Sulle probabilità che una v.a. X assuma valori pari e dispari (quando X assume valori interi non negativi)

In generale sia X una v.a. a valori interi non negativi. Siamo interessati alla probabilità che X assuma un valore pari. Quindi, posto

$$E := \cup_{n\geq 0}\{X = 2n\},$$

siamo interessati a

$$P(E) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n). \tag{1}$$

Ovviamente la probabilità che X assuma un valore dispari è

$$P(E^c) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n+1), \text{ ma anche } P(E^c) = 1 - P(E)$$

e quindi il valore di $P(E^c)$ si ottiene rapidamente da $P(E)$.

In alcuni casi il calcolo in (1) non è agevole e qui presentiamo una formula che può essere più semplice da calcolare. Si fa riferimento alla *funzione generatrice delle probabilità* della v.a. X definita come segue:

$$G_X(t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n).$$

Questa funzione può assumere valori finiti o infiniti; in ogni modo assume un valore finito per $-1 \leq t \leq 1$, ed inoltre si vede subito che $G_X(1) = 1$.

Allora

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n P(X = n) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1^n + (-1)^n) P(X = n);$$

inoltre, osservando che

$$1^n + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

(e ricordando che $G_X(1) = 1$), si ha

$$G_X(1) + G_X(-1) = 2P(E), \quad 1 + G_X(-1) = 2P(E)$$

e quindi

$$P(E) = \frac{1 + G_X(-1)}{2}. \tag{2}$$

Ovviamente in corrispondenza si ha

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1 + G_X(-1)}{2} = \frac{1 - G_X(-1)}{2}.$$

In generale si verifica che $|G_X(-1)| \leq 1$ in accordo con il fatto che $P(E), P(E^c) \in [0,1]$; al contrario non si può dire nulla in generale sul segno di $G_X(-1)$, e quindi non si può dire quale di queste condizioni è vera

$$P(E) > \frac{1}{2} > P(E^c),\ P(E) = P(E^c) = \frac{1}{2},\ P(E) < \frac{1}{2} < P(E^c).$$

Uso della formula (2) **quando** X **ha distribuzione di Poisson.** Se X ha distribuzione di Poisson si ha

$$P(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} e^{-\lambda}.$$

Il calcolo diretto di questa serie non è semplice e conviene fare riferimento alla formula (2).

Iniziamo osservando che

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)};$$

quindi in questo caso $G_X(t)$ assume un valore finito per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora usando la (2) si ottiene

$$P(E) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2};$$

inoltre possiamo dire che

$$P(E^c) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.$$

Osserviamo anche che $G_X(-1) = e^{-2\lambda} > 0$ (per ogni $\lambda > 0$), e quindi si ha

$$P(E) > \frac{1}{2} > P(E^c).$$

In altri termini la probabilità che una Poissoniana assuma un valore pari è maggiore della probabilità che assuma un valore dispari (qualunque sia il valore di λ).