

# 6

## ESPLORAZIONE NUMERICA

Passiamo ora a discutere il caso più complesso della dinamica di sistemi composti da due o più elementi oscillanti. Sistemi di questo genere sono molto frequenti nelle applicazioni a modelli fisici. Per fare alcuni esempi, si pensi al sistema solare, in cui ogni pianeta si muove in prima ed ottima approssimazione su un'orbita kepleriana caratterizzata da una frequenza specifica, alle molecole, dotate di frequenze proprie di vibrazione, alle corde degli strumenti musicali, le cui frequenze proprie stanno alla base dell'armonia, e così via.

La fenomenologia più interessante si osserva nel caso di sistemi conservativi e su questi concentreremo la nostra attenzione in questo capitolo. Lo studio procede solitamente in due tappe. Dapprima si esaminano i cosiddetti *sistemi integrabili*, caratterizzati dai cosiddetti *moti quasi-periodici*. I modelli che abbiamo elencato sopra rientrano in questa categoria. In un secondo tempo si studia il caso in cui i sistemi siano soggetti a perturbazioni. Ad esempio, nel caso del sistema solare si considera l'interazione tra i pianeti; per le molecole o per la corda si tiene conto della non linearità delle forze agenti. I sistemi che rientrano in questa seconda categoria presentano comportamenti particolarmente complessi, e sono ancor oggi argomento di ricerca in quanto molti problemi restano insoluti.

Nella prima parte di questo capitolo esporremo alcuni aspetti essenziali della dinamica dei sistemi integrabili. Successivamente passeremo ad illustrare il comportamento dinamico dei sistemi perturbati, ricorrendo pesantemente alla simulazione numerica. La trattazione dei metodi analitici che si usano in questi casi, ovvero della cosiddetta *teoria delle perturbazioni*, è argomento che esula dallo scopo di queste note.

I metodi usati in questo capitolo impongono qualche considerazione sull'uso dei metodi numerici nella simulazione della dinamica, e soprattutto sull'atteggiamento che viene assunto qui, e che può apparire ingenuo: si prende un modello dinamico semplice, e se ne osserva il comportamento simulando la dinamica al calcolatore. Già a questo livello si ha modo di

scoprire una serie di fenomeni estremamente interessanti. Si tratta di una approccio che è stato oggetto in passato – e soprattutto negli anni '70 del secolo ormai trascorso – di molte critiche, spesso aspre e seguite talvolta da giudizi stroncanti sull'attività di alcuni ricercatori. Se il tempo – come regolarmente accade – ha sopito le polemiche, resta però il problema di assumere un atteggiamento corretto di fronte alla simulazione numerica.

Va da sé che la pura simulazione della dinamica non ha la forza di una dimostrazione matematica. È altrettanto vero – e la storia della ricerca degli ultimi cinquant'anni lo ha ampiamente dimostrato – che la simulazione numerica costituisce ormai uno strumento insostituibile per lo studio della dinamica di sistemi non lineari. È appena il caso di ricordare, ad esempio, come un fenomeno di rilevanza fondamentale quale l'intersezione omoclina e del comportamento caotico che ne consegue sia stato intuito ed esposto da Poincaré intorno al 1890, ma sia divenuto oggetto di conoscenza comune e di studio solo dopo il 1960, quando l'uso del calcolatore lo ha imposto con forza all'attenzione di tutti.

È opinione personale dell'autore di queste note che l'atteggiamento corretto nei confronti dell'uso del calcolatore nella simulazione dinamica sia quello assunto da M. Hénon in risposta ad una domanda specifica sull'attendibilità dei risultati dell'esplorazione numerica:<sup>1</sup>

“ Il est certain qu'on ne peut rien prouver, au sens mathématique du terme, par des calculs de ce genre. Ce travail est à ranger dans la catégorie des expériences numériques, qui à mon avis ont la même valeur, ni plus ni moins, que des expériences de physique. ”

## 6.1 Moti quasi-periodici

Il fenomeno che vogliamo descrivere in questo paragrafo è il comportamento di sistemi la cui dinamica è caratterizzata da due o più frequenze distinte. Un tal comportamento è tipico dei cosiddetti *sistemi integrabili*, che hanno un ruolo essenziale almeno nel descrivere la dinamica su tempi non troppo lunghi in molte situazioni.

