Corso di Laurea in STM
ANALISI NUMERICA, II MOD
10 Dicembre, 2012: **esercitazione**

1) Si consideri ϕ tale che

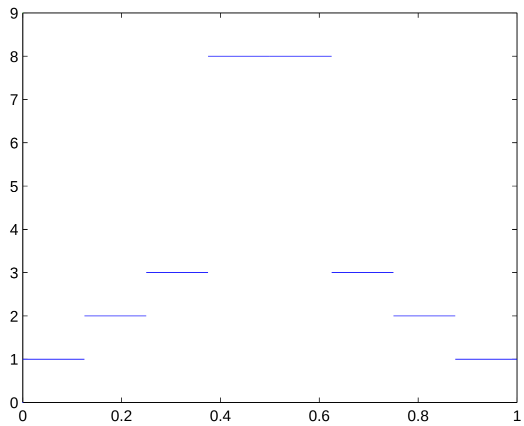
$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-i\omega}}{i\omega}\right)^4$$

i) stabilire, motivando la risposta se ϕ è continua
ii) stabilire, motivando la risposta, se ϕ verifica una relazione di scala

$$\phi(x) = \sum_k p_k \sqrt{2}\phi(2x - k);$$

iii) in caso ϕ verifichi una relazione di scala, determinare i coefficienti p_k;
iv) stabilire, motivando la risposta, se ϕ ha supporto compatto e, in caso affermativo determinarne il supporto;
v) determinare i valori $\phi(k)$ e $\phi(\frac{k}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$
vi) stabilire, motivando la risposta se ϕ puó assumere valori negativi
vii) stabilire, motivando la risposta se $\{\phi(. - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$ forma un sistema ortonormale
viii) stabilire, motivando la risposta se $\{\phi(. - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base di Riesz

2) Data il segnale s come da figura allegata e considerando le wavelets di Haar
i) assumendo $s \in V_3$ effettuare 3 passi dell'algoritmo di decomposizione
ii) comprimere il segnale annullando tutti i coefficienti dei dettagli con modulo minore di 2^{-3}
iii) ricostruire il segnale compresso, s_c
iv) cacolare $\|s\|_2$ e $\|s_c\|_2$



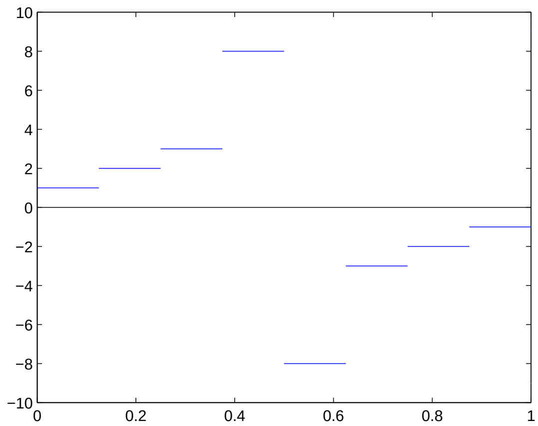
3) Si consideri la wavelet di Haar ψ_H. Si calcoli la trasformata wavelet

$$(W_{\psi_H} f)(a, -\frac{a}{2}), \; a > 0$$

nei seguenti casi
i) $f = 2$
ii) $f = sgn(x)$
iii) $f = x$
iv) $f = |x|$

Corso di Laurea in STM
ANALISI NUMERICA, II MOD
20 Dicembre, 2012: **Esonero**

1) Dato il segnale s come da figura e considerando le wavelets di Haar:
i) assumendo $s \in V_3$ effettuare 2 passi dell'algoritmo di decomposizione
ii) comprimere il segnale annullando tutti i coefficienti dei dettagli con modulo minore di 1;
iii) ricostruire il segnale compresso, s_c;
iv) cacolare $\|s\|_2$ e $\|s_c\|_2$.



