

# Fondamenti (minimi) di meccanica Hamiltoniana

mecc. newtoniana, per  $N$  p.ti materiali  $\Leftrightarrow$  Mecc. lagrangiana

Siano  $(q_1, \dots, q_n)$  le coord.  
libere che descrivono il sistema  
con  $n = 3N - z$  (num. gradi di lib.)

$$\text{Eq. di Lagrange} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

dove  $L = T - U \Rightarrow L = L(q, \dot{q}, t)$

ec. cinetica      ec. pot.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i, \quad U = U(q, t)$$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \Phi_i(x, t)$$

$$g_s(x_1, \dots, x_N, t) = 0$$

$$V_i = 1, \dots, N, \quad V_s = 1, \dots, z$$

s-esime eq. per vincoli

num. dei vincoli

$$F_i = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right)$$

Mec. Lagrangiana  $\iff$  Mec. Hamiltoniana

$$\text{Sia } H = H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \Big|_{\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)} \text{ con}$$

funzione Hamiltoniana che descrive il sistema, dove

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \text{ quindi } p_i = p_i(q, \dot{q}, t) \text{ che \text{\'{e} invertibile}}$$

$$\text{se } \det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$$

Per sistemi meccanici, l'Hamiltoniana \text{\'{e} l'energia!

$$\begin{cases} \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad \forall i=1,\dots,n \quad \begin{matrix} \text{le eq. di Hamilton} \\ \iff \text{le eq. di Lagrange} \end{matrix}$$

Valgono le eq.  
di Hamilton

Def. (di parentesi di Poisson): Siano  $f = f(F, q)$  e  $g = g(F, q)$   
 2 funz. dinamiche, allora

$$\{f, g\}_{(F, q)} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}$$

Oss.: (eq. di Hamilton + par. di Poisson):  $\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \forall i=1, \dots, n$

Oss.:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ; la par. di Poisson è bilineare  $\{\alpha f + \beta g, h\} =$

$$= \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}$$

Def.: Sian  $(F, q) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})$  una trasf. biunivoca

$$\text{Se } \begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \end{cases} \quad \text{con } K = H(F, q) \big|_{(F, q) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})}$$

$$\text{ovvero } K = K(\underline{P}, \underline{Q}) = H(\mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}))$$

allora si dice che  $\mathcal{C}$  è una trasf. canonica!

 Supponiamo di conoscere una transf. canonica

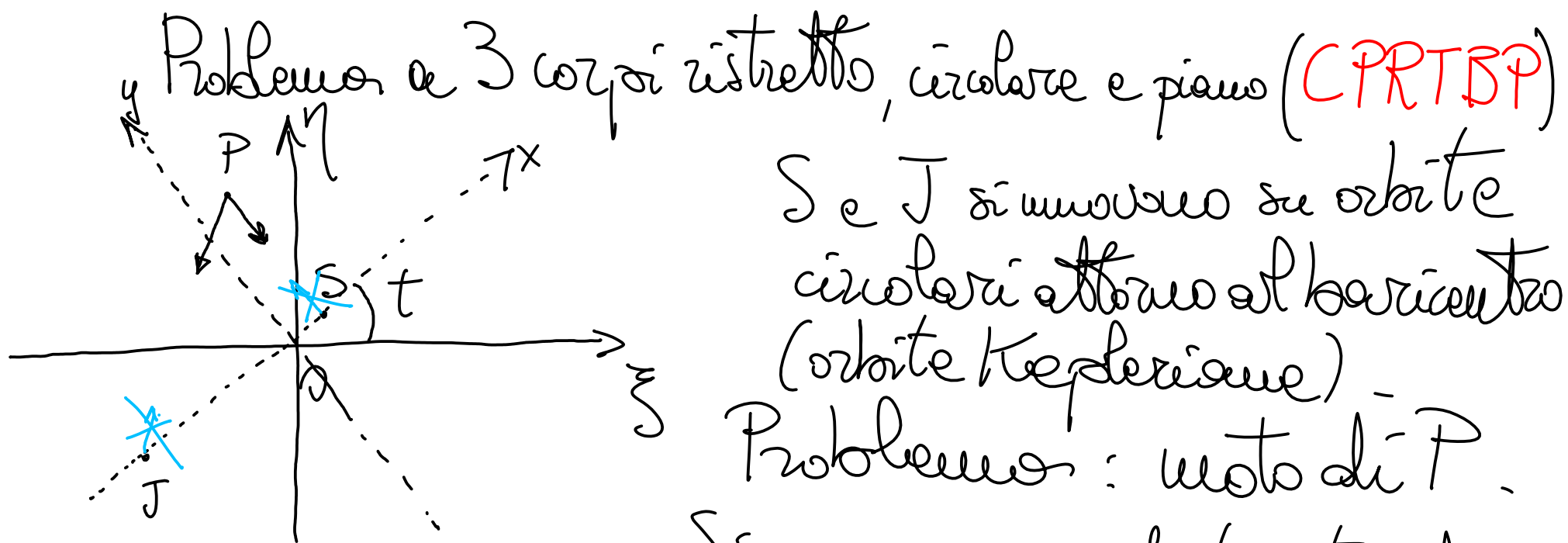
$(\overline{P}, \overline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})$  t.c. - le nuove eq. di Hamilton (\*) sono  
semplici da risolvere, cioè è triviale le sol.  $t \mapsto (\underline{P}(t), \underline{Q}(t))$   
allora  $t \mapsto (\overline{P}(t), \overline{q}(t)) = \mathcal{C}(\underline{P}(t), \underline{Q}(t))$  risolvibile (H).

