nelle relazioni $a^2 + bc = a$, $b(a+d) = b$, $c(a+d) = c$, $bc + d^2 = d$. Queste relazioni consentono di elencare le matrici in questione: $bc \neq 0 \Rightarrow c = (a - a^2)/b,\ d = 1 - a \notin \{0, 1\}$; $bc = 0 \Rightarrow a, d \in \{0, 1\}$ (con $d = 1 - a$ se $\binom{b}{c} \neq \binom{0}{0}$). In definitiva, le matrici P soddisfacenti $P^2 = P$ sono le matrici che seguono: $\begin{pmatrix} a & x \\ (a - a^2)/x & 1 - a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ x & 1 - \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \delta & x \\ 0 & 1 - \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$ dove $a \notin \{0, 1\}$; $x \neq 0$; $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$. Esiste un modo geometrico di affrontare il problema che fornisce una risposta soddisfacente anche nel caso delle matrici $n \times n$ (cfr. esercizio 5.37).

1.14. Sono le matrici del tipo $\pm\begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & \alpha\gamma \end{pmatrix}$.

1.15. Innanzi tutto osserviamo che la quarta e la quinta colonna di A sono uguali rispettivamente alla seconda e terza colonna. Di conseguenza possiamo ignorarle: rango(A) = rango(A') per ogni valore di k, dove A' è la sottomatrice costituita dalle prime tre colonne di A. Si ha $\det(A') = 0$, ne segue che rango$(A') \leq 2$, per ogni k. Ora consideriamo il minore $M = \begin{pmatrix} k-6 & 3 \\ 2k+1 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det(M) = -3k - 21$, per $k \neq -7$ la matrice A' (quindi la matrice A) ha rango maggiore o uguale a 2. Studiando separatamente il caso in cui $k = -7$ si ottiene che A', quindi A, ha rango 1. Riassumendo: A ha rango 1 per $k = -7$; A ha rango 2 per $k \neq -7$; A non ha mai rango 3.

1.16. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **Nota:** per determinare le soluzioni del sistema lineare $A^{-1}\cdot\vec{x} = \vec{b}$ **non** si devono fare calcoli: $A^{-1}\cdot\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A\cdot\vec{b}$.

1.17. Si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 13/6 & -2 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Visto che A è invertibile, l'invertibilità del prodotto $A^2\cdot B^3$ è equivalente all'invertibilità di B. Poiché $\det B = -6(8-3k)$, la matrice $A^2 \cdot B^3$ è invertibile per k diverso da $\frac{8}{3}$.
Posto $k = 0$, si ha $B\vec{e}_1 = 2e_1$ nonché $A\vec{e}_1 = 3e_1$. Quindi, $A^2\cdot B^3\cdot\vec{e}_1 = 3^2\cdot 2^3\cdot\vec{e}_1 = 72\,\vec{e}_1$.

1.18. **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -19/3 & 8/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 28/3 & -11/3 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha $\det A = 3$, $\det B = 8$, quindi, $\det(2AB^2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 8^2 = 1536$, $\det\big(2(A^{-1})^2B^2\big) = 2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 8^2 = \frac{512}{9}$.
Invece, per calcolare $\det(2A+B)$ non ci sono scorciatoie. Si trova $\det(2A + B) = 12$.

b) abbiamo ampia possibilità di scelta. Infatti, possiamo fare in modo che la somma $A+C$ sia quello che ci pare: presa una qualsiasi matrice D di rango 1 definiamo $C = D-A$.

c) abbiamo di nuovo ampia possibilità di scelta: basta scegliere una matrice D di rango 1 (anche il prodotto $A \cdot D$, essendo A invertibile, avrà rango 1).

1.19. Risulta: $\det A = 3$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -19/3 & 8/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 28/3 & -11/3 & -1 \end{pmatrix}$; $AB(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 59 \\ 172 \\ -93 \end{pmatrix}$;
$\det B = 4$; $\det(2AB^2) = 2^3 \cdot \det A \cdot (\det B)^2 = 8 \cdot 3 \cdot 16 = 384$; $\det(2A + B) = 52$;
$\det\big(2(A^{-1})^2B^2\big) = 2^3 \cdot (\det A)^{-2} \cdot (\det B)^2 = \frac{8\cdot 16}{9} = \frac{128}{9}$.
Poiché A è invertibile, si ha che $A\cdot D\cdot\vec{k} = \vec{0}$ se e solo se $D\cdot\vec{k} = \vec{0}$, quindi il nucleo di $A\cdot D$ è uguale al nucleo di D. La matrice D deve avere rango 2 e si deve avere $D\cdot\vec{v} = \vec{0}$, cioè si deve avere $\vec{d}_1 - 2\vec{d}_2 + \vec{d}_3 = \vec{0}$ (essendo $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$ le tre colonne di D). Abbiamo ampia possibilità di scelta, ad esempio possiamo prendere $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.20. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A^n \overset{(Binet)}{=} (\det A)^n = (-1)^n$.
Inoltre, $\det\big(n \cdot A\big) = n^3\cdot\det A = -n^3$ (questo perché A è una matrice di ordine 3).

1.21. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 0 \\ 1/5 & -1/15 & -1/3 \end{pmatrix}$; $B\cdot A^3\cdot\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 81 \\ -54 \\ -27 \end{pmatrix}$; $A^3\cdot B^2$ è invertibile se e solo se B è invertibile, questo accade per $k \neq 8$; $\vec{x} = A^{-1} \cdot B \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ -16/15 \end{pmatrix}$.

1.22. Risulta: $\det A = 3$, quindi A è invertibile;
$\det B_t = 2 \cdot (-2t+2-8) = -4t - 12$, quindi B_t è invertibile per $t \neq -3$;
$\det\left(4 \cdot A^{-3} \cdot B^2\right) = 4^3 \cdot \left(\det A\right)^{-3} \cdot \left(\det B_t\right)^2 = \frac{64}{27}\left(4t+12\right)^2$ (si usa il teorema di Binet);
$\det(A+B) = -3t - 27$ (si <u>deve</u> prima calcolare $A+B$);
$C = A^{-1} \cdot (A + A \cdot B) = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot A \cdot B = I + B = \begin{pmatrix} t & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.23. Moltiplicando per A^{-2} si trova $A = I_n$ (matrice identica di ordine n).
Si ha $A^2BA + A^2B^2 = A^2B(A+B)$, quindi $\det\left(\lambda(A^2BA + A^2B^2)\right) = \lambda^n a^2 bc$.

1.24. **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & -11/6 & 1/6 \\ 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ -5/6 & 17/6 & -1/6 \end{pmatrix}$. **b)** $\det\left(A^{-1}B_kA^2\right) = \det B_k \cdot \det A = -18k+270$; $\det(2B_k) = -24k+360$; $\det(A+B_k) = 3k+9$. **c)** Il "rango di una matrice" corrisponde alla "dimensione dell'immagine" (nella corrispondenza tra matrici e applicazioni lineari). D'altro canto questa dimensione non varia quando si compone una applicazione lineare con una applicazione lineare biunivoca (cfr § 12). Questo principio si applica anche alla seconda uguaglianza perché risulta $A^{-1}B_kA^2 + A = A^{-1} \cdot (B_k + I) \cdot A^2$.

1.25. **a)** $B \cdot A^3 \cdot B^2$ è invertibile per $t \neq 1, -1$. **b)** Poiché $A \cdot C - B \cdot C = (A-B) \cdot C$ e $A-B$ è invertibile (t^2+3 non si annulla mai), si ha $\text{rango}(A \cdot C - B \cdot C) = \text{rango}(C) = 2$.
c) B è invertibile per $t \neq -1$. Assumendo $t \neq -1$ risulta $A^4 \cdot B^{-2} - A^3 \cdot B^{-1} = A^3 \cdot (A - B) \cdot B^{-2}$. Il determinante di questo prodotto vale $(t^2-1)^3 \cdot (t^2+3) \cdot (t+1)^{-2}$.
c) $E =$ "matrice di colonne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{0}$" (in questo modo il prodotto $D \cdot E$ dà le prime due colonne di D e la colonna nulla); $F =$ "matrice di colonne $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{0}$".

2.4. $\mathcal{S}_1$. $k \neq -4$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = -4$: incompatibile.
$\mathcal{S}_2$. $k \neq 4, -2, 3$: $\exists!$ soluzione; $k = 4, 3$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = -2$: incompatibile.
$\mathcal{S}_3$. $k \neq 0, -1$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = 0$: incompatibile; $k = -1$: $\exists \infty^2$ soluzioni.
$\mathcal{S}_4$. $k \neq 1, -2$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = 1$: $\exists \infty^2$ soluzioni; $k = -2$: incompatibile.
$\mathcal{S}_5$. $k \neq 1, -3$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = 1$: incompatibile; $k = -3$: $\exists \infty^2$ soluzioni.
$\mathcal{S}_6$. $k \neq 2, -5$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = 2$: $\exists \infty^2$ soluzioni; $k = -5$: incompatibile.
$\mathcal{S}_7$. $k \neq 3, -5$: $\exists \infty^1$ soluzioni; $k = 3$: $\exists \infty^2$ soluzioni; $k = -5$: incompatibile.
$\mathcal{S}_8$. $k \neq 2, 7$: $\exists!$ soluzione; $k = 2$: incompatibile; $k = 7$: $\exists \infty^1$ soluzioni.

2.5. **a)** cambiare l'ordine delle colonne equivale a cambiare l'ordine delle incognite ...basta ricordarsene! **b)** No, i sistemi associati alle matrici A e B non sono equivalenti; **c)** si; **d)** si; **e)** no (a meno che non si tenga traccia dell'incognita fatta fuori); **f)** e **g)** no (a meno che non si tenga traccia della corrispondente trasformazione delle incognite).

2.6. $\mathcal{S}_B \sim \mathcal{S}_F$; $\mathcal{S}_C \sim \mathcal{S}_E$; $\mathcal{S}_L \sim \mathcal{S}_N$ ("$\sim$" denota l'equivalenza di sistemi lineari).
$\mathcal{S}_A$ è incompatibile; $\exists!$ soluzione per $\mathcal{S}_C, \mathcal{S}_E$; $\exists \infty^1$ soluzioni per $\mathcal{S}_D, \mathcal{S}_M$;
$\exists \infty^2$ soluzioni per $\mathcal{S}_G, \mathcal{S}_L, \mathcal{S}_N$; $\exists \infty^3$ soluzioni per $\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_F$; $\exists \infty^4$ soluzioni per $\mathcal{S}_H$.

2.8. Poiché il sistema è quadrato (numero equazioni = numero incognite), ammette una unica soluzione se e solo se il determinante Δ della matrice incompleta è diverso da zero.
Si ha $\Delta = k^2 - 5k + 6$. Pertanto esiste una unica soluzione per k diverso da 2 e 3.
Per $k = 3$ il sistema è incompatibile ($14x + 13y = -8$, $14x + 13y = -7$). Si osservi che il rango della matrice completa è maggiore di quello della matrice incompleta).
Per $k = 2$ il sistema (che diventa $8x+8y = -8$, $7x+7y = -7$) ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero ("n. incognite $-$ rango" $= 1$).

2.9. La matrice incompleta associata al sistema è una matrice triangolare, il suo determinante vale $(k+3)(k+6)(k-2)$, che è non-nullo per k diverso da -3, -6, 2. Di conseguenza, poiché il nostro sistema è un sistema quadrato (num. equazioni = num. incognite) per k diverso da -3, -6, 2 il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una unica soluzione. Sostituendo i valori -3, -6, 2 nel sistema si trova che per $k = -3$ e per $k = 2$ il sistema è incompatibile; per $k = -6$ il sistema ammette infinite soluzioni.

2.10. Innanzi tutto, riduciamo a scala la matrice completa associata al sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2t & 5+t & 4 & 11+t \\ 4 & 9-2t & 7-t & 5+t & 10+t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2t-6 & t-3 & 0 & 1+t \\ 0 & 6-2t & 3-t & 3+t & 5+t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2t-6 & t-3 & 0 & 1+t \\ 0 & 0 & 0 & 3+t & 6+2t \end{pmatrix}$$

Per t diverso da -3 e 3 la matrice incompleta, nonché quella completa, associata al sistema ha rango 3. Per tali valori di t quindi il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un solo parametro libero. Per $t = 3$, il sistema è incompatibile. Per $t = -3$, le matrici completa e incompleta hanno entrambe rango 2, quindi il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da 2 parametri liberi.

2.11. Si ha $\dim W_t = 5 - \mathrm{rg}(A)$, quindi calcoliamo il rango della matrice A. A tal fine consideriamo il determinante del minore costituito dalle ultime 3 colonne (così i conti risultano più semplici), questo vale $(t-5)^2 \cdot (t+11)$. Segue che per t diverso da 5 e -11 la matrice A ha rango 3, ovvero W_t ha dimensione 2 (=5-3). Sostituendo i valori $t = 5$ e $t = -11$ troviamo matrici rispettivamente di rango 1 e rango 2. Quindi, le dimensioni dei corrispondenti spazi W_5 e W_{-11} valgono $\dim W_5 = 5 - \mathrm{rango}(A_5) = 5 - 1 = 4$, $\dim W_{-11} = 5 - \mathrm{rango}(A_{-11}) = 5 - 2 = 3$.

Scegliamo $\tilde{t} = 5$. Con questa scelta abbiamo una matrice di rango 1, ovvero un sistema lineare omogeneo costituito da una sola equazione: il sistema $A_5 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ è costituito dalla sola equazione $7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$. Risolvendola, troviamo una base di W_5:

$$\mathcal{B}_{W_5} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/10 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.12. Questo esercizio è molto simile al (4.4). Si ha $\dim W_t = 5 - \mathrm{rg}(A)$. Calcolando il determinante del minore di A costituito dalle ultime 3 colonne si trova $(t+1)^2(t+4)$. Segue che per t diverso da -1 e -4 la matrice A ha rango 3, ovvero W_t ha dimensione 2 (=5-3). Per $t = -1$ e $t = -4$ troviamo rispettivamente matrici di rango 1 e rango 2. Quindi $\dim W_{-1} = 5 - \mathrm{rango}(A_{-1}) = 5 - 1 = 4$, $\dim W_{-4} = 5 - \mathrm{rango}(A_{-4}) = 5 - 2 = 3$.
Una base di W_{-4} si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo $(A_{-4}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$: $\mathcal{B}_{W_{-4}} = \{ {}^t(0\ 0\ 0\ -1\ 1),\ {}^t(0\ -1\ 2\ 0\ 0),\ {}^t(-1\ 0\ 1\ 1\ 1) \}$.

2.13. Le soluzioni del sistema corrispondono ai coefficienti delle combinazioni lineari che esprimono il vettore dei termini noti come combinazione lineare delle colonne della matrice incompleta, infatti il sistema può essere scritto nella forma

$$x \cdot \begin{pmatrix} t \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t+2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} t+3 \\ 1 \\ t+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'altro canto il non annullarsi del determinante della matrice completa associata al sistema (matrice che indicheremo con $\tilde{A}$), esprime l'indipendenza lineare dei quattro vettori corrispondenti alle colonne di $\tilde{A}$, ovvero implica l'incompatibilità del sistema stesso. Calcolando tale determinante (consiglio lo sviluppo di Laplace rispetto alle seconda colonna) troviamo: $\det \tilde{A} = (t+2) \cdot (t+2) \cdot (t-3)$. Quindi, per t diverso da -2 e 3 il sistema è incompatibile. Studiando separatamente cosa accade per $t = -2$ e per $t = 3$ troviamo quanto segue. Per $t = -2$ il sistema ammette infinite soluzioni. Per $t = 3$ il sistema ammette un'unica soluzione (non servono calcoli: le colonne della matrice incompleta sono chiaramente indipendenti, quindi non può esserci più d'una soluzione, d'altro canto già sappiamo che le colonne della matrice completa sono dipendenti).

2.14. Indichiamo con $\tilde{A}$ la matrice completa associata al sistema e indichiamo con A la matrice incompleta. Effettuando l'E.G. su $\tilde{A}$ si trova

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & k-3 & 7 & 4 \\ -9 & k+5 & k+6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 6 & 3 \\ 0 & k-1 & k+9 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & k+3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che per k diverso da 1 e -3 il sistema ammette un'unica soluzione. Sostituendo i valori $k = -3$ e $k = 1$ nella riduzione effettuata, per $k = -3$ troviamo che il sistema è incompatibile; per $k = 1$ (terminando la riduzione a scala di $\tilde{A}$) troviamo che il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro libero.

