

Also $H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2}(\overset{2}{p_x^2} + p_y^2) + p_x y - p_y x$

$$- \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{[(x-\mu+1)^2 + y^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - \frac{(1-\mu) \cdot y}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x-\mu+1)^2 + y^2]^{3/2}} \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \end{array} \right.$$

Ricerca delle sol. stat., cioè $\dot{p}_x = \dot{p}_y = \dot{x} = \dot{y} = 0$

$$0 = \dot{x} = p_x + y \Rightarrow p_x = -y$$

$$0 = \dot{y} = p_y - x \Rightarrow p_y = x$$

$$0 = \dot{p}_x = x - \frac{(1-\mu) \cdot (x-\mu)}{(z_1)^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{(z_2)^3}$$

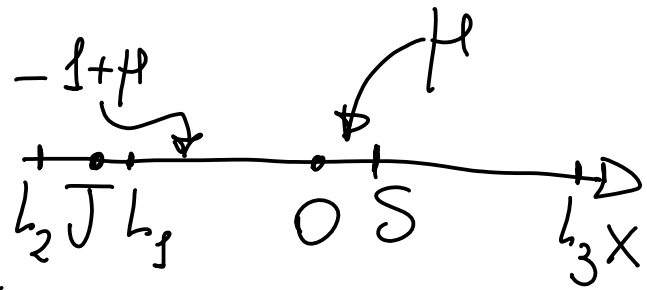
$$0 = \dot{p}_y = y \cdot \left(1 - \frac{1-\mu}{(z_1)^3} - \frac{\mu}{(z_2)^3} \right)$$

$$\text{dove } z_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}$$

$$y=0 \quad \circ \quad \frac{1-\mu}{z_1^3} + \frac{\mu}{z_2^3} = 1$$

$$X = \frac{(1-\mu) \cdot (X-\mu)}{|X-\mu|^3} + \frac{\mu(X-\mu+1)}{|X-\mu+1|^3}$$

Corrisponde a 3 diverse eq. cubiche in X
 a seconda che $X \in (-1+\mu, \mu)$ (cioè tra T e S) o che $X < -1+\mu$ o che $X > \mu$.



Tutte e 3 le eq. ammettono 1! soluzione che chiamiamo L_1, L_2, L_3 . Essi sono t.c.

$$\overline{L_1} = O(\mu), \quad \overline{L_2} = O(\mu), \quad \overline{L_3} = 1 + O(\mu) \text{ per } \mu \rightarrow 0$$

Consideriamo sol. non collineari, cioè

$$\frac{1-\mu}{z_1^3} + \frac{\mu}{z_2^3} = 1, \text{ che può essere risolto sse } z_1 = z_2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-\mu}{1} + \frac{\mu}{1} = 1 - \cancel{\mu} + \cancel{\mu} = 1$$

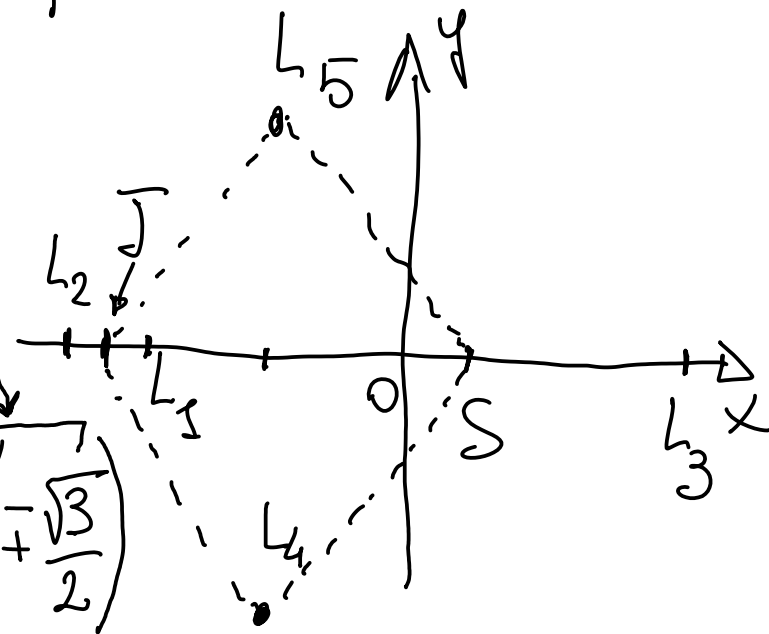
Inoltre $x - (1-\mu)(x-\mu) - \mu(x-\mu+1) =$
 $= \cancel{x} - \cancel{x} + \cancel{\mu x} + \cancel{\mu} - \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu x} + \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu} = 0$

