

Un esercizio sullo schema di Bernoulli illimitato

Claudio Macci

Abbiamo g giocatori, che indicheremo con i numeri $1, \dots, g$, che lanciano a turno una moneta la cui probabilità che esca testa è $q \in (0, 1)$; si inizia dal giocatore 1, si procede seguendo l'ordine numerico e, dopo il giocatore g , si riprende nuovamente dal giocatore 1. Vince il giocatore che per la prima volta ottiene testa. Calcolare la probabilità $p_k(q)$ che il giocatore k vinca il gioco, per ogni $k \in \{1, \dots, g\}$.

Risposta

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di lanci necessari affinché esca testa per la prima volta; è noto che $P(X = h) = (1 - q)^{h-1}q$ (per $h \geq 1$ intero) per indipendenza dei lanci di moneta.

Sia $k \in \{1, \dots, g\}$ fissato; allora il giocatore k vince il gioco se e solo se X assume uno dei valori $\{k + hg : h \geq 0\}$. Quindi si ha

$$p_k(q) = \sum_{h \geq 0} P(X = k + hg) = \sum_{h \geq 0} (1 - q)^{k+hg-1} q = q(1 - q)^{k-1} \sum_{h \geq 0} ((1 - q)^g)^h$$

e, sfruttando la nota uguaglianza $\sum_{h \geq 0} a^h = \frac{1}{1-a}$ per $|a| < 1$ (la usiamo per $a = (1 - q)^g$), si ottiene

$$p_k(q) = \frac{q(1 - q)^{k-1}}{1 - (1 - q)^g}.$$

Commento 1

Si ha

$$\sum_{k=1}^g p_k(q) = \sum_{k=1}^g \frac{q(1 - q)^{k-1}}{1 - (1 - q)^g} = \frac{q}{1 - (1 - q)^g} \sum_{k=1}^g (1 - q)^{k-1}$$

e, sfruttando la nota uguaglianza $\sum_{k=1}^g a^{k-1} = \frac{1-a^g}{1-a}$ per $a \neq 1$ (la usiamo per $a = 1 - q$), si ha

$$\sum_{k=1}^g p_k(q) = \frac{q}{1 - (1 - q)^g} \frac{1 - (1 - q)^g}{1 - (1 - q)} = \frac{q}{1 - (1 - q)^g} \frac{1 - (1 - q)^g}{q} = 1.$$

Quindi la probabilità che il gioco duri all'infinito è zero. Del resto la probabilità che non esca mai testa è zero perché $\sum_{h \geq 0} (1 - q)^{h-1} q = 1$.

Commento 2

Si ha $p_1(q) > p_2(q) > \dots > p_{g-1}(q) > p_g(q)$. Quindi, in accordo con l'intuizione, la probabilità di vincere del giocatore k diminuisce al crescere di k .

Commento 3

Consideriamo il seguente rapporto:

$$\frac{p_i(q)}{p_j(q)} = \frac{\frac{q(1-q)^{i-1}}{1-(1-q)^g}}{\frac{q(1-q)^{j-1}}{1-(1-q)^g}} = \frac{(1-q)^{i-1}}{(1-q)^{j-1}} = (1-q)^{i-j}.$$

Quindi, qualunque sia il numero dei giocatori g , tale rapporto dipende da $i - j$, cioè "da quanto sono *distanti* i giocatori i e j ".

Per fissare le idee consideriamo $i < j$ (analoghi ragionamenti si potrebbero fare per $i > j$). Allora questo rapporto è crescente rispetto a $q \in (0, 1)$ (basta osservare che si ha una potenza con esponente negativo dove solo la base dipende da q ed è decrescente in q ; oppure basta verificare che la derivata rispetto a q è negativa). Possiamo dire anche che

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{p_i(q)}{p_j(q)} = 1 \text{ e } \lim_{q \rightarrow 1} \frac{p_i(q)}{p_j(q)} = \infty.$$

Questi risultati sono in accordo con l'intuizione: se aumenta la probabilità q che esca testa in ogni lancio di moneta, il giocatore i trae maggior vantaggio sul giocatore j dal fatto di tirare prima la moneta; tale vantaggio tende a diventare infinitamente grande se q si avvicina ad 1 (si veda il Commento 4) e tende a diventare ininfluente se q si avvicina a 0 (si veda il Commento 5).

Commento 4

Se $q = 1$ si ha testa al primo lancio e vince certamente il giocatore 1. In tal senso la formula per $p_k(q)$ nella Risposta vale anche per $q = 1$ perché abbiamo $p_1(1) = 1$ e $p_2(1) = \dots = p_g(1) = 0$. Inoltre questo risultato è in accordo con quanto diciamo nel Commento 3 perché in particolare si ha $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{p_1(q)}{p_j(q)} = \infty$ per $j \in \{2, \dots, g\}$.

Commento 5

Se $q = 0$ il gioco dura all'infinito e non si ha un vincitore. In effetti, per $q = 0$, non possiamo dare significato ai valori $p_1(q), \dots, p_g(q)$ ottenuti nella Risposta. Però, per il teorema dell'Hopital, per ogni $k \in \{1, \dots, g\}$ si ha

$$\lim_{q \rightarrow 0} p_k(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q(1-q)^{k-1}}{1-(1-q)^g} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{(1-q)^{k-1} + (k-1)(1-q)^{k-2}q}{-g(1-q)^{g-1}(-1)} = \frac{1}{g}$$

(distribuzione uniforme), che corrisponde al caso in cui tutti i giocatori hanno la stessa probabilità di vincere il gioco. Questo è in accordo con quanto diciamo nel Commento 3, cioè $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{p_i(q)}{p_j(q)} = 1$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, g\}$ con $i < j$.