Prop.: Sia  $S = S(\underline{P}, \underline{q})$  t.c. -  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \overline{P}_i \partial \overline{q}_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$  (•)

allora la transf. di coordinate  $\boxed{Q_i = \frac{\partial S}{\partial \overline{P}_i}, P_i = \frac{\partial S}{\partial \overline{q}_i}} \forall i, j=1,\dots,n$

è canonica! Oss.:  $K = H(\overline{P}, \overline{q}) \mid \overline{P}, \overline{q} = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})$

Prop.: Sia  $S = S(\underline{P}, \underline{q}, t)$  t.c. vale l'ipotesi (•), allora  $Q_i = \frac{\partial S}{\partial \overline{P}_i}, P_i = \frac{\partial S}{\partial \overline{q}_i}$   
 $\forall i, j=1,\dots,n$  è canonica con  $K = K(\underline{P}, \underline{Q}, t) = H(\mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})) + \frac{\partial S}{\partial t}(\underline{P}, \underline{q}, t) \mid \underline{q} = \underline{q}(\underline{P}, \underline{Q}, t)$



Sia  $m_J + m_S = 1$  (unità di massa)

Sia  $G = 1$ , sia  $\overline{SJ} = 1$  (unità di lunghezza)

$\Rightarrow$  (dalla III Keplero):  $T = 2\pi$ . Infatti:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_J + m_S)}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{1^3}{T^2} = \frac{1 \cdot 1}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \text{la vel. ang. dei primari } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1.$$

le eq. di Newton per Puoi dipendono dalla sua massa

$$L(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{SP(\xi, \eta, t)} + \frac{\mu}{SJ(\xi, \eta, t)}$$

dove  $\mu = m_J < m_S$  e  $m_J + m_S = \mu + 1 - \mu = 1$  -

Vogliamo scrivere le eq. del moto rispetto alle coord.  $x, y$ .

$$\begin{cases} x = \xi \cos(t) + \eta \sin(t) \\ y = -\xi \sin(t) + \eta \cos(t) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Introduciamo  $S(P_x, P_y, \xi, \eta, t) = P_x \cdot x + P_y \cdot y \Big|_{\substack{x=x(\xi, \eta, t) \\ y=y(\xi, \eta, t)}}$

$$= P_x \xi \cos(t) + P_x \eta \sin(t) - P_y \xi \sin(t) + P_y \eta \cos(t)$$

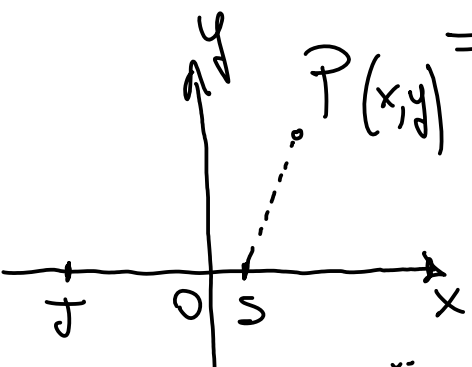
$$\begin{cases} x = \frac{\partial S}{\partial p_x} = \xi \cos(t) + \eta \sin(t) \\ y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = -\xi \sin(t) + \eta \cos(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x \cos(t) - y \sin(t) \\ \eta = x \sin(t) + y \cos(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = p_x \cos(t) - p_y \sin(t) \\ p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = p_x \sin(t) + p_y \cos(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

$$H = H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta, t) = p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} - L(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, t) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\xi} = \dot{\xi}(p_\xi, p_\eta) \\ \dot{\eta} = \dot{\eta}(p_\xi, p_\eta) \end{array} \right\}$$

where  $p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi}$ ,  $p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \dot{\eta}$ ,  $\Rightarrow H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) - \frac{1-\mu}{SP(\xi, \eta, t)} - \frac{\mu}{PJ(\xi, \eta, t)}$

$$K(P_x, P_y, x, y, t) = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{1-\mu}{\overline{SP}(x,y)} - \frac{\mu}{\overline{PJ}(x,y)} + \frac{2S}{2t} \bigg|_{\substack{\xi = \xi(x,y,t) \\ \eta = \eta(x,y,t)}}$$



$$P(x,y) = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{1-\mu}{\overline{SP}(x,y)} - \frac{\mu}{\overline{PJ}(x,y)} - P_x(x \cos(t) - y \sin(t)) \sin(t) + P_x(x \sin(t) + y \cos(t)) \cos(t) - P_y(x \cos(t) - y \sin(t)) \cos(t) - P_y(x \sin(t) + y \cos(t)) \sin(t) =$$

$$\frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{1-\mu}{\overline{SP}(x,y)} - \frac{\mu}{\overline{PJ}(x,y)} + P_x y (\sin^2(t) + \cos^2(t)) - P_y x (\cos^2(t) + \sin^2(t)) =$$

$$\frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x y - P_y x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

coord. di J:  $(\mu-1, 0)$

Howe. nelle nuove coord.

$$\begin{cases} \overline{SJ} = 1 = \overline{OS} + \overline{OJ} \\ (1-\mu)\overline{OS} = \mu\overline{OJ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{OS} = \mu$$

$$\overline{OJ} = 1-\mu$$

$$\text{coord. di J: } (\mu-1, 0)$$

Howe. nelle nuove coord.

Also  $H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x$

$$- \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}} \end{aligned} \right.$$