$\Rightarrow \exists$ 2 p.t. di equilibrio "equilatori"

L_4, L_5 di coord. $\left(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Introduciamo

$$\left(P_x = X \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, P_y = Y \pm \frac{1}{2}, x = X + \mu - \frac{1}{2}, y = Y \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



(P_x, P_y, X, Y) sono coord. canoniche

Scriviamo $K = H(P_x, P_y, X, Y) \Big|_{(P_x, P_y, X, Y) = (P_x, P_y, X, Y)}$

Riduciamo K con H .

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x \cdot Y - P_y \cdot X$$

$$- \frac{1-y}{\sqrt{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} - \frac{y}{\sqrt{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

con i termini lineari in P_x, P_y, X, Y che si annullano!

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2} (P_x, P_y, X, Y) Q \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix} + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(X, Y)$$

con f_ℓ di grado ℓ in X, Y (f_ℓ polinomi omogenei)

Non possono comparire termini del tipo
 $f_1(P_x, P_y, X, Y)$ lineari negli argomenti, poiché

$$\left. \begin{aligned}
 0 = \dot{P}_X &= -\frac{\partial H}{\partial X} \Big|_{X=Y=P_X=P_Y=0} = -\frac{\partial f_1}{\partial X} \\
 0 = \dot{P}_Y &= -\frac{\partial H}{\partial Y} \Big|_{X=Y=P_X=P_Y=0} = -\frac{\partial f_2}{\partial Y} \\
 0 = \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial P_X} \Big|_{X=Y=P_X=P_Y=0} = +\frac{\partial f_1}{\partial P_X} \\
 0 = \dot{Y} &= \frac{\partial H}{\partial P_Y} \Big|_{X=Y=P_X=P_Y=0} = +\frac{\partial f_2}{\partial P_Y}
 \end{aligned} \right\} \dot{V}_1 = 0$$

Studiamo la linearizzazione delle eq. del moto, cioè studiamo H in appz. quadratica,

cioè, se scriviamo $f_2 = \frac{1}{2} (P_x, P_y, X, Y) Q \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix}$,
 questo eq. a considerare le eq. del moto:

$$\dot{P}_x = - \frac{\partial f_2}{\partial X}$$

$$\dot{P}_y = - \frac{\partial f_2}{\partial Y}$$

$$\dot{X} = \frac{\partial f_2}{\partial P_x}$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial f_2}{\partial P_y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

sistema di 4 eq. diff. lineari!

Sol. generale della linearizzazione dell'eq. di Ham. vicino a L_4, L_5 sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \\ X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j t}$$

$$\cdot \vec{u}_j$$

autovalori e autofunzioni

di $\mathcal{J}Q$, cioè

$$\lambda_j \text{ sono sol. dell'eq. } \det(\mathcal{J}Q - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

$$\text{Se } \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.038 \dots$$

$$\text{allora } \{\lambda_1, \dots, \lambda_4\} = \{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$$

$$\text{dove } \omega_1 = O(\sqrt{\mu}), \omega_2 = 1 - O(\mu) \text{ per } \mu \rightarrow 0$$

Allora la sol.

$$\sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \underline{u}_j$$

è una comb. lineare di
termini di oscillazione, perché

$$e^{i\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t)$$

di periodo $\frac{2\pi}{\omega_1}$ e, analogamente,

$$e^{i\omega_2 t} = \cos(\omega_2 t) + i \sin(\omega_2 t) \text{ sono di periodo } \frac{2\pi}{\omega_2}.$$