2.15. Si devono calcolare i ranghi delle matrici incompleta $\tilde{A}$ e completa A associate al sistema. A tal fine consideriamo la sottomatrice M costituita da prima, terza e quarta colonna. Si ha $\det M = -2(t+2)(t+7)$. Ne segue che per $t \neq -2, -7$ la matrice incompleta associata al sistema ha rango 3. Anche la matrice completa deve avere rango 3, quindi il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da 5-3 = 2 parametri liberi.

I casi in cui $t = -2$ e $t = -7$ li studiamo separatamente. In entrambi i casi consideriamo la matrice completa associata al sistema ed effettuiamo una riduzione a scala (che essendoci sbarazzati di t è immediata).

Per $t = -2$ troviamo che il rango della matrice incompleta vale 2 mentre il rango della matrice completa vale 3, quindi il sistema è incompatibile.

Per $t = -7$ troviamo che il rango della matrice incompleta vale 2, anche il rango della matrice completa vale 2, quindi il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da 5–2 = 3 parametri liberi.

Nota: un altro approccio possibile è quello di ridurre a scala la matrice completa associata al sistema. Visto che l'obiettivo è quello di calcolare i ranghi di $\tilde{A}$ ed A è lecito riscrivere le colonne in un ordine più conveniente (se scambiamo la quarta colonna con la prima tale riduzione a scala si effettua rapidamente). Naturalmente non dobbiamo dimenticarci che il sistema associato alla nuova matrice non è equivalente a quello di partenza (a meno di scambiare anche x_1 con x_4), ma visto che l'esercizio non ci chiede di risolvere il sistema...!

2.16. Riduciamo a scala la matrice completa associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

Da questa riduzione si evince che ci sono tre possibilità:
per λ diverso da 1 e -1 il sistema è compatibile e ammette una unica soluzione. Si ha

$$\begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ (\lambda+1)y - (\lambda+1)z & = & -\lambda \\ (\lambda-1)z & = & \lambda-1 \end{cases}, \qquad \text{quindi} \qquad \begin{cases} x & = & 1/(\lambda+1) \\ y & = & 1/(\lambda+1) \\ z & = & 1 \end{cases};$$

per $\lambda = 1$ il sistema è compatibile, ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero, si ha $x = \frac{1}{2}$, $y = t - \frac{1}{2}$, $z = t$ (parametro libero).
Per $\lambda = -1$ il sistema è incompatibile (la seconda equazione è l'equazione $0 = 1$).

2.17. Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Nel nostro caso abbiamo un sistema di 3 equazioni in 2 incognite. I valori per i quali la matrice completa ha rango 3 sono i valori per i quali il suo determinante non si annulla. Tale determinante vale $2k^3-18k^2+48k-40 = 2(k-2)^2\cdot(k-5)$. Quindi, per $k \neq 2, 5$, la matrice completa ha rango 3 ed il sistema è incompatibile (il rango della matrice incompleta non può superare 2).

Per $k = 2$ il sistema si riduce alla sola equazione $x + y = -3$ e pertanto si hanno infinite soluzioni (dipendenti da un parametro libero): $x = -3-t$, $y = t$ (*parametro libero*).

Per $k = 5$ il sistema è compatibile ed ha un'unica soluzione: $x = 0$, $y = 3$.

Nota: potremmo non essere in grado di risolvere l'equazione di terzo grado in k data dall'annullarsi del determinante della matrice completa. Un modo per ovviare a questo inconveniente consiste nel trovare, in qualche modo, almeno una radice di tale equazione (cosa che consente di abbassarne il grado): ad esempio potremmo lavorare con l'E.G., oppure osservare che per $k = 2$ le prime due colonne sono proporzionali (la matrice incompleta ha rango 1 e, necessariamente, la matrice completa non può avere rango 3).

2.18. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta associata al sistema:

$$\det\begin{pmatrix} 7-2k & 4-k \\ 3k & k+2 \end{pmatrix} = (7-2k)(k+2) - 3k(4-k) = k^2 - 9k + 14 = (k-2)(k-7).$$

Quindi, per k diverso da 2 e 7 il sistema ammette un'unica soluzione. Studiamo i casi in cui $k = 2$ e $k = 7$. Per $k = 2$ il sistema è compatibile, ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro libero (le due equazioni sono proporzionali): $x = -2t + 1/3$, $y = 3t$. Per $k = 7$ il sistema è incompatibile.
Infine, per $k = 0$ la soluzione (che come già sappiamo è unica) è la coppia $x = -\frac{3}{7}$, $y = 1$.

2.19. La matrice incompleta ha rango 2 per $t \neq 2, -6$, per tali valori il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da un parametro libero (anche la matrice completa ha rango 2). Sia per $t = 2$ che per $t = -6$ il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da due parametri liberi. Per $t = 0$ si trova $x = 1$, $y = t$ (parametro libero), $z = 1$. Non esistono valori di t per i quali $\mathcal{S}_t$ è uno spazio vettoriale (il sistema non è omogeneo per nessun t). L'insieme $\mathcal{S}_t$, in quanto spazio affine, contiene la retta r se e solo se contiene i due punti P e Q. Questo accade per ogni t, quindi $\mathcal{S}_t \supseteq r$, $\forall\, t$. Inoltre, per ragioni dimensione, l'uguaglianza $\mathcal{S}_t = r$ si ha solo per $t \neq 2, -6$.

2.20. La matrice incompleta ha rango 3 per $t \neq 2, 3$, per tali valori il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione (anche la matrice completa ha rango 3). Sia per $t = 2$ che per $t = -6$ il sistema è incompatibile (la matrice incompleta ha rango 2, quella completa ha rango 3). Sostituendo $\vec{c}$ al vettore delle incognite si trova che questo risolve il sistema solo per $t = -1$. Sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare del quale $\vec{c}$ e $\vec{d}$ ne sono soluzioni. Risulta $A\cdot\big(\lambda\vec{c} + (1-\lambda)\vec{d}\big) = \lambda A\vec{c} + (1-\lambda)A\vec{d} = \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b}$. Questo dimostra quanto affermato.
In inciso, il motivo geometrico per il quale le espressioni del tipo $\lambda\vec{c} + (1-\lambda)\vec{d}$ risolvono il sistema è il seguente: tali espressioni individuano la retta affine passante per i punti $\vec{c}$ e $\vec{d}$, d'altro canto essendo lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare uno spazio affine, se contiene due punti contiene anche la retta che li unisce.

3.1 e 3.2. Il determinante della matrice associata ai vettori indicati è diverso da zero (in tutti i casi), quindi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è un insieme indipendente e, per ragioni di dimensione, costituisce una base di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate di $\vec{w}$ sono, per definizione, i coefficienti α, β, γ che soddisfano la relazione $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{w}$. Risulta: 5.1) $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 9/2$; 5.2 *a*) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$; 5.2 *b*) $\alpha = \frac{17}{9}$, $\beta = \frac{-5}{9}$, $\gamma = \frac{29}{9}$; 5.2 *c*) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$.

3.4. In entrambi i casi, lo spazio V generato dai 5 vettori indicati ha dimensione 2 (riducendo a scala la matrice associata si trovano 2 pivot), cioè è un piano. D'altro canto gli spazi in questione hanno almeno dimensione 2 (i vettori che li generano non sono proporzionali), quindi sono uguali a V (in quanto contenuti in esso), in particolare sono uguali.

3.10. In entrambi i casi denotiamo con $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ i tre generatori di W.
a) Riducendo a scala la matrice associata ai vettori indicati si trova che lo spazio W ha dimensione 2. Le equazioni cartesiane si determinano "eliminando i parametri" dalle equazioni parametriche (deducibili dai generatori), si trova: $\begin{cases} x + z - 4w = 0 \\ y - 3w = 0 \end{cases}$.
Il vettore $\vec{v}_t$ appartiene a W se soddisfa tali equazioni, cioè accade se e solo se $t = 2$.
Scegliendo l'insieme $\mathcal{B} = \{\vec{v}_{t=2}, \vec{w}_1\}$ come base di W, le coordinate di $\vec{v}_{t=2}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono 1, 0 (non ci sono conti da fare). **Nota.** Sarebbe stato ugualmente corretto scegliere la base $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, ma in questo caso per trovare le coordinate di $\vec{v}_{t=2}$ avremmo dovuto risolvere il sistema lineare $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \vec{v}_{t=2}$ (ottenendo $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

b) $\dim W = 3$; equazioni cartesiane: $x + z = 0$; $\vec{v}_t \in U$ se e solo se $t = 6$; coordinate di $\vec{v}_6$ rispetto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_{t=6}, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$: $1,\ 0,\ 0$ (mentre le coordinate di $\vec{v}_6$ rispetto alla base costituita dai tre generatori indicati nel testo sono $1,\ -2,\ 3$).

3.11. Nei casi *e*), *g*), *h*), *i*) uno dei due spazi viene dato in forma cartesiana, risolvendo le corrispondenti equazioni si trovano rispettivamente le basi indicate:

$$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}20\\-5\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\5\\0\\4\end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Nella tabella che segue i vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots$ denotano i generatori di U e W indicati nel testo ovvero i generatori indicati sopra (sempre nell'ordine in cui compaiono).

		dimensioni di				*basi*		
		U	W	$(U+W)$	$(U\cap W)$	$\mathcal{B}_{U\cap W}$	$\mathcal{B}_{U+W}$	"relazioni"
a)		2	2	3	1	$\{\vec{w}_1\}$	ogni base di $\mathbb{R}^3$	$U+W=\mathbb{R}^3$
b)		2	2	3	1	$\{-2\vec{u}_1+7\vec{u}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	
c)	$t\neq 3,\ 9$	3	2	3	2			$W\subseteq U$
	$t=3$	2	1	2	1			$W\subseteq U$
	$t=9$	2	2	2	2			$U=W$
d)		2	2	3	1	$\{\vec{u}_1-\vec{u}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	
e)	$k\neq 4$	2	2	4	0		ogni base di $\mathbb{R}^4$	$U+W=\mathbb{R}^4$
	$k=4$	2	2	3	1	$\{3\vec{w}_1-2\vec{w}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	.
f)	$k\neq 4,\ 7$	2	2	4	0	.	ogni base di $\mathbb{R}^4$	$U+W=\mathbb{R}^4$
	$k=4$	2	2	3	1	$\{2\vec{w}_1-\vec{w}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	.
	$k=7$	2	1	3	0	.	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	.
g)		2	2	3	1	$\{2\vec{w}_1-\vec{w}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	
h)	$t\neq 3,\ 5$	2	2	4	0	.	ogni base di $\mathbb{R}^4$	$U+W=\mathbb{R}^4$
	$t=3$	2	1	3	0	.	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	.
	$t=5$	2	2	3	1	$\{\vec{w}_1+2\vec{w}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	.
i)		2	2	3	1	$\{\vec{2}u_1+\vec{u}_2\}$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\}$	
l)	$k\neq 3,-2$	3	2	4	1	$\{\vec{w}_1+2\vec{w}_2\}$	ogni base di $\mathbb{R}^4$	$U+W=\mathbb{R}^4$
	$k=3$	3	2	3	2	.	.	$W\subseteq U$
	$k=-2$	3	1	4	0	.	ogni base di $\mathbb{R}^4$	.
m)	$t\neq 3,-3$	2	2	3	1	$\{\vec{w}_1-2\vec{w}_2\}$	.	.
	$t=3$	2	1	3	0	.	.	.
	$t=-3$	2	2	2	2	.	.	$U=W$

3.19. Poniamo $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\5\\-7\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-5\\7\\-41\end{pmatrix}$, $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-5\\-7\\9\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\-8\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Il vettore $\vec{e}_1$ non appartiene né a U né a W, infatti i vettori $\vec{e}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ sono indipendenti, come pure i vettori $\vec{e}_1, \vec{w}_1, \vec{w}_2$. Risolvendo il sistema $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2$ si trova $y_1 = \frac{t}{8}$, $y_2 = t$ (t parametro libero).

Ne segue che $\mathcal{B}_{U\cap W} = \left\{\frac{8}{11}\left(\frac{\vec{w}_1}{8} + w_2\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}\right\}$ è una base dell'intersezione $U \cap W$.

Poiché $U\cap W$ ha dimensione 1, lo spazio somma $U + W$ ha dimensione 3, quindi è uguale ad $\mathbb{R}^3$. Ne segue che ogni terna di vettori indipendenti è una base di $U+W$ (in particolare, la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è una base di $U + W$).
Infine, poiché $U+W = \mathbb{R}^3$, non esiste nessun vettore $\vec{k}$ che soddisfa le proprietà richieste.

3.20. Indichiamo con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ i cinque vettori che definiscono lo spazio W.

I primi due sono proporzionali tra loro (infatti $\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1$), il terzo e il quarto sono anch'essi proporzionali tra loro ($\vec{v}_4 = -2\vec{v}_3$) e $\vec{v}_5 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. Ne segue che l'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ costituisce una base di W (i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ non sono proporzionali, quindi sono indipendenti), in particolare W ha dimensione 2. Questo risultato si può ottenere anche tramite l'eliminazione di Gauss: effettuando la riduzione a scala sulla matrice associata ai vettori dati troviamo i pivot su prima e terza colonna.

Risolvendo il sistema $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_3 = \vec{v}$ si trova $\lambda = 7$, $\mu = -2$. Questi valori sono le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base indicata.

3.21. Indichiamo i vettori dati (nell'ordine) con $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_1$ ed effettuiamo la riduzione a scala della matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & t-5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & t-4 & 5 & 6-2t \\ 2 & 6 & t-1 & 10 & -2-2t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & t-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-7 & 0 & 14-2t \\ 0 & 0 & t-7 & 0 & 14-2t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & t-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-7 & 0 & 14-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenendo presente che le prime tre colonne corrispondono ai generatori di U e le ultime due ai generatori di W troviamo che per t diverso da 5 e 7, U ha dimensione 3, W ha dimensione 2 ed è contenuto in U, quindi $\dim U + W = 3$, $\dim U \cap W = 2$ (in particolare, per $t \neq 5, 7$, non rientriamo nei casi **a**, **b**, **c**).

Per $t = 5$, si ha $U = W$, quindi $U = W = U + W = U \cap W$, (e la dimensione è 2, siamo nei casi **a** e **c**); una base di $U + W$ è $\mathcal{B}_{U+W} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$.

Per $t = 7$, U ha dimensione 2, W ha dimensione 1. Inoltre, $W \subseteq U$, quindi $U \cap W = W$ ha dimensione 1 e $U + W = U$ ha dimensione 2 (siamo nei casi **b** e **c**). Una base di $U + W$ è $\mathcal{B}_{U+W} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Per $t = 0$ si ha $W \subseteq U$, quindi non esistono vettori $\vec{v}$ che soddisfano le condizioni $\vec{v} \in U + W$ e $\vec{v} \notin U \cup W$.

3.22. Lo spazio U ha dimensione 2 (indipendentemente da k). Effettuando l'eliminazione di Gauss sulla matrice associata ai vettori $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ si trova che lo spazio W ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ (d'ora in poi possiamo ignorare completamente $\vec{w}_3$).

Vista la formula di Grassmann, si ha $\dim(U \cap W) = 2+2-\dim(U+W) = 4-rango(A)$, dove A denota la matrice associata ai vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$. Effettuando l'eliminazione di Gauss sulla matrice A si trova

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & k+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & k-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & k-7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-5 \end{pmatrix}$$

Quindi: $\dim(U \cap W) = 0$, per $k \neq 5$; $\dim(U \cap W) = 1$, per $k = 5$ (infatti, in questo caso, A ha rango 3).

Per $k = 5$, si deve determinare una base dell'intersezione, a tal fine si deve risolvere il sistema $x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$. Questo sistema lo abbiamo già risolto: dall'eliminazione di Gauss appena effettuata si ottiene l'equazione $-y_1 - 2y_2 = 0$ (corrispondente alla 3^a riga dell'ultima matrice dell'E.G.). Ne segue $y_2 = t$, $y_1 = -2t$, quindi che il vettore $2u_1 - u_2$ (di coordinate 0, 5, 5, 5) costituisce una base dell'intersezione $U \cap W$.