### 6.1.1 Oscillatori disaccoppiati

Il modello più semplice consiste nel considerare un sistema di due oscillatori armonici indipendenti, descritti dalle equazioni

$$(6.1) \quad \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_2 .$$

---

<sup>1</sup> “È certo che calcoli del genere non dimostrano nulla nel senso matematico del termine. Questo lavoro si deve collocare nella categoria delle esperienze numeriche, che a mio parere hanno lo stesso grado di validità, né più né meno, delle esperienze di fisica.” La citazione è tratta dalla discussione riportata alla fine del lavoro [25].

Si tratta in pratica del moto di un punto nel piano soggetto ad un potenziale

$$(6.2) \quad V(x_1, x_2) = \frac{\omega_1^2}{2}x_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}x_2^2 .$$

È comodo riscrivere le (6.1) sotto forma di sistema di quattro equazioni lineari sullo spazio delle fasi  $\mathbb{R}^4$ , introducendo le variabili  $y_1, y_2$  in modo che le equazioni abbiano la forma normale per un punto di centro, ossia

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega y_1, & \dot{y}_1 &= -\omega_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \omega y_2, & \dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2. \end{aligned}$$

Il lettore che abbia familiarità con la Meccanica Analitica osserverà immediatamente che si tratta delle equazioni canoniche per il sistema con Hamiltoniana<sup>2</sup>

$$(6.4) \quad H(x, y) = \frac{\omega_1}{2}(y_1^2 + x_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(y_2^2 + x_2^2) .$$

La scrittura delle soluzioni è faccenda elementare, dal momento che si tratta della giustapposizione di due equazioni dell'oscillatore armonico che abbiamo già visto. L'aspetto su cui vogliamo insistere invece è la dinamica nello spazio delle fasi.

Introduciamo le variabili d'angolo-azione  $I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2$  con la consueta trasformazione  $x_j = \sqrt{2I_j} \cos \vartheta_j, y_j = \sqrt{2I_j} \sin \vartheta_j$ . Ricaviamo così il sistema

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 0, & \dot{\vartheta}_1 &= -\omega_1, \\ \dot{I}_2 &= 0, & \dot{\vartheta}_2 &= -\omega_2. \end{aligned}$$

