Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2009-2010: LCM
Lezione di Laboratorio n. 2

1 Si consideri ancora la mesh uniforme creata nell'esercizio 4.1) dell'esercitazione di laboratorio n. 1.

1.1) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per creare, le quantità

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi_{i-1}\mathrm{d}x, \ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi_i\mathrm{d}x, \quad i = 1, \cdots, N,$$

ove f è una funzione integrabile su (a, b) e $\{\phi_j, \ j = 0 \cdots, N\}$ sono le funzioni di base di X_h^1 costruite al punto 3) dell'esercitazione n. 1. Per calcolare gli integrali suddetti utilizzare la formula dei trapezi ossia

$$\int_{x_a}^{x_b} g(x)\mathrm{d}x \cong \frac{x_b - x_a}{2}(g(x_a) + g(x_b)).$$

1.2) Utilizzando le quantità di cui al punto precedente, scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per costruire il vettore $\mathbf{f}$ corrispondente al termine

$$\int_a^b fv\mathrm{d}x.$$

1.3) Data una funzione v in $L^2(a, b)$ scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per approssimare

$$\|v\|_2 := \sqrt{\int_a^b v^2\mathrm{d}x},$$

utilizzando la formula dei trapezi composita su una mesh due volte più fitta di quella usata precedentemente, ossia posto

$$t_k := a + k\hat{h}, \ \hat{h} = \frac{b-a}{2N}, \ k = 0, \cdots, 2N,$$

considerando

$$\int_a^b g\mathrm{d}x \cong \frac{\hat{h}}{2}\sum_{k=0}^{2N}\left(g(t_k) + g(t_{k+1})\right).$$

2) Considerare il problema

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f, & \text{in } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad \text{ove } \alpha = 1, \ \beta = 0, \gamma = 1, \ a = 0, \ b = 1, \tag{1}$$

2.0) determinare f in modo che la soluzione del problema suddetto sia $u(x) = x\sin(2\pi x)$

2.1) risolvere il sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ associato all'approssimazione di Galerkin agli elementi finiti utilizzando lo spazio V_h dell'esercitazione precedente con $N = 10$ e tracciare il grafico della soluzione approssimata u_h.

2.2) ricordando l'espressione della soluzione del problema precedente calcolare la norma dell'errore in $L^2(0, 1)$

$$\|u - u_h\|_2, \ h = 1/N, \ N = 10, 20, 40, 80$$

per ciascuno dei valori di N suddetti riportare in uno stesso grafico la soluzione esatta u e quella approssimata u_h.

2.3) Alla luce dei risultati (grafici) del punto 2.1), perché si è suggerito di utilizzare una mesh "più fine" per la valutazione dell'errore?

2.4) Stabilire quale relazione intercorre fra $\|u - u_h\|_2$, e h. Tracciare il grafico della norma dell'errore rispetto ad h utilizzando una scala logaritmica su entrambi gli assi.