Certamente, sempre per $k = 5$, esiste un vettore che non appartiene allo spazio somma (che avendo dimensione 3 non esaurisce tutto $\mathbb{R}^4$). Un vettore $\vec{v} \notin U + W$ è il vettore $\vec{v} = \vec{e}_4$ (quarto vettore della base canonica). La scelta è caduta su $\vec{e}_4$ perché, aggiungendo $\vec{e}_1$ come 5^a colonna nell'E.G. effettuata sulla matrice A, è evidente che questo vettore non è combinazione lineare dei generatori di $U + W$ (tutto questo sempre per $k = 5$); volendo scegliere un vettore diverso dovremmo verificare che non appartiene allo spazio somma.

3.23. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ x - 2y + z + w & = 0 \end{cases}$ troviamo una rappresentazione parametrica dello spazio U (quindi una sua base $\mathcal{B}_U$):

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3z+w \\ 2z+w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z,\, w \text{ parametri liberi} \right\}; \quad \mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

I due vettori indicati li chiamiamo $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

Indichiamo con $\vec{w}_1,\, \vec{w}_2,\, \vec{w}_3$ i tre generatori di W. Applicando l'algoritmo di estrazione di una base, il secondo vettore è il doppio del primo e pertanto lo eliminiamo, mentre il terzo lo teniamo perché non è un multiplo del primo. Quindi, una base di W è $\mathcal{B}_W = \{\vec{w}_1,\, \vec{w}_3\}$.

Lo spazio $U+W$ è generato dai vettori $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_3$, Una base di $U+W$ si trova applicando a questi vettori l'algoritmo di estrazione di una base, l'intersezione $U \cap W$ si determina risolvendo il sistema lineare $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2$.

Effettuando la riduzione a scala della matrice M associata ai vettori in questione si trova che i pivot cadono sulla prima seconda e terza colonna, i primi tre vettori sono indipendenti e il quarto è una loro combinazione lineare. Inoltre, per quel che riguarda il sistema lineare $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_3$, dall'ultima equazione associata alla riduzione a scala di M si trova $0 = y_1 + 2y_2$, ovvero $y_1 = -2y_2$, con y_2 parametro libero (le altre equazioni ci danno le "x" e non ci interessano: non serve risolvere completamente il sistema considerato, basta determinare le "y". Ne segue che per quel che riguarda $U \cap W$ e $U+W$ abbiamo:

$$U \cap W = \left\{ -2y_2\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 \,\middle|\, y_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y_2(-2\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \,\middle|\, y_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = \left\{ -2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.24. Raccogliamo i vettori che definiscono W_t e il vettore $\vec{v}$ in una matrice che indichiamo con M. Effettuando l'eliminazione di Gauss su questa matrice si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2 & 1 & 3 \\ 1 & t{+}2 & 5 & 8 & 1 \\ -2 & -2t & -4 & 1 & -5 \\ -1 & -t{+}4 & 4 & t{+}11 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & t{+}12 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t{+}7 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\vec{v} \in W_{t_0}$ se e solo se $t = -7$. Posto $t_0 = -7$, i pivot della riduzione di M si trovano su prima, seconda e quarta colonna, i corrispondenti vettori costituiscono una base di W_{t_0}: $\quad \mathcal{B}_{W_{t_0}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ si ottengono risolvendo il sistema lineare $\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{v}$ (che risolviamo utilizzando la riduzione a scala effettuata, ovviamente ignorando la terza colonna e sostituendo t con -7). Si trova $\alpha = -\frac{25}{2}$, $\beta = -\frac{13}{6}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Nota. Per $t = -7$, dalla matrice trovata effettuando la riduzione a scala si evince che lo spazio $W_{t_0=-7}$ ha dimensione 3 e che i vettori corrispondenti a prima, seconda e <u>quinta</u> colonna sono indipendenti, quindi formano una base di $W_{t_0=-7}$. Le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a tale base sono $0,\, 0,\, 1$ (questo proprio in virtù del fatto che tra i vettori di tale base c'è $\vec{v}$) ...scegliendo questa base si evita qualsiasi calcolo!

3.25. Innanzi tutto osserviamo che lo spazio U_t ha dimensione 3 per $t \neq 4$ ed ha dimensione 2 per $t = 4$. Infatti, i primi due vettori sono proporzionali se e solo se $t - 2 = 2$ (cioè $t = 4$), il terzo vettore non è mai combinazione lineare dei primi due. Inoltre, chiaramente W ha dimensione 2.

La dimensione dello spazio somma $U_t + W$ è uguale al rango della matrice A associata ai vettori forniti nel testo (che denoteremo con $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3,\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_2$):

$\dim(U_t + W) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+11 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t-2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il determinante della sottomatrice costituita dalle ultime 4 colonne vale $-1\cdot 1\cdot\big(4-(t+11)\big)$ e si annulla se e solo se $t=-7$. Quindi, per $t\neq -7$ la matrice A ha rango 4. Inoltre, per $t=-7$ la matrice A ha rango 3 (le prime due righe sono uguali). Inserendo le informazioni trovate nella formula di Grassmann otteniamo

$$\dim\big(U_t\cap W\big) = \begin{cases} 2+2-4 = 0 & \textit{per} \quad t=4 \\ 3+2-3 = 2 & \textit{per} \quad t=-7 \\ 3+2-4 = 1 & \textit{per} \quad t\neq 4,\,-7 \end{cases}$$

Scegliamo un valore τ per il quale $U_\tau \cap W$ ha dimensione 1, ad esempio $\tau = 0$ (un qualsiasi valore diverso da 4 e -7 va bene). Non serve fare calcoli: il vettore $\vec{w}_1$ è chiaramente combinazione lineare dei vettori $\vec{u}_1,\,\vec{u}_2$. Quindi, $\mathcal{B}=\{\vec{w}_1\}$ è una base di $U_{\tau=0}\cap W$.

Per completare la base di $U_\tau\cap W$ trovata precedentemente a una base di U_τ si deve scegliere una base di $U_{\tau=0}$ contenente il vettore $\vec{w}_1$. Ad esempio, $\mathcal{B}_{U_{\tau=0}} = \{\vec{w}_1,\,\vec{u}_1,\,\vec{u}_3\}$ (scartiamo $\vec{u}_2$ perché $\vec{w}_1,\,\vec{u}_1,\,\vec{u}_2$ sono chiaramente dipendenti).

3.26. Per trovare una base di U si deve risolvere l'equazione $x+y-2z+w=0$. Si trova:

$$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Per avere l'inclusione $W_t\subseteq U$ è sufficiente che i vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ appartengano a U, ovvero che soddisfino l'equazione $x+y-2z+w=0$. Sostituendo le coordinate di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ nell'equazione indicata troviamo $1+t-2\cdot 0-4=0$ e $t-2-2\cdot 1+1=0$, quindi $t=3$.

L'intersezione non può avere dimensione 0 (questa affermazione può essere giustificata in vari modi: per la formula di Grassmann, se l'intersezione avesse dimensione 0, lo spazio somma avrebbe dimensione 3+2=5, cosa che è impossibile perché l'ambiente è $\mathbb{R}^4$; lo spazio W_t ha dimensione 2, imponendo una sola condizione, l'equazione che definisce U, la dimensione non può scendere più di uno). D'altro canto, l'intersezione ha dimensione 2 se e solo se vale l'inclusione $W_t\subseteq U$. Per quanto osservato, ciò accade se e solo se $t=3$. Ne segue che $\dim\big(U\cap W_t\big)=1$ per ogni $t\neq 3$.

Scegliamo un valore t (diverso da 3), ad esempio $t=0$, e determiniamo una base dell'intersezione $U\cap W_0$. I vettori di W_0 sono i vettori del tipo $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-2\beta\\\beta\\-4\alpha+\beta\end{pmatrix}$, dove α e β sono parametri liberi. Sostituendo le coordinate trovate nell'equazione che definisce U troviamo $\alpha-2\beta-2\beta+(-4\alpha+\beta)=0$, quindi $\beta=-\alpha$. Pertanto,

$U\cap W_0 = \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\-\alpha\\-5\alpha\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha \text{ parametro libero}\right\}$, una base di $U\cap W_0$ è $\mathcal{B}_{U\cap W_0} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

Per completare la base di $U\cap W_0$ appena trovata a una base di U si deve prendere il vettore trovato e altri due vettori di U (in modo tale da avere comunque una terna indipendente di vettori): $\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ (l'indipendenza di questi tre vettori è evidente: il primo è l'unico ad avere la seconda coordinata non nulla, quindi non è combinazione lineare di secondo e terzo, inoltre il secondo e terzo non sono proporzionali).

3.27. Risolvendo il sistema che definisce U troviamo: $w=5x+3y,\ z=6x+2y$ (con

x, y parametri liberi); $\mathcal{B}_U = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (una base di U). Sostituendo le coordinate di $\vec{w}_t$ nelle equazioni che definiscono U troviamo che queste sono soddisfatte per $t = -3$. Una base di U contenente il vettore $\vec{w}_{\tau=-3}$ è la base $\mathcal{B}'_U = \{\vec{w}_{\tau=-3},\ \vec{u}_1\}$ (naturalmente abbiamo ampia possibilità di scelta).

3.28. Lo spazio U è costituito dai vettori del tipo $r\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$, dove r ed s sono parametri liberi. Lo spazio W è il nucleo della matrice indicata nel testo, ovvero è lo spazio definito dalle equazioni cartesiane $\begin{cases} x - 6y + z - 2w &= 0 \\ -3x + 3y - 3z + w &= 0 \end{cases}$.

L'intersezione $U \cap W$ è costituita dai vettori di U che soddisfano le equazioni cartesiane di W. Sostituendo l'espressione $r\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$ nelle equazioni cartesiane di W troviamo

$$\begin{cases} (r+5s) - 6(-r+5s) + (2r-2s) - 2(9r-9s) &= 0 \\ -3(r+5s) + 3(-r+5s) - 3(2r-2s) + (9r-9s) &= 0 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} -9r - 9s &= 0 \\ -3r - 3s &= 0 \end{cases},$$

quindi, $s = -r$. Ne segue che i vettori dell'intersezione sono i vettori del tipo $r\vec{u}_1 - r\vec{u}_2$. Pertanto, il vettore $\vec{b} := \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ costituisce una base dell'intersezione $U \cap W$.

Sostituendo le coordinate del vettore $\vec{v}_t$ nelle equazioni cartesiane di W troviamo "$0 = 0$", un'identità verificata per ogni valore di t. Ne segue che $\vec{v}_t \in W$ per ogni t.

Inoltre, $\vec{v}_t \in U \cap W$ se e solo se è proporzionale a $\vec{b}$, questo accade se e solo se $t = 3$.

Gli spazi vettoriali U e W sono due piani che si incontrano lungo una retta, in particolare lo spazio somma ha dimensione 3 (formula di Grassmann). Ne segue che per completare la base di $U \cap W$ trovata precedentemente a una base di $U + W$ dobbiamo considerare $\vec{b}$ e altri due vettori, uno in U e uno in W, non proporzionali a $\vec{b}$. Ad esempio possiamo considerare $\mathcal{B}_{U+W} = \{\vec{b},\ \vec{u}_1,\ \vec{v}_{t=0}\}$ (naturalmente sono possibili molte altre scelte).

3.29. La dimensione di V_λ vale 2 per ogni λ. Infatti, ad esempio, il minore costituito da prima e terza riga della matrice associata ai generatori di V_λ indicati nel testo è invertibile per ogni λ (se preferite, basta osservare che il primo vettore è sempre non nullo e che il secondo vettore non può mai essere un multiplo del primo). Visto che le due equazioni che definiscono W sono indipendenti, lo spazio W ha dimensione 2 ($= 4 - 2$). Troviamo due generatori di W risolvendo il sistema lineare che lo definisce, mettendo insieme i generatori di V_λ e quelli di W abbiamo un insieme di generatori per lo spazio somma:

$$W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_\lambda + W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda+1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2 \\ 3 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il determinante della matrice A associata ai quattro generatori dello spazio somma vale $\det A = -9\lambda^2 + 24\lambda + 9 = -9(\lambda + \frac{1}{3})(\lambda - 3)$. Ne segue che per λ diverso da $-\frac{1}{3}$ e 3 tali generatori sono indipendenti, quindi lo spazio somma ha dimensione 4, e pertanto coincide con $\mathbb{R}^4$. Le equazioni $x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_3,\ w = t_4$ sono equazioni parametriche per lo spazio $V_\lambda + W = \mathbb{R}^4$.

Per $\lambda = -\frac{1}{3}$ e per $\lambda = 3$ risulta $\dim(V_\lambda + W) = 3$ (ha dimensione minore o uguale a 3 per l'annullarsi del determinante calcolato precedentemente, d'altro canto è evidente che i primi tre generatori sono indipendenti: primo e terzo non sono proporzionali ed il secondo non può essere una loro combinazione lineare perché è l'unico ad avere la terza coordinata non nulla). In entrambi i casi le equazioni parametriche sono (le scriviamo in forma compatta): $\vec{x} = t_1\vec{g}_1 + t_2\vec{g}_2 + t_3\vec{g}_3$, essendo $g_1,\ g_2,\ g_3$ i tre generatori in questione.

Infine, per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim(V_\lambda \cap W) = \begin{cases} 2+2-4 = 0 & \text{se} \quad \lambda \neq -1/3,\ 3 \\ 2+2-3 = 1 & \text{se} \quad \lambda = -1/3 \quad \text{oppure} \quad \lambda = 3 \end{cases}.$$

In definitiva, risulta $V_\lambda \cap W = \{\vec{0}\}$ per $\lambda \neq -\frac{1}{3},\ 3$.

3.30. Risolvendo il sistema lineare che definisce U troviamo le relazioni $x = r$, $y = s$, $z = 3r+s$, $w = -s$. Da queste otteniamo la base di U che segue:

$\mathcal{B}_U = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ associata ai vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_1$. Le prime tre colonne sono palesemente indipendenti (per ogni valore di t), quindi $\operatorname{rango} A \geq 3$, d'altro canto risulta $\det A = 3t - 6$ (non nullo per $t \neq 2$), quindi si ha $\operatorname{rango} A = 4$ per $t \neq 2$ e $\operatorname{rango} A = 3$ per $t = 2$. In definitiva:

$$\text{per } t \neq 2 \text{ si ha } \dim(U + W_t) = 4; \quad \text{per } t = 2 \text{ si ha } \dim(U + W_t) = 3.$$

Per la formula di Grassmann, poiché $\dim W_t = 2$ per ogni t, risulta:

$$\dim\big(U \cap W_t\big) = 1 \iff \dim\big(U + W_t\big) = 3 \iff t = 2.$$

Quindi, per rispondere alla domanda "c)" si deve scegliere $t' = 2$. I vettori dell'intersezione si trovano imponendo la relazione $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2$. Questo sistema si risolve facilmente, comunque non c'è bisogno di risolverlo: l'ultima equazione è l'equazione $\alpha_2 = 0$ e pertanto α_1 può essere usato come parametro libero (sappiamo a priori che l'intersezione ha dimensione 1, quindi che la coppia α_1, α_2 non può essere nulla). Ne segue che il vettore $\vec{u}_1$ genera l'intersezione, quindi $\mathcal{B}_{U \cap W_t} = \{\vec{u}_1\}$. La base $\mathcal{B}_U = \big\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\big\}$ è già un completamento della base $\mathcal{B}_{U \cap W_t} = \{\vec{u}_1\}$ trovata precedentemente.

3.31. Per studiare la dimensione di W_k calcoliamo il determinante d della matrice associata ai generatori di W_k. Si ha $d = (k+3) \cdot (2k-4)$, quindi $\dim W_k = 3$ per $k \neq -3, 2$. Questo significa che per k diverso da -3 e 2 risulta $W_k = \mathbb{R}^3$ nonché $U \cap W_k = U$, in particolare $\dim\big(U \cap W_k\big) = 2$.

Per $k = -3$ e per $k = 2$ si ha $\dim W_k \leq 2$. D'altro canto i generatori indicati nel testo non sono proporzionali (ad uno stesso vettore), quindi, in entrambi i casi W_k è un piano (ha dimensione 2). Anche U è un piano (diverso sia da W_{-3} che da W_2, in entrambi i casi lo spazio somma è tutto $\mathbb{R}^3$), quindi l'intersezione ha dimensione 1.