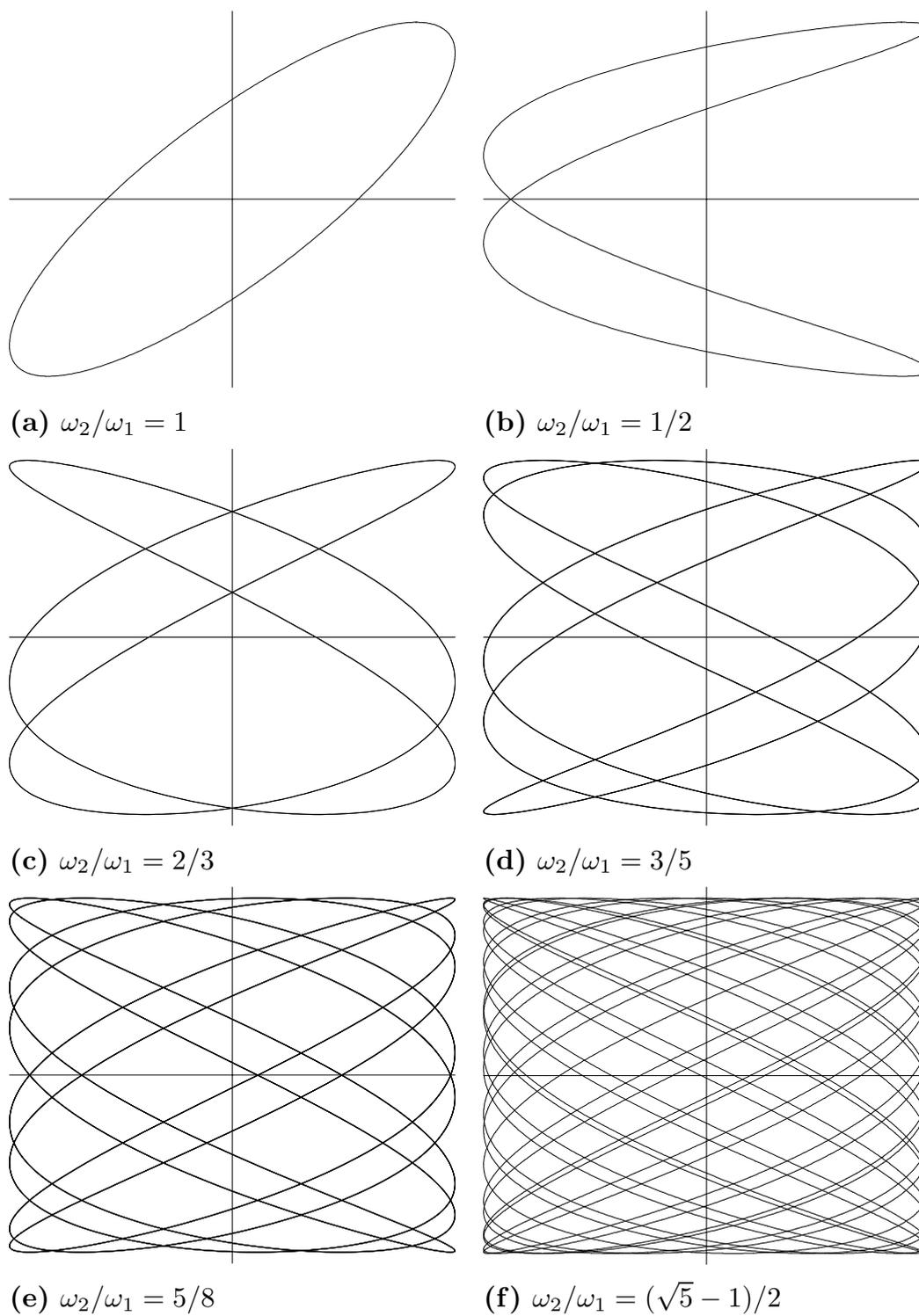
La forma stessa delle equazioni ci dice che il sistema ammette i due integrali primi  $I_1, I_2$ , che sono le azioni degli oscillatori, o equivalentemente le loro energie  $E_1 = \omega_1 I_1, E_2 = \omega_2 I_2$ . La dinamica quindi si svolge su una superficie bidimensionale, immersa nello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^4$ , formata dal prodotto cartesiano di due circonferenze, ovvero su un toro  $\mathbb{T}^2$  a due dimensioni parametrizzato dalle azioni, e descritto dai due angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , ovvero dalle fasi degli oscillatori. Le fasi a loro volta evolvono linearmente nel tempo con velocità angolare costante  $\omega_1, \omega_2$ .

Se si rappresentano le orbite degli oscillatori sul piano  $x_1, x_2$  si ottengono le ben note *figure di Lissajous*, rappresentate in figura 6.1. La forma dell'orbita dipende dal rapporto  $\omega_2/\omega_1$  tra le frequenze. Per chi non abbia dimestichezza con questi fenomeni può già essere sorprendente il fatto che l'orbita sia chiusa, e quindi il moto sia periodico, se e solo se il rapporto tra le frequenze è un numero razionale.