2) Si consideri ϕ tale che

$$\widehat{\phi}(\omega) = e^{i\omega}\left(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^3$$

i) stabilire, motivando la risposta se ϕ è continua;
ii) stabilire, motivando la risposta, se ϕ verifica una relazione di scala;

$$\phi(x) = \sum_k p_k \sqrt{2}\phi(2x-k);$$

iii) in caso ϕ verifichi una relazione di scala, determinare i coefficienti p_k;
iv) stabilire, motivando la risposta, se ϕ ha supporto compatto e, in caso affermativo determinarne il supporto;
v) determinare i valori $\phi(\frac{k}{2}),\ \ k \in \mathbb{Z}$;
vi) stabilire, motivando la risposta se ϕ puó assumere valori negativi;
vii) stabilire, motivando la risposta se $\{\phi(.-k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$ forma un sistema ortonormale.

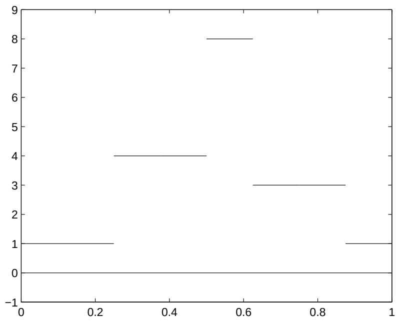
3) Si consideri una funzione φ tale

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^3$$

i) esprimere la funzione ϕ dell'esercizio **2)** in funzione di φ.
ii) senza effettuare ulteriori calcoli determinare il supporto di φ.

Corso di Laurea in STM
ANALISI NUMERICA, I MOD
19 Dicembre, 2013: **Esonero**

1) Dato il segnale s come da figura e considerando le wavelets di Haar:
i) assumendo $s \in V_3$ effettuare 2 passi dell'algoritmo di decomposizione
ii) comprimere il segnale annullando tutti i coefficienti dei dettagli con modulo minore di 1;
iii) ricostruire il segnale compresso, s_c;
iv) cacolare $\|s\|_2$ e $\|s_c\|_2$.



2) Si consideri ϕ tale che
$$\widehat{\phi}(\omega) = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-i\omega}}{i\omega}\right)^2 \quad \text{e} \quad \sum_k \phi(x+k) = 1.$$
i) stabilire, motivando la risposta se ϕ è continua;
ii) stabilire, motivando la risposta, se ϕ verifica una relazione di scala:
$$\phi(x) = \sum_k p_k \sqrt{2}\phi(2x-k);$$
e, in caso affermativo, determinare i coefficienti p_k;
iv) stabilire, motivando la risposta, se ϕ ha supporto compatto e, in caso affermativo determinarne il supporto;
v) determinare i valori $\phi(k), \ \ k \in \mathbb{Z}$;
vi) stabilire, motivando la risposta se ϕ puó assumere valori negativi;
vii) stabilire, motivando la risposta se $\{\phi(\cdot - k), \ \ k \in \mathbb{Z}\}$ forma un sistema ortonormale.

3) Si consideri ϕ dell'esercizio precedente e sia
$$\psi(x) = \sum_k q_k \sqrt{2}\phi(2x-k);$$
con
$$q_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{6}, \ q_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \ q_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{5}{3}, \ q_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \ q_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{6};$$
i) calcolare $\psi(\frac{k}{2}), \ k \in \mathbb{Z}$;
ii) disegnare il grafico di ψ;
iii) calcolare $\int_{\mathbb{R}} \psi \mathrm{d}x$.

4) Si consideri ϕ dell'esercizio **2)**. Tenendo presente i risultati di tale dell'esercizio e sapendo che ϕ è un polinomio di grado minore o uguale ad uno in ogni intervallo del tipo $[k, k+1], \ k \in \mathbb{Z}$,
i) determinare l'espressione analitica di ϕ;
ii) calcolare
$$< \phi, \phi(\cdot - k) >= \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-k)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$
iii) calcolare
$$\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2;$$
iv) stabilire, motivando la risposta se $\{\phi(\cdot - k), \ \ k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Riesz;
v) stabilire, motivando la risposta se ϕ genera un'analisi di multirisoluzione.