Scegliamo $k = -3$. L'intersezione $U \cap W_{-3}$ si determina tramite sistema lineare $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_1 = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2$ (essendo gli $\vec{u}_i$ ed i $\vec{w}_1$ i generatori di U e W_{-3}) Riducendo a scala la matrice associata a questo sistema troviamo $x_1 = \frac{1}{2}t$, $x_2 = -\frac{1}{2}t$, $y_1 = -2t$, $y_2 = t$ (con t parametro libero). Pertanto, $U \cap W_{-3} = \{-2t\vec{w}_1 + t\vec{w}_2\}_{t \in \mathbb{R}}$ è quindi generato dal vettore $-2\vec{w}_1 + \vec{w}_2$, di coordinate $-1, 1, 4$ (che ne costituisce una base dell'intersezione).

3.32. In forma parametrica, U è lo spazio di equazioni $\vec{u} = s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$. Eliminando i parametri s_1 e s_2 si trova l'equazione cartesiana $x + 2y - 3z = 0$. Sostituendo le coordinate di $\vec{v}_k$ nell'equazione cartesiana di U si trova $(k+4) + 2 \cdot (-3) - 3(k-4) = 0$, quindi $\vec{v}_{k_0} \in U$ per $k_0 = 5$. Per determinare le coordinate di $\vec{v}_{k_0}$ rispetto alla base $\big\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\big\}$ si deve risolvere il sistema $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{v}_{k_0}$. Risolvendolo si trova $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

3.33. Lo spazio W_k è lo spazio di equazione $x_1 + 2x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0$ (dove x_1, x_2, x_3, x_4 denotano le coordinate di $\mathbb{R}^4$). Una base di $W_{k=0}$ la troviamo risolvendo l'equazione $x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0$: si ha $\mathcal{B}_{W_{k=0}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i vettori forniti nel testo (costituiscono una base di U) e indichiamo con $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ i vettori della base di $W_{k=0}$ appena trovata. Un modo per determinare l'intersezione $U \cap W_{k=0}$ consiste nel risolvere il sistema lineare $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \beta_3\vec{w}_3$. Un altro metodo, quello che ora utilizzeremo, consiste nel cercare i vettori di U, cioè i vettori del tipo $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$, che soddisfano l'equazione $x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0$. Sostituendo si ottiene $(2\alpha_1 + 3\alpha_2) + 2 \cdot (-\alpha_1) + 3 \cdot (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0$, ovvero $-3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$, quindi $\alpha_1 = -t$, $\alpha_2 = t$ (essendo t un parametro libero). Questo significa che l'intersezione $U \cap W_{k=0}$ è l'insieme dei vettori del tipo $-t\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 = t(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$, quindi che il vettore

$-\vec{u}_1+\vec{u}_2$, vettore di coordinate $1,\ 1,\ 0,\ -1$, ne costituisce una base.

Per rispondere alla domanda b) possiamo procedere in molti modi, credo che il più rapido sia quello che segue. Visto che $\dim U = 2$ e $\dim W_k = 3$ (e l'ambiente è $\mathbb{R}^4$), per la formula di Grassmann ci sono solo due possibilità: o si intersecano in una retta oppure W_k contiene U. Sostituendo le coordinate di $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ nell'equazione $x_1+2x_2+kx_3+3x_4 = 0$ si trova rispettivamente $2+2\cdot(-1)+k\cdot 1+3\cdot(-1) = 0$ e $3+k+3\cdot(-2) = 0$. Da entrambe le equazioni si trova $k=3$. Quindi $W_k \supseteq U$ per $k=3$ (è un "se e solo se"), in questo caso l'intersezione ha dimensione 2. Per $k \neq 3$ l'intersezione è una retta (ha dimensione 1).

Si poteva procedere anche nel seguente modo: sostituendo le coordinate di $\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2$ (generico vettore di U) nell'equazione $x_1+2x_2+kx_3+3x_4 = 0$ si trova $k\cdot(\alpha+\beta) = 3\cdot(\alpha+\beta)$. Le soluzioni di questo sistema (sistema in α e β), per $k\neq 3$ dipendono da un parametro libero ($\Rightarrow$ $\dim U\cap W_k = 1$) e, per $k=3$ dipendono da 2 parametri liberi ($\Rightarrow$ $\dim U\cap W_k = 2$).

3.34. Riducendo a scala la matrice associata ai generatori dello spazio U dati nel testo (che, nell'ordine, indichiamo con $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ si trova la relazione $\vec{u}_3 = \vec{u}_1+2\vec{u}_2$ (mentre $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono indipendenti). Quindi, le relazioni

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \text{ovvero le relazioni} \quad \begin{cases} x &= \alpha\\ y &= 0\\ z &= \alpha\\ w &= \beta\end{cases},$$

sono equazioni parametriche per lo spazio U. Eliminando i parametri α e β si trovano le equazioni cartesiane $\begin{cases} x-z = 0\\ y = 0\end{cases}$. Lo spazio W_k ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x+kz = 0\\ w = 0\end{cases}$ (la terza riga della matrice indicata nel testo è la somma delle due righe che la precedono, per questo motivo abbiamo omesso di scrivere la corrispondente equazione).

Un sistema di equazioni cartesiane per l'intersezione $U\cap W_k$ (indicato a lato) lo troviamo mettendo a sistema le equazioni cartesiane di U con quelle di W_k.

$$\begin{cases} x-z &= 0\\ y &= 0\\ x+kz &= 0\\ w &= 0\end{cases}$$

Si evince chiaramente che ci sono due possibilità:

$\underline{k=-1.}$ In questo caso il sistema si riduce a tre equazioni indipendenti (prima e terza equazione coincidono), pertanto $\dim U\cap W_k = 4-3 = 1$.

$\underline{k\neq -1.}$ In questo caso abbiamo 4 equazioni indipendenti, quindi $\dim U\cap W_k = 0$.

Il caso in cui $k=0$ rientra nell'ultimo considerato, l'unico vettore appartenente all'intersezione $U\cap W_k$ è il vettore nullo (non c'è nessuna base da scrivere).

3.35. Poiché, per definizione, $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$, l'insieme $\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$ genera W. Resta da verificare che questo è un insieme indipendente di vettori. Sostituendo le espressioni che definiscono $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ nella relazione $\alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2 = \vec{0}$ si ottiene $\alpha(3\vec{v}_1-2\vec{v}_2)+\beta(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{0}$, ossia si ottiene $(3\alpha+\beta)\vec{v}_1+(-2\alpha+\beta)\vec{v}_2 = \vec{0}$. D'altro canto i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono indipendenti, quindi si deve avere $3\alpha+\beta = 0,\ -2\alpha+\beta = 0$, ossia $\alpha=\beta=0$. Questo dimostra che l'unica combinazione lineare di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ che dà i vettore nullo è la combinazione di coefficienti nulli, quindi che $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ sono indipendenti.

Per rispondere alla domanda **b)** risolviamo il sistema $\alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2 = \vec{v}_1$:

$$\alpha(3\vec{v}_1-2\vec{v}_2)+\beta(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \Rightarrow (3\alpha+\beta)\vec{v}_1+(-2\alpha+\beta)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha+\beta = 1\\ -2\alpha+\beta = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$\alpha = \frac{1}{5},\ \beta = \frac{2}{5}$. Questi valori sono le coordinate di $\vec{v}_1$ rispetto alla base $\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$ di W.

Inciso. È possibile rispondere alla domanda **a)** osservando che sia $\vec{v}_1$ che $\vec{v}_2$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, quindi W ha almeno dimensione 2, quindi $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ non possono essere dipendenti.

3.36. a) Per $c\neq 0$, l'insieme W non contiene il polinomio nullo, quindi non può essere un sottospazio vettoriale di V.

Per $c = 0$, dati due polinomi $p(x)$, $q(x)$ e due costanti α, β, si ha $(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0$, pertanto, in questo caso, W è un sottospazio vettoriale di V.

b) Il sistema lineare che definisce W non è un sistema lineare omogeneo (il secondo termine noto è 1), quindi, W non è un sottospazio vettoriale di V ($\forall\ c$).

3.37. **a)** Poiché una combinazione lineare di polinomi che si annullano in c si annulla anch'essa in c, W è un sottospazio vettoriale di V per ogni c.
b) W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se il sistema (lineare) che lo definisce è omogeneo, ciò accade se e solo se $c = 0$.

3.38. **a)** I vettori $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ generano il loro *Span*, proviamo che sono indipendenti: $\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = 0 \implies (-2\lambda - 2\mu)\vec{v}_1 + 3\lambda\vec{v}_2 + 5\mu\vec{v}_3 = 0 \implies \lambda = \mu = 0$ (essendo i $\vec{v}_i$ indipendenti). L'insieme $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_4\}$ è un possibile completamento.
b) Coordinate: $0,\ -1,\ 0,\ 1$.

4.2. C'è una corrispondenza biunivoca tra matrici $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ e applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (cfr § 12). Data un'applicazione lineare L, se consideriamo la matrice associata A nonché il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ abbiamo:

$$\dim\text{“dominio”} = \text{“\# incognite”}; \quad \dim\ker L_A = \#\text{ p.l.}\ ; \quad \dim\operatorname{Im} L_A = \operatorname{rango} A$$

Queste uguaglianze riducono la formula ($\star$) alla formula concernete i sistemi lineari (10.25′).

4.4. Risulta: $\dim\operatorname{Im} L = 3$, $\dim\ker L = 8-3 = 5$.

4.5. Risulta $\dim\ker L \geq 9\text{–}4 = 5$. Quindi: $\dim(\ker L \cap W) = \dim\ker L + 7 - 9 \geq 5 - 2 = 3$.

4.14. Cerchiamo i valori di t per i quali risulta $A_t \cdot \vec{v}_t = \vec{0}$. Si ha $A_t \cdot \vec{v}_t = \begin{pmatrix} t^2 - t - 6 \\ t^2 - t - 6 \end{pmatrix}$, quindi $\vec{v}_t \in \ker A_t$ se e solo se $t = -2$ oppure $t = 3$.
Scegliamo uno dei due valori, ad esempio $t = -2$. Il nucleo di A_{-2} è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $A_t \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (dove per abuso di notazione, denotiamo con A_t anche la matrice che rappresenta “l'applicazione lineare A_t”), risolvendolo si trova
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15r + 17s \\ 7r + 6s \\ -r \\ -2s \end{pmatrix}$ (r, s sono parametri liberi), quindi $\mathcal{B}_{\ker A_{-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
L'immagine di A_{-2} ha dimensione 2 ($= 4-2$), ovvero A_{-2} è suriettiva. Quindi, qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ (ad esempio, anche la base canonica) è una base di $\operatorname{Im} A_{-2}$.

4.19. Poniamo $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Poiché $L(\vec{u}) = L(\vec{v})$, si ha $L(\vec{u} - \vec{v}) = L(\vec{u}) - L(\vec{v}) = \vec{0}$. Ne segue che $\vec{u} - \vec{v} \in \ker L$. Analogamente, poiché $L(\vec{v}) = -3L(\vec{w})$, si ha $\vec{v} + 3\vec{w} \in \ker L$.
Quindi, $\ker L \supseteq \operatorname{Span}\{\vec{u} - \vec{v},\ \vec{v} + 3\vec{w}\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$. D'altro canto il nucleo di L non può avere dimensione 3 (se $\ker L$ avesse dimensione 3, si avrebbe $\ker L = \mathbb{R}^3$ ed L sarebbe l'applicazione nulla), pertanto è uguale a tale “Span” ed i due vettori indicati ne costituiscono una base.

Conosciamo $L(\vec{u})$, $L(\vec{v})$ e $L(\vec{w})$, quindi siamo in grado di calcolare l'immagine di qualsiasi combinazione lineare di questi tre vettori: $L\big(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}\big) = \lambda L(\vec{u}) + \mu L(\vec{v}) + \nu L(\vec{w}) = \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \big(\lambda + \mu - \frac{1}{3}\nu\big)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Poiché $\vec{e}_1 = \frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v} + \frac{1}{5}\vec{w}$ (i coefficienti $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{5}$ si determinano risolvendo il sistema lineare $\vec{e}_1 = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$), si ha $L(\vec{e}_1) = \big(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15}\big)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/15 \\ 8/3 \end{pmatrix}$.

Per determinare la matrice A che rappresenta L è sufficiente calcolare $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ ed $L(\vec{e}_2)$ (il primo lo abbiamo già calcolato, gli altri due si determinano in modo analogo), infatti sappiamo che le colonne di A sono costituite dalle immagini dei vettori della base canonica.

4.20. Il nucleo di L_B è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$. La composizione $L_A \circ L_B$ (che indicherò con ϑ) è rappresentata dalla matrice $A \cdot B$. Una base del nucleo di L_B, l'immagine $L_A \circ L_B(\vec{v})$, una base del nucleo e una dell'immagine di $L_A \circ L_B$ sono rispettivamente:

$$\mathcal{B}_{\ker B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \ \vartheta(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 60 \\ -40 \end{pmatrix}, \ \mathcal{B}_{\ker \vartheta} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\vartheta} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.21. Il nucleo $\ker L_A$ è l'insieme dei vettori $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Le righe di A sono proporzionali e questo sistema si riduce alla sola equazione $3x - y + 4z = 0$, risolvendola troviamo una base del nucleo di L_A: $\mathcal{B}_{\ker L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

L'immagine di L_A è generata dalle colonne di A (che corrispondono alle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$), estraendo dall'insieme di tali colonne un sottoinsieme massimale di vettori indipendenti si trova una base di $\mathrm{Im} L_A$: $\mathcal{B}_{ImL_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Scelto $\vec{k} \in \mathrm{Im} L_A$, basta trovare due soluzioni del sistema $A\vec{x} = \vec{k}$ (o trovarne una e sommarci un vettore non nullo del nucleo di L_A). In realtà non si deve risolvere nessun sistema! Piuttosto che scegliere un vettore nell'immagine, scegliamo un vettore nel dominio (avente immagine non nulla), ad esempio $\vec{e}_1$ (primo vettore della base canonica), quindi poniamo $\vec{k} = L(\vec{e}_1)$. Preso un vettore $\vec{b} \in \ker L_A$ si avrà $L_A(\vec{e}_1) = L_A(\vec{e}_1 + \vec{b}) = \vec{k}$:

$$L_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = L_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ (il nostro } \vec{k}\text{), essendo } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{b}.$$

4.22. Riducendo a scala la matrice completa associata al sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{v}$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ -7 & -7 & 1 & 6 & t{+}3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & -7 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 21 & 36 & 48 & t{+}38 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & -7 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t{-}4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il sistema è compatibile, equivalentemente $\vec{v} \in \mathrm{Im} L$, se e solo se $t = 4$.

Per $t = 4$, dobbiamo trovare un vettore $\vec{w}$ che soddisfa la relazione $L(\vec{w}) = \vec{v}$, ovvero dobbiamo trovare una soluzione $\vec{w}$ del sistema $A \cdot \vec{w} = \vec{v}$. Dalla riduzione a scala effettuata (sostituendo $t = 4$) troviamo il vettore $\vec{w}$ di coordinate $-3,\ 2,\ 0,\ 0$. **Nota:** ci viene chiesta una soluzione, non di trovarle tutte, quindi i parametri liberi incontrati nel risolvere il sistema li scegliamo nulli (come più ci piacciono, cioè in modo da non dover fare conti).

4.23. Il nucleo $\ker L_t$ ha dimensione 2 se la matrice A_t ha rango 1 (=3-2), ovvero se le sue righe (equivalentemente, colonne) sono proporzionali. Questo chiaramente accade solo per $t = 7$.

Per definizione, $\vec{w} \in \ker L_7$ se e solo se $A_7 \cdot \vec{w} = \vec{0}$. Imponendo l'equazione $A_7 \cdot \vec{w} = \vec{0}$ si trova $10 + 5m = 0$, quindi $m = -2$.