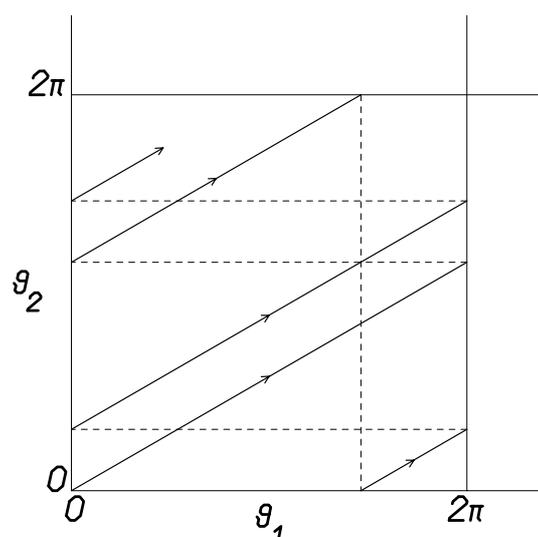
Le considerazioni che abbiamo svolto qui si estendono in modo del tutto naturale e diretto al caso di un numero arbitrario  $n$  di oscillatori. Lo spazio

---

<sup>2</sup> Qui usiamo la notazione abbreviata  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , e simili per le altre variabili.



**Figura 6.1.** Le traiettorie nel piano  $x_1, x_2$  generate da due movimenti oscillatori lungo i due assi, con frequenze diverse. Nelle figure (a)–(e) il rapporto tra le frequenze è razionale, e la curva è chiusa. Nella figura (f) il rapporto è irrazionale, e la curva non si richiude su se stessa.



**Figura 6.2.** Ad illustrazione del moto quasi periodico sul toro  $\mathbb{T}^2$ . Il toro è rappresentato dal quadrato di lato  $2\pi$ ; l'orbita è una retta con coefficiente angolare  $\omega_2/\omega_1$ . Il grafico viene tracciato riportando tutti i punti della retta nel quadrato, con un'operazione  $(\text{mod } 2\pi)$ .

delle fasi diventa  $\mathbb{R}^{2n}$ , e le equazioni si scrivono

$$(6.6) \quad \dot{x}_j = \omega_j y_j, \quad \dot{y}_j = -\omega_j x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

In variabili d'angolo-azione le equazioni diventano

$$(6.7) \quad \dot{I}_j = 0, \quad \dot{\vartheta}_j = -\omega_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

e sono caratterizzate, come ben si vede, dall'esistenza di  $n$  integrali primi indipendenti  $I_1, \dots, I_n$ .

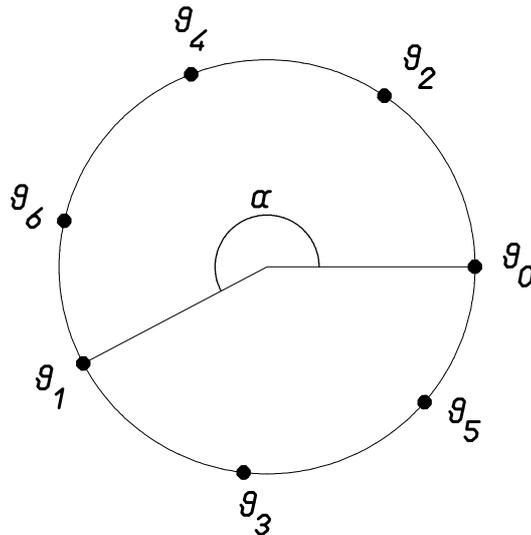
### 6.1.2 Il flusso di Kronecker sul toro

Consideriamo anzitutto il toro  $\mathbb{T}^n$ , descritto mediante le coordinate angolari  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ . Il flusso

$$(6.8) \quad \vartheta_1 = \omega_1 t + \vartheta_1^0, \quad \vartheta_n = \omega_n t + \vartheta_n^0,$$

dove  $\vartheta_1^0, \dots, \vartheta_n^0$  sono delle costanti che rappresentano le fasi iniziali, viene detto *flusso di Kronecker* sul toro. Il lettore osserverà che si tratta proprio del flusso indotto dalle equazioni (6.6), a parte un inessenziale cambiamento di segno.

