Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2010-2011: LCM
Tema di esame n. 1

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ u'(a) = u_a,\ u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(a,b)$) e $\alpha > 0, \gamma > 0$.

1) Scrivere il problema in forma debole, ossia nella forma

$$\text{trovare} \quad u \in V : a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

specificando opportunamente a, F, V.

2) Considerare una discretizzazione agli elementi finiti del problema di cui al punto 1) utilizzando come spazio di discretizzazione un opportuno sottospazio di

$$X_h^1 := \{v \in C([a,\ b]) : v_{|[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1,\ i = 1, \cdots, n,\}$$

ove

$$x_i = a + ih,\ i = 0, \cdots, n\ h = (b-a)/n$$

3) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per calcolare la soluzione approssimata del problema secondo lo schema prima determinato. Testare il programma costruito per diversi insiemi di dati e diversi passi di discretizzazione. Considerare anche il confronto con la soluzione esatta qualora questa sia disponibile.

4) Come si potrebbe modificare il software precedentemente costruito per trattare il problema

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ u'(a) = u_a,\ u(b) = \bar{u}_b \end{cases}$$

ove $u_a, \bar{u}_b$ sono valori assegnati?

Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2010-2011: LCM
Tema di esame n. 2

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(a,b)$) e $\alpha > 0, \gamma \geq 0$.

1) Scrivere il problema in forma debole, ossia nella forma

$$\text{trovare} \quad u \in V : a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

specificando opportunamente a, F, V.

2) Considerare lo spazio

$$X_h^2 := \{v \in C([a;b]) : v_{|[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_2,\ i = 1, \cdots, n, \}$$

ove

$$x_i = a + ih,\ i = 0, \cdots, n\ h = (b-a)/n$$

e determinarne una base costituita da elementi a supporto minimo (cioe' con struttura analoga a quella della base utilizzata nel caso delle lineari a tratti).

3) Considerare una discretizzazione agli elementi finiti del problema di cui al punto 1) utilizzando come spazio di discretizzazione lo spazio

$$V_h := \{v \in X_h^2 : v(a) = v(b) = 0\}$$

$$X_h^2 := \{v \in C([a;b]) : v_{|[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_2,\ i = 1, \cdots, n, \}$$

ove

$$x_i = a + ih,\ i = 0, \cdots, n\ h = (b-a)/n$$

4) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per calcolare la soluzione approssimata del problema secondo lo schema prima determinato, prevedendo la possibilità di utilizzare, per approssimare gli integrali presenti, la formula dei trapezi composita oppure la formula di Simpson composita.
Testare il programma costruito per diversi insiemi di dati e diversi passi di discretizzazione.
Analizzare il comportamento dell'errore al diminuire di h.

5) Posto $\gamma = 0,\ a = 0,\ b = 1$ determinare f in modo che il problema assegnato abbia come soluzione $u(x) = x(x-1)$. Utilizzare il programma precedente per determinare una soluzione approssimata. La soluzione approssimata dovrebbe coincidere con quella esatta? È quello che si ottiene?

Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2010-2011: LCM
Tema di esame n. 3

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(a,b)$) e $\alpha > 0, \gamma \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$.

1) Scrivere il problema in forma debole, ossia nella forma

$$\text{trovare} \quad u \in V : a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

specificando opportunamente a, F, V.

2) Considerare lo spazio

$$X_h^2 := \{v \in C([a;b]) : v_{|[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_2,\ i = 1,\cdots,n,\}$$

ove

$$x_i = a + ih,\ i = 0,\cdots,n\ h = (b-a)/n$$

e determinarne una base costituita da elementi a supporto minimo (cioe' con struttura analoga a quella della base utilizzata nel caso delle lineari a tratti).

3) Considerare una discretizzazione agli elementi finiti del problema di cui al punto 1) utilizzando come spazio di discretizzazione lo spazio

$$V_h := \{v \in X_h^2 : v(a) = v(b) = 0\}$$

ove X_h^2 sia rappresentato rispetto rispetto alla base di cui al punto 2).

4) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per calcolare la soluzione approssimata del problema secondo lo schema prima determinato utilizzando, per approssimare gli integrali presenti la formula dei trapezi composita.
Testare il programma costruito per diversi valori insiemi di dati e diversi passi di discretizzazione.

5) Analizzare la struttura della matrice del sistema lineare ottenuto al punto 4) al variare di α, β, γ e studiarne il numero di condizionamento in norma 2 al variare di h.
Confrontare i risultati ottenuti con il caso in cui lo spazio di discretizzazione sia costituito dalle funzioni lineari a tratti sulla stessa partizione di $[a,\ b]$.

Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2010-2011: LCM
Tema di Esame n. 4

1) Dare la formulazione debole del seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{su } \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N, & \text{su } \Gamma_N \subset \partial\Omega \end{cases}$$

ove Ω è un dominio del piano $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$ e l'interno di Γ_D e di Γ_N (come insiemi unidimensionali) sono disgiunti.

2) Utilizzare il software `FreeFem++` per approssimare la soluzione del problema di cui al punto 1) con diverse discretizzazioni del bordo e ultilizzando come spazio di approssimazione lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1) e studiando in particolare i casi in cui Ω sia
   i) un cerchio o un semicerchio;
   ii) un quadrato;
   iii) il dominio racchiuso fra l'intervallo $[0,\ 1]$ sull'asse x e la curva $y = x(1-x)$.

3) Dopo aver opportunamente modificato il codice `FreeFem++` precedente in modo da avere in uscita un file di testo contenente i vertici della triangolazione utilizzata e i corrispondenti valori della soluzione approssimata, scrivere un programma MATLAB o SCILAB che, avendo come input in file precedente, fornisca il grafico tridimensionale della soluzione approssimata.
   Prevedere anche un confronto grafico e numerico con la soluzione esatta qualora questa sia disponibile.