4.24. Effettuiamo la riduzione a scala della matrice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 12 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo $\ker L_A$ è descritto dall'equazione $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. La riduzione a scala effettuata ci permette di scrivere un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per il nucleo di L_A nonché una base per tale nucleo:

$$\text{equaz. cart. di } \ker L_A : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} ; \qquad \mathcal{B}_{\ker L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'immagine di L_A è generata dalle colonne di A, una base la troviamo considerando le colonne corrispondenti ai *pivot* della riduzione a scala effettuata:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(i due vettori li indicheremo con } \vec{b}_1,\, \vec{b}_2\text{).}$$

Eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche $\vec{y} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2$ si trova che l'immagine di L_A è descritta dall'equazione cartesiana $3y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

4.25. I tre vettori sono dipendenti (il determinante della matrice associata è nullo, si ha $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$) , il loro Span ha dimensione 2.

a) Il dominio di L è $\mathbb{R}^4$ (ha dimensione 4), ma $\dim kerL + dim \operatorname{Im} L = 1 + 2 = 3$. Ne segue che una tale L non esiste.

b) Una possibile applicazione M è quella rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (un'altra soluzione è data dalla matrice associata ai tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

c) Poniamo $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. Le colonne devono essere proporzionali a $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, quindi si deve avere $\alpha = -2a$, $\beta = -2b$, $\gamma = -2c$. La condizione $kerT = \operatorname{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ si traduce nelle condizioni $a - b + c = 0$, $b + c = 0$, $\dim \ker T = 2$. Una applicazione T che soddisfa le condizioni date (corrispondente alla soluzione $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$) è l'applicazione rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

4.26. Ricordiamo che "l'immagine è lo *Span* delle colonne".

a) Basta prendere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

b) una tale B non esiste: $\operatorname{Im} B$ ha dimensione 2, $\ker B$ ha dimensione 0 (perché B è iniettiva) e la somma di queste dimensioni dovrebbe essere uguale a 3 (la dimensione del dominio);

c) devo trovare una matrice $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ di rango 2 (la dimensione del codominio) tale che la combinazione lineare di coefficienti 1, -2, 3 delle colonne è il vettore nullo (a tale fine basta prendere la prima colonna uguale al doppio della seconda meno il triplo della terza). Ad esempio $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) visto che $\operatorname{Im} D = \operatorname{Span}\{\vec{v}\}$ (ha dimensione 1), le colonne della matrice D devono essere tutte proporzionali a $\vec{v}$. Quindi D deve essere una matrice del tipo $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$ (con a, b, c non tutti nulli). La matrice, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni richieste. Infatti, affinché sia soddisfatta la condizione $\ker D = \operatorname{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ si deve avere $D \cdot \vec{v} = \vec{0}$ nonché $D \cdot \vec{w} = \vec{0}$, ovvero $a - 2b + 3c = 0$ e $-b + 2c = 0$. Risolvendo il sistema costituito da queste due equazioni troviamo $b = 2c$, $a = c$ (c parametro libero). Una soluzione non nulla, che otteniamo ponendo $c = 1$, è la soluzione $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$. A questi valori corrisponde la matrice D indicata.

4.27. Il nucleo di L_A è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Questo sistema è particolarmente semplice (nelle prime due equazioni compaiono solamente x_1 e x_2, nella terza e quarta equazione compaiono solamente x_3 e x_5). Si trova $x_3 = x_5 = 0$ e $x_2 = -3x_1$ (x_1 e x_4 sono parametri liberi). L'immagine di L_A è lo "span" delle colonne di A (visto il lavoro fatto sul sistema, una base di $\mathrm{Im}\,L_A$ è data dalla seconda colonna di A, terzo e quarto vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$). In definitiva, le basi richieste sono rispettivamente

$$\mathcal{B}_{\ker A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\-3\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cerchiamo una matrice (2 righe e 4 colonne) $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ il cui nucleo sia uguale all'immagine di A. Questo significa che B deve soddisfare le condizioni $a + 2b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ (come pure $\alpha + 2\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$) e deve avere rango $4-3 = 1$. Ad esempio, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (in effetti abbiamo ampia possibilità di scelta).

La composizione $L_B \circ L_A$ è rappresentata dalla matrice nulla (2 righe, 5 colonne). Non serve svolgere il prodotto: avendo $\ker L_B = \mathrm{Im}\,L_A$, tutti i vettori dell'immagine di A vanno a 0 in quanto vettori del nucleo di B.

Quanto a L_C abbiamo di nuovo ampia possibilità di scelta (cerchiamo una matrice 5×4 di rango 4). Ad esempio, la matrice indicata qui a lato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La risposta all'ultima domanda è "**si**". Infatti, essendo L_C iniettiva, un vettore che non appartiene al nucleo di L_A non può andare a zero tramite $L_C \circ L_A$ (questo dimostra l'inclusione $\ker L_A \supseteq \ker\, L_C \circ L_A$, l'altra inclusione è ovvia).

4.28. Riducendo a scala la matrice associata ad A troviamo
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -8 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Risolvendo il sistema associato troviamo $x_1 = 4t_3 + 2t_1$, $x_2 = t_3$, $x_3 = t_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = t_1$, quindi troviamo la base $\mathcal{B}$ indicata a lato.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si ha $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -8 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_t = \begin{pmatrix} -t+6 \\ 2t-12 \end{pmatrix}$, quindi $\vec{v}_t \in \ker A$ per $t = 6$ (questo risultato lo si può trovare anche usando la base $\mathcal{B}$ ma si fanno più calcoli).

Le coordinate α, β, γ di $\vec{v}_6$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date dalla soluzione del sistema $\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{v}_6$ (dove $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sono i tre vettori di $\mathcal{B}$). Risolvendo questo sistema si trova $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$.

4.29. La matrice associata alla composizione $L_A \circ L_B$ è il prodotto $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Risulta, $L_A \circ L_B(\vec{v}_k) = A \cdot B \cdot \vec{v}_k = \binom{2k+6}{k+3}$. Il vettore trovato si annulla (solo) per $k = -3$. Pertanto, il valore -3 è l'unico valore di k per il quale $\vec{v}_k \in \ker\big(L_A \circ L_B\big)$.

L'immagine di L_B è lo "Span" delle colonne della matrice B, per trovare un vettore che appartiene all'immagine di L_B ma che **non** appartiene al nucleo di L_A è sufficiente scegliere una colonna di B e osservare che non appartiene al nucleo di L_A (è evidente che una qualsiasi di tali colonne soddisfa le condizioni richieste).

5.4. Poiché $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, si ha $T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, quindi il vettore $\vec{u} - \vec{v}$ appartiene al nucleo di T. Inoltre, $\vec{u} + \vec{v}$ appartiene all'immagine di T (ce lo dice il testo). Per ragioni di dimensione, i vettori indicati generano rispettivamente nucleo e immagine di T. In definitiva: $\ker T = \mathrm{Span}\{\vec{u} - \vec{v} = \binom{0}{-1}\}$, $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Span}\{\vec{u} + \vec{v} = \binom{2}{3}\}$.

La matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica può essere trovata effettuando un cambiamento di base. Denotando con C la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ (nelle colonne di C troviamo le coordinate di $T(\vec{u})$ e $T(\vec{v})$ rispetto alla base $\mathcal{B}$) abbiamo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5. Le matrici dell'esercizio sono tutte diagonalizzabili. Di seguito riportiamo le matrici della diagonalizzazione $A = B\cdot\Delta\cdot B^{-1}$ (naturalmente si ha $\Lambda = \Delta$, $C = B^{-1}$). Una base di autovettori è data dalle colonne di B, gli autovalori sono i valori della diagonale di Δ, le molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore sono uguali al numero delle volte che esso compare in tale diagonale. I vettori (tra quelli del testo) che sono autovettori sono indicati a destra, dove viene indicato anche il calcolo di $A^{19}\cdot\vec{w}$.

$$i)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A\cdot\vec{v} = -7\vec{v} \\ A^{19}\cdot\vec{w} = A^{19}\cdot(\vec{b}_2+\vec{b}_3) = -7^{19}\vec{b}_2+2^{19}\vec{b}_3 \end{cases};$$

$$ii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A\cdot\vec{v} = 3\vec{v} \\ A^{19}\cdot\vec{w} = A^{19}\cdot(\vec{b}_1+\vec{b}_3) = 3^{19}\vec{b}_1-8^{19}\vec{b}_3 \end{cases};$$

$$iii)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A\cdot\vec{u} = 4\vec{u} \\ A^{19}\cdot\vec{w} = A^{19}\cdot(3\vec{b}_2+\vec{b}_3) = 3\cdot4^{19}\vec{b}_2-3^{19}\vec{b}_3 \end{cases};$$

$$iv)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A\cdot\vec{v} = \vec{v},\ A\cdot\vec{u}_5 = \vec{u}_5 \\ A^{19}\cdot\vec{w} = A^{19}\cdot(2\vec{b}_1+\vec{b}_3) = 2\vec{b}_1-\vec{b}_3 \end{cases};$$

$$v)\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A\cdot\vec{v} = 2\vec{v},\ A\cdot\vec{u}_5 = -\vec{u}_5 \\ A^{19}\cdot\vec{w} = A^{19}\cdot(\vec{b}_2-\vec{b}_3) = 2^{19}\vec{b}_2+\vec{b}_3 \end{cases};$$

5.6. Il testo ci fornisce le relazioni $T(\vec{z}) = 2\vec{v}$, $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$, $T(\vec{w}) = -5\vec{w}$. In particolare, poiché $T(\vec{z}) = T(\vec{v})$, si ha $T(\vec{z}-\vec{v}) = \vec{0}$, ovvero $\vec{z}-\vec{v} \in \ker T$ (pertanto, $\dim\ker T \geq 1$). L'immagine di T contiene gli autovettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (quindi, $\dim\operatorname{Im}T \geq 2$). Per ragioni di dimensione ($\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T = 3$) si deve avere $\dim\ker T = 1$ e $\dim\operatorname{Im}T = 2$. Pertanto: $\mathcal{B}_{\ker T} = \{\vec{z}-\vec{v}\} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}T} = \{\vec{v}, \vec{w}\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ sono rispettivamente una base del nucleo e una base dell'immagine di T.

Osserviamo che anche il vettore $\vec{z}-\vec{v}$ è un autovettore (relativamente all'autovalore $\alpha = 0$). Quindi l'insieme $\{\vec{z}-\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ è una base di autovettori per T. In definitiva: $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B}_{autovettori} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sono rispettivamente una matrice diagonale e una base di $\mathbb{R}^3$ come richiesto al punto "**b)**".

La matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica è la matrice fornita dalla formula del cambiamento di base:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nota. Si può procedere anche in altri modi. Ad esempio, dalle relazioni $T(\vec{z}) = 2\vec{v}$, $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$, $T(\vec{w}) = -5\vec{w}$ si deduce qual è la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Il cambiamento di base che fa passare dalla base $\mathcal{B}'$ alla base canonica fornisce anch'esso la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica (com'è giusto che sia, il risultato coincide con quello trovato sopra).

5.8. $P_A(\lambda) \;=\; \det(A-\lambda I) \;=\; \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & -6 & 4 \\ -3 & 2-\lambda & -6 \\ -5 & -15 & 3-\lambda \end{pmatrix} \;=\; -\lambda^3 + 147\,\lambda + 686\,.$

Per rispondere alla domanda "b)" determiniamo il nucleo della matrice

$$M \;=\; A-(-7)I \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \\ 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\ker M \;=\; \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| M\vec{v} = \vec{0}\right\}$, le tre equazioni del sistema lineare $M\vec{v} = \vec{0}$ si riducono ad una sola (sono tutte proporzionali tra loro), l'equazione $x-3y+2z = 0$ (dove x, y, z denotano le coordinate di $\vec{v}$). Risolvendo questa equazione troviamo che una base di $\ker M$ è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Poiché $\ker M$ "è non banale" (cioè contiene vettori non nulli), abbiamo dimostrato che $\lambda = -7$ è un autovalore di L_A e che $\mathcal{B}$ è una base dell'autospazio relativo all'autovalore -7 (naturalmente si può rispondere alla prima parte della domanda osservando che -7 annulla il polinomio caratteristico, ma visto che una base del corrispondente autospazio dovevamo calcolarla comunque...).

In generale, se $L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, si ha $\underbrace{L\circ ... \circ L}_{k-volte}\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Ne segue che $\lambda = (-7)^3 = -343$ è un autovalore di $L_A\circ L_A\circ L_A$ e che il corrispondente autospazio W contiene i due vettori in $\mathcal{B}$, nonché tali vettori costituiscono una base di W. Per dimostrare quanto abbiamo appena affermato è sufficiente osservare che W non può essere tutto $\mathbb{R}^3$: la trasformazione L_A, quindi anche la composizione $L_A\circ L_A\circ L_A$, ha un altro autovalore: non serve determinarlo, basta osservare che $P_A(\lambda) \neq -(\lambda+7)^3$, comunque $P_A(\lambda) = -(\lambda+7)^2(\lambda-14)$.

5.9. Cerchiamo i vettori $\vec{x}$, tra quelli indicati, per i quali il prodotto $A\vec{x}$ è un multiplo di $\vec{x}$.

Si ha $A\vec{u} = 11\vec{u}$ e $A\vec{w} = 2\vec{w}$. Mentre $A\vec{v}$ non è un multiplo di $\vec{v}$. I valori 11 e 2 sono rispettivamente gli autovalori corrispondenti agli autovettori $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

L'autospazio relativo all'autovalore 11 è il nucleo della matrice $A-11I = \begin{pmatrix} -13 & -8 & 6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -12 & 0 \end{pmatrix}$.

Questa matrice, non avendo le righe proporzionali tra loro, ha rango 2 (non può avere rango 3, se avesse rango 3, il valore 11 non sarebbe un autovalore). Pertanto, visto che $\vec{u}$ appartiene all'autospazio V_{11} associato all'autovalore 11, l'insieme $\{\vec{u}\}$ è una base di V_{11}.

Quanto all'autospazio V_2 risulta:

$V_2 \;=\; \ker(A-2I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} -4 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ed i due vettori indicati costituiscono una base di V_2 (si noti che le righe della matrice indicata sono proporzionali, quindi V_2 è descritto dall'equazione cartesiana $2x_1+4x_2-3x_3 = 0$.

5.10. Il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 21 & -10-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+7\lambda+12$. Gli autovalori di A sono i valori che annullano il polinomio caratteristico, quindi si trovano risolvendo l'equazione $\lambda^2+7\lambda+12 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -4$. Quanto ai relativi autospazi e loro basi abbiamo:

$V_{-3} \;=\; \ker(A+3I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 21 & -7 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\};\;\; \mathcal{B}_{V_{-3}} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\};$

$V_{-4} \;=\; \ker(A+4I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right\};\;\; \mathcal{B}_{V_{-4}} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}.$

Si ha $A\cdot A\cdot(3\vec{e}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 21 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 21 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 21 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 \\ -441 \end{pmatrix}.$

Sappiamo che $B\,\vec{v} = 2\vec{v}$ nonché $B\,\vec{w} = 2\vec{w}$. Poiché $\vec{v}$ e $\vec{w}$ generano $\mathbb{R}^2$, per ogni vettore

$\vec{x}$ si ha $B\vec{x} = 2\vec{x}$. Ne segue che B è il doppio della matrice identica, i.e. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.11. Si ha, $L(\vec{v}_1) = -7\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -21 \end{pmatrix}$, $L(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $L(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Inoltre, $P_L(\lambda) = (-7-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 29\lambda - 42$.

I vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono indipendenti (non potrebbe essere altrimenti, visto che sono autovettori relativi ad autovalori distinti) e la trasformazione L è invertibile (il determinante della matrice associata, rispetto ad una qualsiasi base, è il prodotto degli autovalori -42). Ne segue che il nucleo $\ker L$ è costituito solamente dal vettore nullo, mentre l'immagine di L è tutto $\mathbb{R}^3$ (una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la base canonica, è una base di $\mathrm{Im}\,L$).