Per illustrare il comportamento delle orbite consideriamo anzitutto il caso  $n = 2$ . Un metodo comune, e comodo, consiste nel rappresentare  $\mathbb{T}^2$  mediante il quadrato di lato  $2\pi$  nel piano  $\mathbb{R}^2$  descritto dalle coordinate  $\vartheta_1, \vartheta_2$ : due punti  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$  e  $(\vartheta'_1, \vartheta'_2)$  del piano sono considerati equivalenti se  $\vartheta_1 - \vartheta'_1$  e  $\vartheta_2 - \vartheta'_2$  sono multipli interi di  $2\pi$ . Eliminando il tempo  $t$  tra le (6.8) (che



**Figura 6.3.** Ad illustrazione della mappa del cerchio su se stesso definita dalla rotazione di un angolo  $\alpha$ . La mappa qui rappresentata è la riduzione al cerchio dell'orbita sul toro  $\mathbb{T}^2$  della figura 6.2.

qui si riferiscono a due soli angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) si trova che l'orbita è la retta

$$\omega_2(\vartheta_1 - \vartheta_1^{(0)}) - \omega_1(\vartheta_2 - \vartheta_2^{(0)}) = 0 ,$$

dove  $\vartheta_1^{(0)}$  e  $\vartheta_2^{(0)}$  sono le fasi iniziali. Senza perdita di generalità si può assumere  $\vartheta_1^{(0)} = \vartheta_2^{(0)} = 0$ , ossia che l'orbita passi per l'origine, sicché possiamo limitarci a considerare la retta  $\omega_2\vartheta_1 - \omega_1\vartheta_2 = 0$ . Ovviamente, tutti i punti della retta devono essere riportati nel quadrato di lato  $2\pi$  riducendo  $(\text{mod } 2\pi)$  le coordinate, come illustrato in figura 6.2; i vari segmenti che così si ottengono non possono intersecarsi.

Lo studio dell'orbita può ricondursi a quello della mappa di Poincaré generata dalle intersezioni successive della retta con il segmento  $[0, 2\pi)$  dell'asse  $\vartheta_2$ ; si vede subito che tali intersezioni sono rappresentate dalla successione

$$0, \alpha \pmod{2\pi}, 2\alpha \pmod{2\pi}, \dots, s\alpha \pmod{2\pi}, \dots ,$$

con

$$(6.9) \quad \alpha = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} .$$

Si ha quindi, di fatto, una mappa del cerchio su sé stesso definita mediante una rotazione di un angolo  $\alpha$ , come illustrato in figura 6.3. La semplicità della mappa non deve ingannare: il lettore che ancora non abbia familiarità con questi fenomeni sarà forse sorpreso dall'enunciato della seguente

**Proposizione 6.1:** *La successione  $\{s\alpha \pmod{2\pi}\}_{s \geq 0}$  sulla circonferenza è periodica se e solo se  $\alpha/(2\pi)$  è un numero razionale; se  $\alpha/(2\pi)$  è irrazionale la successione è densa sulla circonferenza.*

