Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2009-2010: LCM
Lezione di Laboratorio n. 1

1) Si consideri il problema
$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$
ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(a,b)$) e
$$\alpha > 0, \gamma \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$
Scrivere il problema in forma debole, ossia nella forma
$$\text{trovare} \quad u \in V : a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$
specificando opportunamente a, F, V.

2) Si consideri il problema
$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f, & \text{in } (a,b) \\ \\ u(a) = u_a, \; u(b) = u_b \end{cases}$$
ove f è una funzione sufficientemente regolare ($\in L^2(a,b)$) e
$$\alpha > 0, \gamma \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$
mostrare che, con una opportuna trasformazione tale problema si può ricondurre ad uno con dati al bordo omogenei come analizzato nel punto 1)

3) Si consideri una discretizzazione agli elementi finiti del problema di cui all'esercizio 1).
In particolare si ricorda che il metodo degli elementi finiti consiste nel sostituire lo spazio di dimensione infinita V con uno spazio di dimensione finita V_h e determinare
$$u_h \in V_h : a(u_h; v_h) = F(v_h), \forall v_h \in V_h \tag{2}$$
A tal fine si definiscono i punti
$$x_i = a + ih, \; i = 0, \cdots, n \; h = (b-a)/n$$
e, detto,
$$X_h^1 := \{v \in C^([a;b]) : v_{|[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1, \; i = 1, \cdots, n, \}$$
si ponga
$$V_h := \{v \in X_h^1 : v(a) = v(b) = 0\}$$
3.1) Determinare una base
$$\{\phi_i, \; i = 1, \cdots, n-1\}$$
tale che
$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \; i = 1, \cdots, n-1, \; j = 0, \cdots, n$$
3.2) Mostrare che si può scrivere il problema (2) in forma di sistema lineare
$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$
3.3) Costruire la matrice A utilizzando la forma esplicita della base. A tal fine si utilizzino le matrici
$$(K)_{i,j} := \int_a^b \phi_j' \phi_i' \mathrm{d}x, \quad (H)_{i,j} := \int_a^b \phi_j' \phi_i \mathrm{d}x, \quad (M)_{i,j} := \int_a^b \phi_j \phi_i \mathrm{d}x,$$
e quindi porre
$$A = \alpha K + \beta H + \gamma M.$$
Stabilire sotto quali condizioni la matrice è simmetrica.

Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
A.A. 2009-2010: LCM
Lezione di Laboratorio n. 1

4) IMPLEMENTAZIONE del PUNTO 3)
Si consideri il problema (1)

4.1) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per creare una mesh uniforme su (a, b)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \ x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/N$$

La funzione ha in ingresso gli estremi dell'intervallo (a, b) e il numero di sottointervalli Ne restituisce in uscita un vettore chiamato `mesh` contenente le coordinate dei nodi $\{x_i\}_{i=0}^N$ e il valore h.

4.2) Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per creare, per $i = 1, \cdots, N$ le matrici locali

$$K_i = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_{i-1}\phi'_{i-1}\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i\phi'_{i-1}\mathrm{d}x \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i\phi'_{i-1}\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i\phi'_i\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

$$H_i = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_{i-1}\phi_{i-1}\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i\phi_{i-1}\mathrm{d}x \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_{i-1}\phi_i\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i\phi_i\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

$$M_i = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}\phi_{i-1}\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i\phi_{i-1}\mathrm{d}x \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i\phi_{i-1}\mathrm{d}x & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i\phi_i\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

ove $\phi_j, \ j = 0\cdots, N$ sono le funzioni di base di X_h^1 costruite al punto 3).

4.3) Utilizzando le matrici locali di cui al punto precedente Scrivere una funzione MATLAB o SCILAB per costruire le matrici K, H, M corrispondenti, rispettivamente, alla discretizzazione dei termini

$$\int_a^b u'v'\mathrm{d}x, \ \int_a^b u'v\mathrm{d}x, \ \int_a^b uv\mathrm{d}x,$$

e definire quindi la matrice

$$\tilde{A} = \alpha K + \beta H + \gamma M$$

ed estrarre da $\tilde{A}$ la sottomatrice A corrispondente ai gradi di liberta' del problema.

4.4) Considerare

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \gamma = 1, \ a = 0, \ b = 1$$

e determinare per ogni $N = 10, 20, 40, 80$ i valori $h, \ \mu_2(A)$, riportandoli in uno stesso grafico. Quale relazione intercorre fra h e $\mu_2(A)$?
(*Si ricorda che* $\mu_2(A)$ *indica il numero di condizionamento in norma 2 e per matrici simmetriche risulta* $\mu_2(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$)