

la parte quadratica della hamiltoniana
 può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{2} (P_x, P_y, X, Y) Q \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

matrice
 4×4 or coef.
 cost. che dipendono
 dal param. μ

derivate

$\Rightarrow$ le eq. di Ham. linearizzate
 attorno a L_4 o L_5

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = J Q \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

dove J è la matrice fondamentale della geometria симплектика, cioè $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

È importante studiare

l'eq. agli autovalori: $\det(JQ - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$$

mat. 6×6 -dim.

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}$$

Se $27\mu(1-\mu) < 1$
allora abbiamo che λ^2 è a 2 radici

entrambe negative

$$\text{Se } \boxed{27\mu(1-\mu) < 1} \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2$$

dove ω_1 e ω_2 sono reali positivi $\Rightarrow$ la sol -

del prob. linearizzato è del tipo
$$\begin{pmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \\ X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \frac{2}{-j} A_j e^{i\omega_j t} + \frac{2}{j} B_j e^{-i\omega_j t}$$

$\Rightarrow$ si riesce a dare un'espressione come comb.
lin. di $\cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos \omega_2 t, \sin \omega_2 t$

Ci saranno sol. periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega_1}$ e $\frac{2\pi}{\omega_2}$

$$\text{con } \omega_1 \approx 1 + O(\mu), \quad \omega_2 \approx O(\sqrt{\mu})$$

Ciò avviene quando $27\mu(1-\mu) < 1$

$$\Rightarrow \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385 -$$

Studio numerico delle eq. di Hamilton

Siamo interessati a situazioni del tipo

$$H(\underline{y}, \underline{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{w_j(x_j^2 + y_j^2)}{2} + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(\underline{y}, \underline{x})$$

maximi $\nearrow$ $\underline{y}$ $\nwarrow$ *coord.* $\underline{x}$ $\nwarrow$ *pd. superiori di grado ℓ in $(\underline{y}, \underline{x})$*

eq. per l'osc. armonico

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + kx^2 \right)$$

introduciamo $p = \alpha P, x = \frac{X}{\alpha}$
con $\alpha = \sqrt[4]{mk}$, allora

nelle nuove coord. $H = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{mk}}{m} P^2 + \frac{k}{\sqrt{mk}} X^2 \right)$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} (P^2 + X^2) = \frac{\omega}{2} (P^2 + X^2)$$

dove che il periodo di osc. è $T = \frac{2\pi}{\omega}$ con
 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

In particolare consideriamo il modello
 di Henon-Hiles: $H(\underline{y}, \underline{x}) = \frac{1}{2} \omega_1^2 (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2^2 (x_2^2 + y_2^2)$

$$+ x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

parte quadratica
 (degli osc. armonici) che è
 integrabile

parte cubica o di perturbazione

Metodi di integrazione numerica ^{simplettici}

Prop. fondamentale: Sia Ψ_τ una mappa simplettica (è una trsf. canonica) che dipende dal passo di integrazione τ , sia H una ham.t.c.

$$(*) \quad \left| \Psi_\tau(p, q) - \Phi_H^\tau(p, q) \right| = O(\tau^{k+1}),$$

dove Φ_H^τ è il flusso indotto da H per un tempo τ (cioè $\Phi_H^t(p(0), q(0)) = (p(t), q(t))$ t.c. $(p(t), q(t))$ è la sol. al tempo t che origina dalle cond. iniz. $(p(0), q(0))$), quindi l'eq. (*) dice

che Ψ_τ è ^{metodo di} un integr. num. di ordine k ; allora I una
 Ham. (K_τ) che è vicina a H nel senso che $|H - K_\tau| = O(\tau^k)$
 e $|\Psi_\tau - \Phi_{K_\tau}^\tau| = O\left(\tau \exp\left(-\frac{\tau_*}{\tau}\right)\right)$ — dove τ_* è una cost.
 positiva

→ per $\tau \rightarrow 0$, $\exp\left(-\frac{\tau_*}{\tau}\right)$ molto più rapidamente
 di qualsiasi legge di potenza

Supprimiamo di poter scrivere la Ham. nella
 forma $H = A + B$, dove sia A che B sono
 separatamente integrabili; allora possiamo
 scrivere degli integratori симпlettici, alternando

il flusso lungo A (che è una trasf. conv.) e
 " " " " B (" " " " ") e

Serie di lie.