Per calcolare $L(\vec{e}_1)$ conviene scrivere $\vec{e}_1$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, questo perché conosciamo $L(\vec{v}_1)$, $L(\vec{v}_2)$ e $L(\vec{v}_3)$. Risolvendo il sistema lineare $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{e}_1$ troviamo $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, quindi:

$$L(\vec{e}_1) = L(-\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = -L(\vec{v}_1) - 2L(\vec{v}_2) + L(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

5.12. Poiché $L(\vec{u}) = L(\vec{w})$, il vettore $\vec{u} - \vec{w}$ appartiene al nucleo di L (pertanto $\ker L$ ha almeno dimensione 1). I vettori $L(\vec{v}_1) = -6\vec{v}_1$ e $L(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$ appartengono all'immagine di L (che pertanto ha almeno dimensione 2). Ne segue che le dimensioni di nucleo e immagine di L sono rispettivamente 1 e 2 (infatti, oltre alle relazioni $\dim\ker L \geq 1$ e $\dim\mathrm{Im}\,L \geq 2$, vale la relazione $\dim\ker L + \dim\mathrm{Im}\,L = 3$). In definitiva, una base del nucleo e una base dell'immagine di L sono rispettivamente:

$$\mathcal{B}_{\ker L} = \{\vec{u} - \vec{w}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

I valori $0, -6, 2$ sono le 3 radici del polinomio caratteristico di L, quindi $P_L(\lambda) = -\lambda(-6-\lambda)(2-\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 12\lambda$. Infine, $L^3(\vec{v}_1) = (\lambda_1)^3\vec{v}_1 = -216\,\vec{v}_1$.

5.13. Si ha $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda - 36) = (5-\lambda)(\lambda+9)(\lambda-4)$.

Ne segue che gli autovalori cercati sono 5, -9 e 4. Per quel che riguarda i corrispondenti autospazi abbiamo

$V_5 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & -11 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_{V_5} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $V_{-9} = \ker \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_{V_{-9}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$;

$V_4 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_{V_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (si osservi che i sistemi lineari che definiscono questi nuclei sono veramente banali, si risolvono "a occhio"!).

Infine, indicata con C la matrice associata a una base di autovettori, la matrice $C^{-1}\cdot A\cdot C$ è la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori. Pertanto, posto

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, si ha $\Delta = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, quindi $M = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & -5/13 \\ 0 & 2/13 & 1/13 \end{pmatrix}$.

5.14. L'immagine ha dimensione maggiore o uguale a 2, infatti contiene i vettori $-3\vec{z}$ e $2\vec{v} + \vec{w}$.

Poiché $L(\vec{v}) = L(\vec{w})$, il nucleo contiene il vettore $\vec{v} - \vec{w}$, in particolare ha dimensione maggiore o uguale a 1. In quanto il dominio di L ha dimensione 3, ne segue che immagine e nucleo di L hanno rispettivamente dimensione 2 e 1 ed i vettori indicati ne costituiscono delle basi: $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,L} = \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ 2\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathcal{B}_{\ker L} = \left\{ \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

In quanto il nucleo di L è non banale, già abbiamo un autovalore e un autovettore: l'autovalore è 0 e l'autovettore è $\vec{v}-\vec{w}$.

I vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Dalle relazioni $L(\vec{v}) = -3\vec{z}$, $L(\vec{w}) = -3\vec{z}$, $L(\vec{z}) = 2\vec{v}+\vec{w}$, abbiamo che L, rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$, è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ e pertanto si ha $P_L(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -3 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda$ (il polinomio caratteristico di una trasformazione lineare può essere calcolato usando la matrice rappresentativa relativa ad una base arbitraria: non dipende dalla base scelta).

Per determinare le immagini della base canonica di $\mathbb{R}^3$, ovvero per determinare la matrice A che rappresenta L rispetto alla base canonica, si deve effettuare un cambiamento di base:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -51 & 90 & 30 \\ -5 & 9 & 3 \\ -72 & 126 & 42 \end{pmatrix}.$$

In definitiva, $L(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -51 \\ -5 \\ -72 \end{pmatrix}$, $L(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 90 \\ 9 \\ 126 \end{pmatrix}$, $L(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 42 \end{pmatrix}$.

Nota. Un altro metodo (ma che in effetti è equivalente a quello usato) consiste nello scrivere $\vec{e}_1$ (stessa cosa per $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$) come combinazione lineare di $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, quindi di usare l'espressione trovata per determinare l'immagine di $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_1 = 2\vec{v} + 0\vec{w} - 5\vec{z} \implies L(\vec{e}_1) = L(2\vec{v} + 0\vec{w} - 5\vec{z}) = 2L(\vec{v}) - 5L(\vec{z}).$$

5.15. La matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è la matrice le cui colonne sono costituite dalle coordinate di $L(\vec{u})$ e $L(\vec{u})$ rispetto alla base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Quindi, tale matrice è la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si ha $P_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$ (il polinomio caratteristico di L può essere determinato utilizzando la matrice rappresentativa rispetto ad una base arbitraria, non dipende dalla base scelta della base). Poiché $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$, i valori 2 e -1 sono autovalori della trasformazione L. Ora, si deve effettuare un cambio di base: posto $C = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (matrice delle coordinate di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$), la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è la matrice

$$B = C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.16. Si ha $P(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -18 & -7-\lambda \end{pmatrix} =$

$$(9-\lambda)^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -18 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)^2(\lambda^2 - \lambda - 2) = (9-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Ne segue che i valori 9, 2, -1 sono autovalori di A, rispettivamente di molteplicità algebrica 2, 1, 1. I corrispondenti autospazi sono

$$V_9 = \ker\big(A - 9I\big) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -18 & -16 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\};$$

$$V_2 = \ker\big(A - 2I\big) = \ker\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\};$$

$$V_{-1} \;=\; \ker\big(A+I\big) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -18 & -6 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Le molteplicità geometriche dei tre autovalori di L_A, che per definizione sono le dimensioni dei corrispondenti autospazi, sono tutte uguali a 1 (si osservi che l'autovalore 9 ha molteplicità algebrica uguale a 2 e molteplicità geometrica uguale a 1). Poiché la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale a 3, non esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di L_A, cioè L_A non è diagonalizzabile. Quindi, non esistono due matrici C e Δ che soddisfano le condizioni richieste.

5.17. Cerchiamo un valore t che soddisfa la seguente condizione: $\exists\,\lambda\,|\,A_t\cdot\vec{v} \;=\; \lambda\vec{v}$. Questa condizione dà $t=-2$ (nonché $\lambda=4$) Quindi $\vec{v}$ è un autovettore di A_t per $t=-2$ ed il corrispondente autovalore è $\lambda=4$. Poniamo $A \;=\; A_{t=-2}$. L'autospazio associato all'autovalore $\lambda=4$ è il nucleo della matrice $A-4I$. Si ha

$$\ker(A-4I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 & -9 \\ 6 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

(si osservi che le righe della matrice indicata sono tutte proporzionali tra loro, quindi il sistema associato alla matrice si riduce a una sola equazione, l'equazione $2x+y-z+3w=0$).

A questo punto abbiamo trovato un autovalore ($\lambda=4$) di molteplicità geometrica 3 e di molteplicità algebrica maggiore o uguale a 3. Se la matrice è diagonalizzabile esiste un altro autovalore, che indichiamo con μ, e la traccia della matrice è uguale alla somma degli autovalori (quindi $4+4+4+\mu \;=\; \mathrm{tr}\,A \;=\; -2+7+3+1 \;=\; 9$, ovvero $\mu \;=\; -3$).

Segue che $\mu \;=\; -3$ è effettivamente un autovalore e che le molteplicità algebriche (e geometriche) di $\lambda=4$ e $\mu=-3$ sono rispettivamente 3 e 1 (questo perché la somma di tali molteplicità non può essere maggiore di 4).

Si ha $\ker(A-\mu I) \;=\; \ker(A+3I) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -9 \\ 6 & 10 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

(l'autovettore lo troviamo risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice indicata).

In definitiva, A è diagonalizzabile nonché le matrici C e Δ richieste sono rispettivamente la matrice di una base di autovettori e la matrice diagonale associata ai corrispondenti autovalori:

$$C \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.18. Calcolando il prodotto $A\vec{v}_t$ si trova che questo è un multiplo di $\vec{v}_t$ per $t=2$ (nonché si trova $\lambda=-5$): $\vec{v}_2$ è un autovettore di A, di autovalore $\lambda=-5$.

L'autospazio associato all'autovalore $\lambda \;=\; -5$ è il nucleo della matrice $A+5I$, ovvero è lo spazio delle soluzioni dell'equazione $2x-3y-z \;=\; 0$ (le righe della matrice $A+5I$ sono tutte proporzionali alla riga $(2\;\;-3\;\;-1)$). Risolvendo questa equazione troviamo una base dell'autospazio V_{-5}: $\mathcal{B}_{V_{-5}} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Questo significa che V_{-5} ha dimensione 2, ovvero $\mu_g(-5)=2$ (molteplicità geometrica).

Se la matrice A è diagonalizzabile, anche la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda=-5$ deve essere uguale a 2 nonché la somma degli autovalori deve essere uguale a -24 (che è la traccia della matrice A). In questo caso c'è un altro autovalore, che indicheremo con ν, ed è dato dall'equazione $-24 \;=\; -5-5+\nu$, dalla quale troviamo $\nu \;=\; -14$, quindi l'autovalore -14 avrà molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1 e -5 avrà effettivamente molteplicità algebrica uguale a 2 (la somma delle molteplicità, di quelle algebriche come pure di quelle geometriche, non può superare 3). L'autospazio V_{-14} associato all'autovalore $\nu = -14$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $(A+14I)\vec{x} = \vec{0}$. Tale sistema lineare ammette infinite soluzioni, questo conferma che il valore -14 è effettivamente un autovalore (e che la situazione è quella descritta); risolvendolo, troviamo una base dell'autospazio V_{-14}: $\mathcal{B}_{V_{-14}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Infine, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ (C e Δ sono le matrici della diagonalizzazione di A, ovvero sono rispettivamente la matrice di una base di autovettori e la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori).

5.19. Risulta $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}{\cdot}B_\kappa{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3k-15 & 3k+14 & 6k+30 \\ k+5 & -k-5 & -2k-9 \end{pmatrix}$.
Annullando tutti gli elementi di questa matrice che **non** stanno sulla diagonale troviamo il sistema $-3k-15 = 0$, $k+5 = 0$, $-k-5 = 0$, $6k+30 = 0$, che ha come (unica) soluzione il valore $k = -5$. Sostituendo questo valore nelle matrici B e $A^{-1} \cdot B_\kappa \cdot A$ troviamo rispettivamente $B_{-5} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A^{-1}{\cdot}B_{-5}{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'ultima equazione rappresenta la diagonalizzazione della matrice B_{-5}, questo significa che i valori sulla diagonale $2, -1, 1$ sono gli autovalori di B_{-5} e che i rispettivi autospazi sono

$$V_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{-1} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(non serve fare conti: i vettori indicati corrispondono alle colonne della matrice A).

Anche per scrivere il polinomio caratteristico di B_{-5} possiamo utilizzare la diagonalizzazione a disposizione, si ha $P_{B_{-5}}(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$.

Nota: gli unici calcoli da fare sono quelli di A^{-1} e di $A^{-1} \cdot B_\kappa \cdot A$ fatti all'inizio. Visto che A^{-1} viene utilizzata per rispondere alle domande successive ...vietato sbagliarla! (è opportuno che lo studente verifichi la correttezza del calcolo dell'inversa).

5.20. Conosciamo le immagini dei vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$: $L(\vec{w}) = \vec{w} - \vec{z}$, $L(\vec{z}) = 6\vec{w} - 4\vec{z}$ e, dalla relazione $L(\vec{v}) - 2L(\vec{w}) = \vec{0}$, abbiamo $L(\vec{v}) = 2L(\vec{w}) = 2\vec{w} - 2\vec{z}$. Ne segue che la matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ è la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ (ricordiamo che nelle colonne della matrice rappresentativa di una applicazione lineare ci sono le coordinate, rispetto alla base considerata, delle immagini dei vettori della base stessa).

Poiché A ha rango 2, $\dim \mathrm{Im} L = 2$ e $\dim \ker L = 3 - 2 = 1$. Il testo stesso ci fornisce un vettore nel nucleo, infatti dalla relazione $L(\vec{v}) - 2L(\vec{w}) = \vec{0}$ segue che $\vec{v} - 2\vec{w} \in \ker L$, e ci fornisce due vettori (indipendenti) nell'immagine: $\vec{w} - \vec{z}$ e $6\vec{w} - 4\vec{z}$. Pertanto:

$$\mathcal{B}_{\ker L} = \{\vec{v} - 2\vec{w}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, L} = \{\vec{w} - \vec{z}, 6\vec{w} - 4\vec{z}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per determinare il polinomio caratteristico, gli autovalori e le basi dei rispettivi autospazi di L possiamo utilizzare la matrice A. Si ha $P_L\lambda = \det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda+2)$, quindi gli autovalori di L sono 0, -1, -2 (essendo il nucleo di L non nullo, che il valore 0 fosse un autovalore già lo sapevamo).

Indichiamo con V_0, V_{-1}, V_{-2}, i rispettivi autospazi. Abbiamo $V_0 = \ker L$ (ne abbiamo già indicata una base). Il nucleo della matrice $A + I$ è generato dal vettore numerico di coordinate $0, 3, -1$, questo significa che $V_{-1} = \mathrm{Span}\{0\vec{v} + 3\vec{w} - \vec{z}\}$ (non bisogna confondersi: poiché A è la matrice rappresentativa di L rispetto alla base costituita dai vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, i valori numerici che si ottengono calcolando il nucleo di $A{+}I$ rappresentano le coordinate dei vettori del nostro autospazio rispetto a tale base). Analogamente troviamo $V_{-2} = \text{Span}\{2\vec{w}-\vec{z}\}$. In definitiva abbiamo:

$$V_{-1} = \text{Span}\{3\vec{w}-\vec{z}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad V_{-2} = \text{Span}\{2\vec{w}-\vec{z}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

I vettori indicati formano delle basi degli autospazi indicati (evito di ricopiarli).

Per determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ possiamo effettuare un "cambiamento di base". Abbiamo a disposizione due possibilità, quella di utilizzare la matrice rappresentativa rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ e quella di utilizzare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base costituita dagli autovettori trovati (cioè la matrice diagonale degli autovalori). Percorriamo entrambe le strade:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 12/5 & -14/5 & 32/5 \\ 14/5 & -13/5 & 44/5 \\ -4/5 & 3/5 & -14/5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 12/5 & -14/5 & 32/5 \\ 14/5 & -13/5 & 44/5 \\ -4/5 & 3/5 & -14/5 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente si ottiene sempre lo stesso risultato!

5.21. La matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è la matrice A indicata a lato (questo perché le colonne di A sono le immagini dei vettori della base canonica).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare gli autovalori si deve calcolare il polinomio caratteristico. Si ha:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

(per decomporre il polinomio usiamo il fatto che ne conosciamo la radice $\lambda = 2$). Quindi, gli autovalori della trasformazione T sono 1, -1, 2. I corrispondenti autospazi, che indicheremo rispettivamente con V_1, V_{-1}, V_2, sono i nuclei delle matrici $A{-}I$, $A{+}I$, $A{-}2I$. Risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle matrici indicate troviamo le basi degli autospazi:

$$\mathcal{B}_{V_1} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B}_{V_{-1}} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B}_{V_2} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

I tre vettori indicati, che denotiamo con $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, sono indipendenti (in quanto corrispondenti ad autovalori distinti), quindi costituiscono una base di autovettori. La trasformazione T è pertanto diagonalizzabile. La matrice rappresentativa di T rispetto alla base di autovettori $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ è la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori.

5.22. Si ha $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\vec{w}$. Questo dimostra che $\vec{w}$ è un autovettore per T e che il corrispondente autovalore è $\lambda = 2$. Il polinomio caratteristico della matrice A è il polinomio $-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8 = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-4)$, quindi i tre valori 2, -1 e 4 sono (tutti) gli autovalori di T (in effetti **non** è necessario calcolare il polinomio caratteristico: sapendo che "*somma degli autovalori*" = traccia$A = 5$ e che "*prodotto degli autovalori*" = $\det A = -8$ i due valori mancanti -1 e 4 si trovano immediatamente).

Risolvendo i sistemi $A\cdot\vec{v}_t = -\vec{v}_t$ e $A\cdot\vec{v}_t = 4\vec{v}_t$, si trovano i due valori $t_1 = 4$ e $t_2 = 3$.

La matrice rappresentativa di T rispetto alla base di autovettori $\mathcal{B} = \{\vec{v}_{t_1}, \vec{v}_{t_2}, \vec{w}\}$ è la matrice diagonale Δ dei corrispondenti autovalori nell'ordine considerato (indicata qui a lato).