**Dimostrazione.** Perché la successione sia periodica occorre e basta che esista un intero  $s \neq 0$  soddisfacente la relazione  $s\alpha \pmod{2\pi} = 0$ , ossia  $s\alpha = 2r\pi$ , con  $r$  intero; questo implica  $\alpha/(2\pi) = r/s$ , che è un numero razionale. Se  $\alpha/(2\pi)$  è irrazionale, la successione è formata da infiniti punti distinti. Poiché la circonferenza è compatta, questa successione ha almeno un punto di accumulazione; quindi per qualunque  $\varepsilon > 0$  esistono due interi  $s, r$  tali che  $|(s\alpha - r\alpha) \pmod{2\pi}| < \varepsilon$ . Detto  $j = |s - r|$ , si ha anche  $|k\alpha - (k + j)\alpha \pmod{2\pi}| < \varepsilon$  per ogni  $k$ ; allora la sottosuccessione  $\{j\alpha \pmod{2\pi}\}_{j \geq 0}$  suddivide la circonferenza in intervalli contigui di lunghezza inferiore a  $\varepsilon$ , sicché qualunque intervallo di lunghezza  $\varepsilon$  contiene almeno un punto della sottosuccessione. L'asserto segue dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ . Q.E.D.

**Corollario 6.2:** *L'orbita (6.8) sul toro  $\mathbb{T}^2$  è periodica se e solo se  $\omega_2/\omega_1$  è un numero razionale; se  $\omega_2/\omega_1$  è irrazionale l'orbita è densa sul toro  $\mathbb{T}^2$ .*

L'asserto è conseguenza elementare della proposizione 6.1.

Nel caso di rapporto razionale tra le frequenze si dice che c'è una *risonanza*, che si scrive anche nella forma  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$  con  $k_1, k_2$  interi non ambedue nulli. Assumendo che gli interi  $k_1$  e  $k_2$  siano primi tra loro si dice che  $|k_1| + |k_2|$  è l'*ordine della risonanza*. Questi concetti hanno un ruolo fondamentale nel determinare la dinamica dei sistemi perturbati: ne vedremo presto molti esempi.

### 6.1.3 Estensione al caso di più dimensioni: il modulo di risonanza

Per il caso  $n > 2$  occorre generalizzare in modo opportuno la rappresentazione del toro  $\mathbb{T}^n$ , ed in particolare il concetto di risonanza.

La rappresentazione si generalizza in modo elementare: basta considerare il cubo  $n$ -dimensionale di lato  $2\pi$  in  $\mathbb{R}^n$ , riducendo  $\pmod{2\pi}$  le coordinate di tutti i punti di  $\mathbb{R}^n$ . Anche in questo caso l'orbita (6.8) è una retta in  $\mathbb{R}^n$ ; considerando ancora le intersezioni successive di questa retta col cubo a  $n - 1$  dimensioni definito da  $\vartheta_1 = 0$  si riconduce lo studio a quello di una mappa del toro  $\mathbb{T}^{n-1}$  su se stesso, definita come prodotto di  $n - 1$  rotazioni della circonferenza.

Per lo studio delle proprietà di periodicità dell'orbita si procede come segue. Dato il vettore delle frequenze  $\omega \in \mathbb{R}^n$  si introduce il corrispondente *modulo di risonanza*  $\mathcal{M}_\omega \subset \mathbb{Z}^n$  definito come<sup>3</sup>

$$(6.10) \quad \mathcal{M}_\omega = \{m \in \mathbb{Z}^n : m \cdot \omega = 0\}$$

(qui si è fatto uso della notazione  $m \cdot \omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ ). La struttura algebrica di modulo di  $\mathcal{M}_\omega$  si ricava direttamente dalla definizione. La dimensione  $\dim \mathcal{M}_\omega$  viene detta *molteplicità della risonanza*, e rappresenta il numero di relazioni di risonanza indipendenti che sussistono tra le frequenze

---

<sup>3</sup> Geometricamente: si considera  $\mathbb{Z}^n$  immerso in  $\mathbb{R}^n$ ; il modulo  $\mathcal{M}_\omega$  si ottiene intersecando  $\mathbb{Z}^n$  con il piano di dimensione  $n - 1$  ortogonale a  $\omega$ .