$$\mathbb{P}^1 = \{A, H\}$$

$$\text{dof} \left[\begin{matrix} p \\ f, H \end{matrix} \right] = \sum_{j=1}^n \frac{2p}{2f} \frac{H}{2q_j} \frac{1}{2p_j}$$

$$\Rightarrow f(p(t), q(t)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j$$

derivata j-esimă
împ. alt timp, calculată în $t=0$

$$\rightarrow \mathcal{P}^{(j)} = \mathcal{P} \circ \{A, H\} = L_H \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow \dot{f}^{(2)} = \frac{d}{dt} \dot{f} = \{ \dot{f}, H \} = \{ \{ f, H \}, H \} = L_H^2 f$$

$$\Rightarrow f(p(t), q(t)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} L_H^j f \stackrel{!}{=} \exp(t L_H) f$$

$$\Phi_H^t(p(0), q(0))$$

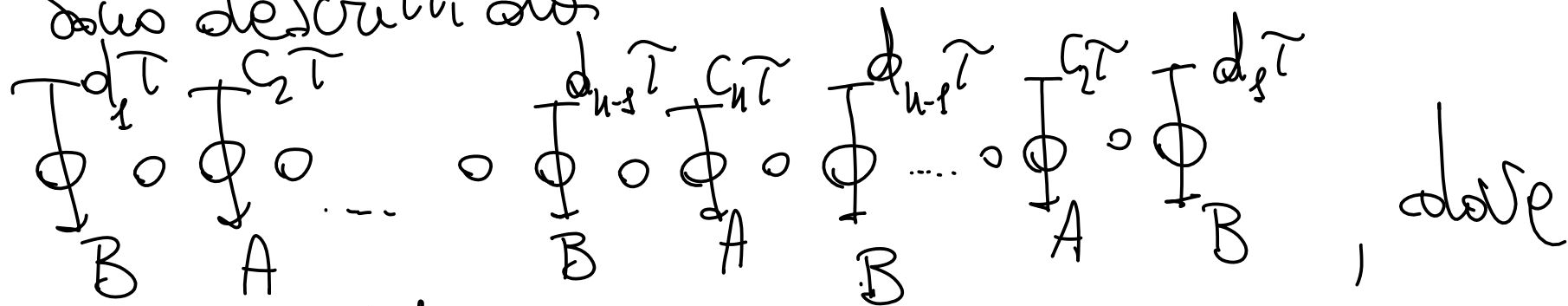
Metodo leap-frog.

Sei $H = A + B$, allora

$$\begin{aligned} \Phi_H^t(p, q) &= \exp(t L_{A+B}) (p, q) = O(t^3) \exp(t L_B) \exp(t L_A) \exp(t L_B) (p, q) \\ &= \Phi_B^{t/2} \left(\Phi_A^t \left(\Phi_B^{t/2} (p, q) \right) \right) + O(t^3) \end{aligned}$$

Famiglia di integratori del tipo S_{BAB_n}

sono descritti da



$$2 \cdot \sum_{j=2}^{n-1} C_j + C_n = 1$$

$$2 \sum_{j=2}^{n-1} d_j = 1$$

ovvio perché il tempo totale dei flussi lungo A e lungo B deve essere $=$

Se $H = A + \varepsilon B$ dove ε è un piccolo parametro

allora l'errore introdotto da S_{BAB_n} con $n \geq 2$ è $= O(\varepsilon^2 \tau^3)$

Con il correttore si arriva a $S_{BAB_n C_n} = O(\varepsilon^2 \tau^5)$

Per Hande - Heiles:

$$H = A\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + B(x)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j}{2} (x_j^2 + y_j^2)$$

$$= x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

de la parición poros.

Piu semplicemente, poniamo

$$H = A\left(\begin{matrix} y \\ \varphi \end{matrix}\right) + B\left(\begin{matrix} x \\ \varphi \end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j}{2} y_j^2$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} x_j^2 + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

Sol - per i flussi lungo A e B

$$A: \begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 y_1 \\ \dot{x}_2 = \omega_2 y_2 \\ \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi_A(y_1, y_2, x_1, x_2) = (y_1, y_2, x_1 + \omega_1 y_1 \tau, x_2 + \omega_2 y_2 \tau)$$

$$B: \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 x_1 - 2x_1 x_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_2 x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \Phi_B(y_1, y_2, x_1, x_2) = (y_1 - (\omega_1 x_1 + 2x_1 x_2)\tau, y_2 - (\omega_2 x_2 - x_1^2 + x_2^2)\tau, x_1, x_2)$$

Nel programma vogliamo fare