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5.23. Sappiamo che $T(\vec{e}_3) = \vec{0}$, $T(\vec{v}) = 5\vec{v}$, $T(\vec{w}) = -2\vec{w}$. In particolare, la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_3, \vec{v}, \vec{w}\}$ è la matrice diagonale Δ avente i valori 0, 5, -2 sulla diagonale. Per determinare la matrice A è sufficiente effettuare un cambiamento di base: indicata con B la matrice del cambiamento di base (matrice associata ai vettori $\vec{e}_3, \vec{v}, \vec{w}$) e posto Δ come sopra, si ha $A = B\cdot\Delta\cdot B^{-1}$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & -84 & 0 \\ 7 & 26 & 0 \\ 4 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici B e Δ sono le matrici della domanda *b*): si ha $\Delta = B^{-1}\cdot A\cdot B$.

5.24. Innanzi tutto osserviamo che la matrice dei coefficienti delle relazioni date è la matrice rappresentativa della trasformazione L rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ (indicata a lato).

$$M_{\{\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto abbiamo a disposizione (almeno) tre metodi:

I metodo. Effettuando un cambiamento di base troviamo la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$: posto B = "matrice delle coordinate dei vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ rispetto alla base canonica" si ha

$$M_{\mathcal{C}an} = B\cdot M_{\{\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}}\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Usiamo questa matrice per determinare il polinomio caratteristico e gli (eventuali) autovalori e autovettori: $P(\lambda) = \det(M_{\mathcal{C}an} - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$; gli autovalori sono 1 e 3 (rispettivamente di molteplicità algebrica 2 e 1) ed i corrispondenti autospazi sono:

$$V_1 = \ker(M_{\mathcal{C}an} - I) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\};\quad V_3 = \ker(M_{\mathcal{C}an} - 3I) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

L'insieme $\mathcal{B}$ dei tre vettori indicati costituisce una base di autovettori.

II metodo. Usiamo la matrice rappresentativa $M_{\{\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}}$ per calcolare il polinomio caratteristico, quindi troviamo gli autovalori e corrispondentemente gli autovettori $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (li troviamo espressi come combinazioni lineari dei vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$: si trova $\vec{b}_1 = -\vec{v}+2\vec{w}$, $\vec{b}_2 = \vec{w}-\vec{z}$, $\vec{b}_3 = \vec{v}-\vec{w}$). La matrice $M_{\mathcal{C}an}$ la troviamo effettuando il cambiamento di base dalla base degli autovettori alla base canonica.

III metodo. Scriviamo i vettori della base canonica $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ quindi calcoliamo $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), L(\vec{e}_3)$ utilizzando le relazioni date: $L(\vec{e}_1) = L(-\frac{1}{2}\vec{v} + 2\vec{w} - \frac{3}{2}\vec{z}) = -\frac{1}{2}L(\vec{v}) + 2L(\vec{w}) - \frac{3}{2}L(\vec{z}) = -\frac{1}{2}\big(5\vec{v} - 4\vec{w}\big) + 2\big(2\vec{v} - \vec{w}\big) - \frac{3}{2}\big(2\vec{v} - 2\vec{w} + \vec{z}\big) = -\frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w} - \frac{3}{2}\vec{z}$ eccetera.

5.25. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = (3-\lambda)\cdot(-4-\lambda)\cdot(\lambda^2 + \lambda - 12) = (3-\lambda)^2\cdot(-4-\lambda)^2$. Ne segue che gli autovalori sono 3 e -4, entrambi di molteplicità algebrica 2. Gli autospazi V_3 e V_{-4} sono:

$$V_3 = \ker(A-3I) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},\quad V_{-4} = \ker(a+4I) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(le due coppie di vettori indicati costituiscono rispettivamente una base di V_3 e una base di V_{-4}). In particolare, anche le molteplicità geometriche dei due autovalori sono entrambe uguali a 2. Dall'equazione $A\cdot\vec{v}_k = \lambda\vec{v}_k$ si trova $\lambda = -4$ e $k = 7$, in particolare $\vec{v}_k$ è un autovettore se e solo se $k = 7$. Si osservi che avrei potuto anche usare i risultati precedenti: confrontando le coordinate di $\vec{v}_k$ con quelle degli autovettori trovati si vede che $\vec{v}_k \notin V_3$, $\forall k$, nonché $\vec{v}_k \in V_{-4}$ per $k = 7$. Infine, $A^{15}(\vec{v}_7) = (-4)^{15}\vec{v}_7 = -4^{15}\vec{v}_7$.

5.26. Rispetto alla base degli autovettori, la trasformazione T è rappresentata dalla matrice diagonale degli autovalori. Il polinomio caratteristico (che non dipende dalla base scelta per rappresentare T) è il polinomio $P_T(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 -$

$11\lambda+6$.

Essendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ autovettori di autovalori $\lambda=2$ e $\mu=1$ ed essendo $\vec{v}=3\vec{a}+\vec{b}$, risulta $T^{15}(\vec{v}) = T^{15}(3\vec{a}+\vec{b}) = 3T^{15}(\vec{a})+T^{15}(\vec{b}) =$
$$3\lambda^{15}\vec{a}+\mu^{15}\vec{b} = 3\cdot 2^{15}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+1^{15}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 2^{15}+1\\3\cdot 2^{15}\\-3\cdot 2^{16}+1\end{pmatrix}.$$
Infine, la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ la troviamo effettuando un cambiamento di base. Si ha:
$$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4&-8&-3\\-1&5&1\\4&-14&-3\end{pmatrix}.$$

5.27. Per calcolare A^n dobbiamo diagonalizzare A. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^2-2\lambda-3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$. I vettori $\binom{1}{2}$ e $\binom{1}{1}$ sono rispettivamente autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=-1$. Da ciò otteniamo la formula $A = \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}$, quindi troviamo
$$A^n = \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-3^n+2(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\-2\cdot 3^n+2(-1)^n & 2\cdot 3^n-(-1)^n\end{pmatrix}.$$
In particolare, $A^{-2} = \begin{pmatrix}17/9&-8/9\\16/9&-7/9\end{pmatrix}$ (che si poteva calcolare anche direttamente).

I vettori $\binom{1}{2}$ e $\binom{1}{1}$ sono anche autovettori per la matrice A^n (per ogni n), di autovalori $\lambda_1'=3^n$ e $\lambda_2'=(-1)^n$ (rispettivamente). In particolare, $\binom{1}{2}$ è un autovettore per A^3 di autovalore $3^3=27$.

5.28. La matrice A la possiamo leggere nel testo:
dovendo risultare $\begin{pmatrix}\star&\star&\star\\\star&\star&\star\\\star&\star&\star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\\8x-7y+4z\end{pmatrix}$ si ha $A = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\8&-7&4\end{pmatrix}$.

Il vettore $\vec{v}_k$ (che è un vettore non-nullo per ogni k), è un autovettore per L se esiste un valore λ tale che $A\cdot\vec{v}_k = \lambda\vec{v}_k$. Da questa relazione si ottiene $\lambda=3$ e $k=-1$, dunque $\vec{v}_k$ è un autovettore per L se e solo se $k=-1$ e l'autovalore corrispondente a $\vec{v}_{-1}$ è $\lambda=3$.
Il polinomio caratteristico di L è il polinomio $P_L(\lambda) = \det\big(A-\lambda I\big) = (4-\lambda)\cdot\big(\lambda^2-2\lambda-3\big) = (4-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)$, quindi abbiamo 3 autovalori distinti: 3, 4 e -1 (il calcolo del polinomio caratteristico potevamo anche risparmiarcelo: conoscendo già due autovalori, gli autovalori 3 e 4, quest'ultimo risulta evidente guardando la terza colonna di A, il terzo autovalore, che chiameremo μ,, lo troviamo sapendo che la somma degli autovalori, nel nostro caso $3+4+\mu$ è uguale alla traccia di A, che vale $1+1+4 = 6$).

Le molteplicità algebriche degli autovalori sono tutte uguali a 1, pertanto sono uguali a 1 anche le corrispondenti molteplicità geometriche. Quanto agli autospazi V_3, V_4, V_{-1}, ricordando che $V_\lambda = \ker(A-\lambda I)$, otteniamo:
$$\mathcal{B}_{V_3} = \{\vec{v}_{-1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\},\quad \mathcal{B}_{V_4} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\},\quad \mathcal{B}_{V_{-1}} = \{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\}.$$
Poiché abbiamo tre autovettori indipendenti (si ricordi che autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono sicuramente indipendenti), L risulta diagonalizzabile. Infine, posto $B = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\-1&1&-3\end{pmatrix}$ e $\Delta = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (sono rispettivamente la matrice di una base di autovettori = "matrice del cambiamento di base" e la matrice diagonale associata ai corrispondenti autovalori), si ha $\Delta = B^{-1}\cdot A\cdot B$ come richiesto.

5.29. Indichiamo con x, y, z le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$. Per definizione, lo spazio

$\ker L$ è lo spazio dei vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazione $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Risolvendo questo sistema si trovano le equazioni parametriche $x = t,\ y = 0,\ z = -7t$.

L'immagine di L è lo spazio dei vettori del tipo $A \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. È generato dai vettori corrispondenti alle colonne della matrice A, quindi $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una sua base. Di conseguenza, le equazioni $x = t,\ y = -t,\ z = -2t+s$ sono equazioni parametriche per $\mathrm{Im}\,L$. Eliminando i parametri, nello specifico ricavando s e t dalle ultime due equazioni e sostituendoli nella prima, si trova l'equazione cartesiana $x + y = 0$.

Per stabilire se L è diagonalizzabile ne calcoliamo gli autovalori e i corrispondenti autospazi. Calcoliamo il polinomio caratteristico: $P_L(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot (4+\lambda)$. Poiché abbiamo 3 autovalori distinti, L è sicuramente diagonalizzabile. Quanto ai corrispondenti autospazi si ha $V_0 = \ker(A),\ V_1 = \ker\big(A - I\big),\ V_{-4} = \ker\big(A + 4I\big)$, quindi $\mathcal{B}_{V_0} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\},\ \mathcal{B}_{V_1} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},\ \mathcal{B}_{V_{-4}} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L. La matrice Δ rappresentativa di L rispetto alla base di autovettori trovati è la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale associata agli autovalori).

5.37. **a)** Approccio "geometrico" (distinguiamo i tre casi $\mathrm{rango}P = 2,\ 0,\ 1$): se P è invertibile, $P^2 = P \Rightarrow P = I$ (identità); se P ha rango zero allora è la matrice nulla; se $\mathrm{rango}P = 1$ allora esistono due vettori non-nulli $\vec{v} = \binom{\alpha}{\beta} \in \mathrm{Im}P$ e $\vec{k} = \binom{\gamma}{\delta} \in \ker P$, poiché $P^2 = P \Rightarrow P(\vec{v}) = \vec{v}$, il vettore $\vec{v}$ è un autovettore (relativo all'autovalore $\lambda = 1$). Poiché $\vec{v}$ e $\vec{k}$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti (rispettivamente 0 e 1), l'insieme $\{\vec{v}, \vec{k}\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ nonché la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ è invertibile. Rispetto alla base $\{\vec{v}, \vec{k}\}$ la trasformazione $L_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è rappresentata dalla matrice "diagonale associata agli autovalori" $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi risulta $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \alpha\delta & -\alpha\beta \\ \gamma\delta & -\beta\gamma \end{pmatrix}$.

a) Se $\vec{w} = P(\vec{v})$ e $P^2 = P$, allora $P(\vec{w}) = P\big(P(\vec{v})\big) = P^2(\vec{v}) = P(\vec{v}) = \vec{w}$. Questo dimostra che l'identità $P^2 = P$ implica la proprietà $P(\vec{w}) = \vec{w},\ \forall\, \vec{w} \in \mathrm{Im}P$. Viceversa, se $P(\vec{w}) = \vec{w}$ per ogni vettore $\vec{w}$ nell'immagine di P, poiché $P(\vec{v})$ appartiene all'immagine di P per ogni $\vec{v}$, si deve necessariamente avere $P\big(P(\vec{v})\big) = P(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$, cioè $P^2 = P$. Osserviamo che l'unica matrice "di proiezione" invertibile è la matrice identità I_n.

b) e **c)** Il nucleo $\ker P$ è l'autospazio relativo all'autovalore 0 e, alla luce della caratterizzazione vista, $\mathrm{Im}P$ è l'autospazio relativo all'autovalore 1. D'altro canto dall'uguaglianza $\dim ImP + \dim\ker P = n$ deduciamo che questi due autospazi generano $\mathbb{R}^n$ (cfr. Teorema 13.9), quindi che P è diagonalizzabile: la trasformazione $L_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è rappresentata dalla matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}\,(1, ..., 1, 0, ... 0)$, ovvero $P = B \cdot \Delta \cdot B^{-1}$ (essendo B la matrice del cambiamento di base).

6.6. I vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati $\overline{QP}$ e $\overline{QK}$ sono rispettivamente $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Pertanto, $Area(\mathbb{T}) = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}| = 7$; $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{-2}{5\sqrt{8}} = \frac{-\sqrt{2}}{10}$.

La retta r è parallela al vettore $\vec{v}$, quindi è descritta da un'equazione del tipo $2x - 2y + c = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $c = 2$. L'equazione $2x - 2y + 2 = 0$ è un'equazione cartesiana di r.

6.7. Il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quindi $\vec{k} = 7 \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Inoltre: $\mathcal{A} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = 14$; $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{32}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{122}}$ (circa 0,916);
$I = \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-9\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\7\\9\end{pmatrix}$.

6.8. $\cos(\theta) = \frac{\vec{v}\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{-22}{\sqrt{94}\sqrt{11}}$;
$\mathcal{A} = \|\vec{v}\wedge\vec{w}\| = \|\begin{pmatrix}-15\\18\\-1\end{pmatrix}\| = \sqrt{550}$; $\pi = \frac{\vec{v}\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} = \frac{-22}{11}\vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-6\end{pmatrix}$.
La differenza $\vec{v}' - \vec{\pi}'$ è un vettore ortogonale a $\vec{w}'$ (per definizione di proiezione), ne segue che il prodotto scalare $(\vec{v}' - \vec{\pi}')\cdot\vec{w}'$ è nullo.

6.9. Risulta $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \perp r$, quindi $\vec{v}' = \begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix}$ è parallelo ad r. Si ha $\vec{v} = \frac{26}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}' = \begin{pmatrix}24\\-10\end{pmatrix}$.
Si ha $d = \frac{|5\cdot 13+12\cdot 15-76|}{\sqrt{5^2+12^2}} = 13$.
Il punto Q può essere determinato intersecando la retta r con la retta s ortogonale ad r e passante per P. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 13+5t \\ y = 15+12t \end{cases}$. Sostituendole nell'equazione di r si trova $t = -1$, quindi $Q = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$.
Si ha $\overline{QP} = \begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$, $\overline{QK} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$. Quindi $Area(\mathbb{T}) = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}5 & -5\\12 & 1\end{pmatrix}| = \frac{65}{2}$.
Infine, $\cos(\theta) = \frac{\overline{QP}\cdot\overline{QK}}{\|\overline{QP}\|\cdot\|\overline{QK}\|} = -0.19612$ (circa).

6.10. Si ha $\vec{v} = P - I$, quindi $I = \begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix}$. Posto $\vec{z} = \overline{QP} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, i vettori $\vec{v}$ e $\vec{z}$ "sono" due lati del triangolo in questione. La norma del prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{z}$ è uguale al valore dell'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{z}$. In definitiva abbiamo:
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{v}\wedge\vec{z}\| = \frac{1}{2}\|\begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\| = \frac{1}{2}\|\begin{pmatrix}-1\\-41\\11\end{pmatrix}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1803}.$
Il prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ è ortogonale ad entrambi i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (ed in effetti ha già norma 3, se avesse avuto norma n lo avremmo moltiplicato per il coefficiente $\frac{3}{n}$). Quindi, questo vettore, è il vettore richiesto $\vec{h}$.
Infine: $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} = \dfrac{19}{\sqrt{74}\sqrt{5}} \simeq 0.98776$; $\pi = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{(\|\vec{w}\|)^2}\vec{w} = \frac{19}{5}\vec{w} = \begin{pmatrix}38/5\\0\\-19/5\end{pmatrix}$.

