Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2009-2010: LCM
Lezione di Laboratorio n. 5

1) Ricordando che, in ipotesi di sufficiente regolarità, risulta

$$\int_A v\Delta u \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_A \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \mathrm{div}(v\nabla u)\mathrm{d}x = \int_{\partial A} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma$$

dare una formulazione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(\Omega)$) e Ω è un dominio di $\mathbb{R}^2$.

2) Utilizzando il software `FreeFem++`
   2.1) calcolare le soluzioni approssimate per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = xy, & \text{in } C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \\ u = 0, & \text{su } \partial C \end{cases}$$

   con diverse discretizzazioni del bordo e ultilizzando come spazio di approssimazione lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1).
   2.2) modificare il codice `FreeFem++` precedente in modo da avere in uscita un file di testo contenente i vertici della triangolazione utilizzata e i corrispondenti valori della soluzione approssimata.
   2.3) Scrivere un programma MATLAB o SCILAB che, avendo come input in file del punto precedente, fornisca il grafico tridimensionale della soluzione approssimata.

3) Determinare g_1 e g_2 in modo che i seguenti problemi

$$(1)\begin{cases} -\Delta u = -4, & \text{in } Q := (0,\ 1)^2 \\ u = g_1, & \text{su } \partial\ Q \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} -\Delta u = -4, & \text{in } C \\ u = g_2, & \text{su } \partial C \end{cases}$$

abbiano entrambi come soluzione

$$u(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

4) Utilizzando il software `FreeFem++`
   4.1) calcolare e disegnare la soluzione approssimata per il problema (1) utilizzando una discretizzazione di 10 intervalli su ogni lato del quadrato e come spazio di approssimazione lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1).
   4.2) calcolare e disegnare la soluzione approssimata per il problema (2) utilizzando una discretizzazione di 50 intervalli sul bordo, e, come spazio di approssimazione, lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1).

5) Utilizzando il software `FreeFem++`
   5.1) calcolare le soluzioni approssimate per il problema (1) utilizzando una discretizzazione di N intervalli su ogni lato del quadrato $N = 5, 10, 20$ e come spazio di approssimazione lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1) e quello delle quadratiche a tratti C^0 (P2). Determinare nei due casi l'errore rispetto alla soluzione esatta in norma L^2 e commentare i risultati ottenuti.
   5.2) calcolare le soluzioni approssimate per il seguente problema (2) utilizzando una discretizzazione di N intervalli, $N = 20, 40, 80$, sulla circonferenza unitaria e come spazio di approssimazione lo spazio delle lineari a tratti C^0 (P1) e quello delle quadratiche a tratti C^0 (P2). Determinare nei due casi l'errore rispetto alla soluzione esatta in norma L^2 e commentare i risultati ottenuti.
   5.3) Spiegare perchè, per il problema (2), anche utilizzando lo spazio (P2), la soluzione approssimata non coincide con quella esatta.