6.11. Il vettore $\vec{u}' = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ è ortogonale a $\vec{v}$, il prodotto vettoriale $\vec{w}' = \vec{v}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$ è ortogonale sia al vettore $\vec{v}$ che al vettore $\vec{u}$. Moltiplicando questi vettori per una costante opportuna si ottengono dei vettori di norma 3:
$\vec{u} = \frac{3}{\|\vec{u}'\|}\vec{u}' = \frac{3}{\sqrt{5}}\vec{u}' = \begin{pmatrix}0\\3/\sqrt{5}\\6/\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \frac{3}{\|\vec{w}'\|}\vec{w}' = \frac{3}{\sqrt{45}}\vec{w}' = \begin{pmatrix}5/\sqrt{5}\\-4/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.
Si ha $\vec{z} = \vec{u}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\3/\sqrt{5}\\6/\sqrt{5}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}5/\sqrt{5}\\-4/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$ (non è un caso: vista l'interpretazione geometrica del prodotto vettoriale, $\vec{z}$ è parallelo a $\vec{v}$ ed ha norma $3\cdot 3 = 9$).

Si ha $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{k}\|} = \frac{12+14-8}{3\cdot\sqrt{36+49+64}} = \frac{18}{3\cdot\sqrt{149}} = \frac{6\sqrt{149}}{149}$; $\quad \pi = \frac{\vec{k}\cdot\vec{z}}{\|\vec{z}\|^2}\vec{z} = \frac{54}{81}\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Note: si ha anche $\pi = \frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$, questo segue dal fatto che $\vec{z}$ e $\vec{v}$ (in quanto paralleli) individuano la stessa direzione; dopo aver svolto un prodotto vettoriale, un'utile verifica consiste nel controllare che il vettore trovato è ortogonale a entrambi i vettori dati; leggete criticamente i risultati ottenuti (sono troppi i compiti dove $\cos\theta$ ha modulo maggiore di uno! ...come pure quelli dove il risultato di una proiezione non è parallelo alla direzione lungo la quale si proietta!).

6.12. La retta r è parallela al vettore $\vec{w} = \overline{PQ} = \binom{3}{-4}$. Equazioni parametriche e cartesiane di r sono rispettivamente $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3-4t \end{cases}$ e $4x+3y-17 = 0$ (il termine noto -17 si trova imponendo il passaggio per P, o per Q).

Si ha $\|\overline{PQ}\| = 5$, quindi $\vec{v} = \frac{7}{5}\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 21/5 \\ -28/5 \end{pmatrix}$ ha norma 7.

La generica retta parallela ad r ha equazione $4x+3y+c = 0$. Imporre che la sua distanza dalla retta r sia 5 equivale a imporre che la sua distanza da un qualsiasi punto di r sia 5. Imponendo che la sua distanza da P sia 5 si trova $\frac{|4\cdot 2+3\cdot 3+c|}{5} = 5$, quindi $c = 8$ (un'altra soluzione è $c = -42$):
un'equazione cartesiana di una retta s che soddisfa le condizioni indicate è $4x+3y+8 = 0$.

Si ha $\vec{\pi} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} = \frac{33}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99/25 \\ -132/25 \end{pmatrix}$.

6.13. Poiché $\vec{k} = \overline{QP}$, si ha $Q = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 3-1 \\ -1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$. Il prodotto vettoriale $\vec{k}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\vec{k}$ e $\vec{w}$. Quindi $\vec{v} = \frac{5}{\|\vec{k}\wedge\vec{w}\|}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/\sqrt{26} \\ -5/\sqrt{26} \\ 15/\sqrt{26} \end{pmatrix}$
soddisfa le condizioni richieste.

Si ha $\vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w}) = \frac{\vec{k}\cdot\vec{w}}{\|\vec{k}\|^2}\vec{k} = \frac{32}{75}\vec{k} = \begin{pmatrix} 160/75 \\ 32/75 \\ 224/75 \end{pmatrix}$.

Non è necessario calcolare le altre proiezioni: poiché $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{k}$ si ha
$\vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w}+7\vec{v}) = \vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 160/75 \\ 32/75 \\ 224/75 \end{pmatrix}$, $\vec{\pi}_{\vec{k}}(2\vec{w}+11\vec{v}) = \vec{\pi}_{\vec{k}}(2\vec{w}) = 2\cdot\vec{\pi}_{\vec{k}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 320/75 \\ 64/75 \\ 448/75 \end{pmatrix}$.

Nel nucleo di L troviamo i vettori ortogonali al vettore $\vec{k}$ (ovvero i vettori che soddisfano l'equazione $5x+y+7z = 0$) e nell'immagine di L troviamo i vettori proporzionali a $\vec{k}$.
Quindi: $\mathcal{B}_{\ker L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$.

6.14. Si ha $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overline{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}| = 8$.

Si ha $\cos\theta = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{PR}}{\|\overline{PQ}\|\cdot\|\overline{PR}\|} = \frac{-12}{4\cdot 5} = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5}$.

Essendo $\overline{QR} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$, le equazioni $\begin{cases} x = 2+7t \\ y = 3-4t \end{cases}$ e $4x+7y-29 = 0$ (il coefficiente 29 lo troviamo imponendo il passaggio per P) sono rispettivamente equazioni parametriche e cartesiane della retta r.

Per trovare le coordinate di K abbiamo a disposizione due metodi:

$i)$ considerando l'estremo finale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{h}$ ottenuto proiettando il vettore $\overline{QP}$ lungo la direzione $\overline{QR}$ e che ha Q come estremo iniziale troviamo $\vec{h} = \frac{\overline{QP}\cdot\overline{QR}}{\|\overline{QR}\|^2}\overline{QR} = \frac{\binom{4}{0}\binom{7}{-4}}{\|\binom{7}{-4}\|^2}\binom{7}{-4} = \frac{28}{65}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$, quindi $K = \begin{pmatrix}-2+\frac{28}{65}\cdot 7\\ 3-\frac{28}{65}\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}66/65\\83/65\end{pmatrix}$;

$ii)$ intersecando la retta s (che ha equazione $4x+7y-13=0$) con la retta ortogonale a s passante per P (che ha equazione $7x-4y-2=0$) troviamo $x = 66/65$, $y = 83/65$.

6.15. Le coordinate del vettore $\vec{w}$ si ottengono come differenza delle coordinate dei due punti (estremo finale meno estremo iniziale); il prodotto vettoriale $\vec{k}\wedge\vec{w}$ è ortogonale a $\vec{k}$ e $\vec{w}$, per renderlo di norma 2 è sufficiente moltiplicarlo per $2/\|\vec{k}\wedge\vec{w}\|$; per calcolare $\pi_{\vec{k}}(\vec{w})$ usiamo la formula di proiezione. In definitiva:

$$\vec{w} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix},\ \vec{v} = \frac{2}{\|\vec{k}\wedge\vec{w}\|}\vec{k}\wedge\vec{w} = \frac{2}{\sqrt{824}}\begin{pmatrix}18\\-20\\-10\end{pmatrix},\ \pi_{\vec{k}}(\vec{w}) = \frac{\vec{k}\cdot\vec{w}}{\|\vec{k}\|^2}\vec{k} = \frac{26}{75}\vec{k} = \begin{pmatrix}26/15\\26/75\\182/75\end{pmatrix}.$$

Per trovare un vettore $\vec{r}$ che soddisfa le condizioni indicate basta sommare a $\vec{w}$ un qualsiasi vettore (non nullo) ortogonale a $\vec{k}$. Ad esempio possiamo prendere $\vec{r} = \vec{w} + \vec{k}\wedge\vec{w}$. Un'altra possibilità è quella di prendere il vettore trovato prima $\pi_{\vec{k}}(\vec{w})$.

6.16. Indichiamo con $\vec{z}$ il vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{PQ}$. Il punto π è l'estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P, che rappresenta il vettore $\vec{k}$ ottenuto proiettando $\vec{z}$ lungo la direzione individuata da $\vec{v}$. Si ha:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix}1\\-12\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-11\\9\end{pmatrix};\quad \vec{k} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{z}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-12\\6\end{pmatrix};\quad \pi = \text{“}p+\vec{k}\text{”} = \begin{pmatrix}-1\\-13\\9\end{pmatrix}.$$

Per calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $\mathbb{T}$ possiamo utilizzare il fatto che la norma del prodotto vettoriale di due vettori in $\mathbb{R}^3$ è uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{k}\wedge\vec{z}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2646}$ ($\vec{k}$ e $\vec{w}$ sono rappresentati dai lati $\overline{P\pi}$ e $\overline{PQ}$ di $\mathbb{T}$).

Infine, $\cos\theta = \frac{\vec{z}\cdot\vec{v}}{\|\vec{z}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{-63}{\sqrt{21}\sqrt{203}} = \dfrac{-63}{\sqrt{4263}} \simeq -0,9649$.

Nota. Avremmo potuto anche usare la formula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overline{\pi P}\|\cdot\|\overline{\pi Q}\| = \frac{1}{2}\sqrt{189}\sqrt{14} = \frac{1}{2}\sqrt{2646}$ (questo perché l'angolo di vertice π di $\mathbb{T}$ è retto per costruzione di π).

6.17. Equazioni parametriche delle retta r : $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = t \end{cases}$ (trovate usando y come parametro nell'equazione cartesiana).

Abbiamo: $\vec{v}' = \binom{-3}{1} \mathbin{//} r$, quindi $\vec{v} = \frac{2}{\|\vec{v}'\|}\binom{-3}{1} = \binom{-6/\sqrt{10}}{2/\sqrt{10}}$ soddisfa le condizioni richieste.

Posto $P = \binom{x}{y}$ si deve avere $\frac{|x+3y-2|}{\sqrt{10}} = 5$. Una possibile soluzione è $P = \binom{2+5\sqrt{10}}{0}$.

Il vettore $\vec{v}'$ è un vettore ortogonale ad s, quindi un'equazione cartesiana di s si ottiene imponendo che le coordinate del punto A soddisfino l'equazione $-3x+y+c=0$ (si trova $-3\cdot1-1+c=0$, quindi $c=4$): l'equazione $-3x+y+4=0$ è un'equazione cartesiana di s.

6.18. Essendo $\overline{RQ} = \binom{5}{-4}$, si ha $R = \binom{-6}{7}$. Inoltre: $\overline{QP} = \binom{3}{0}$ e $\overline{QR} = -\vec{v} = \binom{-5}{4}$. L'area del triangolo $\mathbb{T}$ è la metà dell'area del parallelogramma individuato dai due vettori indicati: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}3 & -5\\0 & 4\end{pmatrix}\right| = 6$. Le equazioni $\begin{cases} x = 4t+2 \\ y = 5t+3 \end{cases}$, $5x-4y+2 = 0$ sono rispettivamente equazioni parametriche e cartesiane della retta r (infatti, il vettore $\binom{4}{5}$ è ortogonale al vettore $\vec{v}$, quindi è parallelo alla retta r). Le coordinate del punto K si trovano intersecando la retta r con la retta s ortogonale ad r passante per Q. La retta s ha equazione $4x+5y-11 = 0$.

Mettendo a sistema le equazioni di r ed s si trova $K = \begin{pmatrix}34/41\\63/41\end{pmatrix}$.

6.19. Risulta $A = \binom{4}{6}+\binom{-2}{3} = \binom{2}{9}$, $B = \binom{4}{6}+\binom{5}{-1} = \binom{9}{5}$. Il vettore $\overline{AB} = \binom{7}{-4}$ è

un vettore parallelo alla retta r. Quindi le equazioni $\begin{cases} x = 2+7t \\ y = 9-4t \end{cases}$, $4x+7y-71 = 0$ sono rispettivamente equazioni parametriche e cartesiane di r.
L'angolo θ è l'angolo tra i vettori $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$. Si ha $cos\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|} = \frac{-13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = -\sqrt{2}/2$.
Infine, $K = P + \frac{\alpha\cdot\beta}{\|\vec{\beta}\|^2}\beta = \binom{4}{6} + \frac{-13}{26}\binom{5}{-1} = \binom{3/2}{13/2}$.

6.20. In forma parametrica r è definita dal sistema $\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 2-3t \end{cases}$. Da questo sistema (oppure imponendo il passaggio per P alla generica retta parallela a $\vec{v}$), si trova l'equazione cartesiana $3x+2y-19 = 0$. Si ha $\mathrm{dist}\{Q,\, r\} = \frac{|3\cdot3+2\cdot(-8)-19|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$.
Proiettando il vettore $\vec{w} := \overline{PQ} = \binom{-2}{-10}$ lungo la direzione della retta r si ottiene il vettore $\vec{\pi}$ rappresentato dal segmento orientato $\overline{PK}$. Si ha $\vec{\pi} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{-2\cdot2-10\cdot(-3)}{13}\binom{2}{-3} = \binom{4}{-6}$, quindi $K = \binom{5}{2} + \binom{4}{-6} = \binom{9}{-4}$. In alternativa, avremmo potuto intersecare la retta r con la retta ad essa ortogonale passante per Q. Infine risulta $Area(\mathbb{T}) = \frac{1}{2}\|\overline{PK}\|\cdot\|\overline{QK}\| = \frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{52} = 26$ ($\overline{PK}$ e $\overline{QK}$ sono ortogonali tra loro). Si poteva usare anche la formula del determinante: $Area(\mathbb{T}) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}\right| = 26$.

6.21. Il vettore, rappresentato da $\overline{AB}$, $\vec{v} = \binom{3}{-4}$ è un vettore parallelo ad r. Il vettore rappresentato da $\overline{AQ}$ è il vettore $\vec{w} = \binom{0}{-4}$. Le equazioni $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3-4t \end{cases}$ e $4x+3y-17 = 0$ sono rispettivamente equazioni parametriche e cartesiane di r. Si ha:
$\mathrm{dist}\{Q,\, r\} = \frac{|4\cdot2+3\cdot(-1)-17|}{\sqrt{16+9}} = 12/5$, $\vec{\pi} = \pi_{\langle\vec{v}\rangle}(\vec{w}) = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v} = \frac{16}{25}\cdot\binom{3}{-4} = \binom{48/25}{-64/25}$.

6.22. Ricordando l'interpretazione geometrica dei coefficienti delle generiche equazioni parametriche, ovvero cartesiane, di una retta, abbiamo quanto segue. Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -3-t \end{cases}$ (essendo $\binom{1}{2}$ ortogonale ad r, il vettore $\binom{2}{-1}$ è parallelo ad r).
Equazione cartesiana: $x+2y+2 = 0$ (il termine noto lo troviamo imponendo il passaggio per P).
Per determinare le coordinate di K abbiamo a disposizione due metodi (almeno):
I *metodo.* Intersechiamo r con la retta s ortogonale ad r nonché passante per Q, si ha K = "soluzione del sistema lineare di equazioni $x+2y+2=0$, $2x-y-21=0$" $= \binom{8}{-5}$.
II *metodo.* Proiettiamo il vettore $\overline{PQ}$ lungo la direzione di r quindi determiniamo K come estremo finale del segmento orientato di estremo iniziale P che rappresenta tale proiezione:
$K = \binom{4}{-3} + \frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{2}{-1}}{5}\binom{2}{-1} = \binom{4}{-3} + 2\binom{2}{-1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ (osservazione: $\overline{PQ} = \binom{7}{4}$, $\binom{2}{-1} /\!\!/ r$).
Si ha $\mathrm{dist}\{Q,\, r\} = \frac{|11+2\cdot1+2|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.
Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è parallelo ad r, quindi $\frac{5}{\|\binom{2}{-1}\|}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ è un vettore di norma 5 parallelo ad r.

INDICE ANALITICO

INDICE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIAZIONI

$\exists$	=	"esiste";	$\exists!$	=	"esiste un unico";
$\forall$	=	"per ogni";	$\mid$	=	"tale che";
∞	=	"infinito";	$\emptyset$	=	"insieme vuoto";
$\Longrightarrow$	=	"implica";	$\Longleftrightarrow$	=	"se e solo se";

c.l. = "combinazione lineare".

E.G. = "algoritmo di eliminazione di Gauss".

$\in$	=	"appartiene";	$\subseteq$	=	"è incluso";
$\ni$	=	"contiene";	$\supseteq$	=	"contiene";