$\omega_1, \dots, \omega_n$ . I casi estremi sono  $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$  e dunque  $\mathcal{M}_\omega = \{0\}$ , che viene detto caso di *non risonanza*, ed il caso di *risonanza completa*  $\dim \mathcal{M}_\omega = n-1$ . Per  $n = 2$  questi sono gli unici casi che si presentano; per  $n > 2$  invece si possono verificare tutte le situazioni intermedie.

La generalizzazione del corollario 6.2 al caso di dimensione  $n$  può enunciarsi come segue.

**Proposizione 6.3:** *Sia  $\mathbb{T}^n$  il toro a  $n$  dimensioni descritto dalle coordinate  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ , e sia*

$$(6.11) \quad \vartheta(t) = \vartheta^{(0)} + \omega t \pmod{2\pi}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n,$$

*un'orbita sul toro; sia inoltre  $\mathcal{M}_\omega$  il modulo di risonanza associato a  $\omega$ . Allora*

- i. l'orbita è periodica se e solo se  $\dim \mathcal{M}_\omega = n - 1$ ;*
- ii. se  $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ , allora l'orbita è densa sul toro  $\mathbb{T}^n$ ;*
- iii. se  $0 < \dim \mathcal{M}_\omega < n - 1$ , allora l'orbita riempie densamente un toro di dimensione  $n - \dim \mathcal{M}_\omega$  contenuto in  $\mathbb{T}^n$ .*

La dimostrazione di questa proposizione richiede l'uso di diversi altri risultati che esulano dagli scopi di queste note. Ci limitiamo a mostrare nel prossimo paragrafo come si possa ricondurre la dimostrazione a quella del solo punto (iii) della proposizione.

#### 6.1.4 Gli automorfismi del toro

Gli argomenti che esponiamo qui si applicano ad una dimensione  $n$  arbitraria, anche se il lettore troverà probabilmente utile costruirsi degli esempi in dimensione 2 in modo da poter ricorrere alla rappresentazione grafica.

La domanda che ci poniamo è se sia possibile identificare delle trasformazioni lineari del piano che siano contemporaneamente anche trasformazioni di coordinate sul toro  $\mathbb{T}^n$ .

Riformuliamo la domanda in termini più precisi. Ricordiamo che il toro  $\mathbb{T}^n$  può rappresentarsi considerando il solo cubo  $[0, 1)^n$ . Consideriamo la trasformazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  su sé stesso

$$x' = Ax.$$

La richiesta di compatibilità con la struttura del toro si riformula chiedendo che punti equivalenti di  $\mathbb{R}^n$  vengano mandati in punti equivalenti. Con un attimo di riflessione ci si rende conto che ciò accade se la matrice  $A$  ha elementi interi. D'altra parte se si chiede che la trasformazione sia anche invertibile allora anche la matrice  $A^{-1}$  deve avere elementi interi, il che è garantito se vale  $\det A = \pm 1$ . Le matrici che hanno queste proprietà vengono chiamate *unimodulari*.

Vediamo ora cosa accade al flusso di Kronecker sotto l'azione di una trasformazione delle coordinate angolari sul toro. Ricordando che per il flusso di Kronecker vale  $\dot{x} = \omega$ , calcoliamo

$$\dot{x}' = A\dot{x} = A\omega.$$

Dunque il cambiamento di coordinate angolari si riflette in un cambiamento delle frequenze del flusso di Kronecker.

Vi sono due aspetti che qui ci interessano in modo particolare. Il primo è che il cambiamento delle frequenze modifica anche il modulo di risonanza, ma non la sua dimensione: il numero di relazioni di risonanza indipendenti non dipende dalla scelta delle coordinate angolari sul toro. Lasciamo al lettore la verifica di questa affermazione. Il secondo aspetto è che si possono sempre rideterminare le coordinate angolari in modo da annullare un numero di frequenze pari alla dimensione del modulo di risonanza. Questo secondo aspetto richiede un supplemento di spiegazione.

Assegnate le frequenze  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  è univocamente definito il modulo di risonanza  $\mathcal{M}_\omega$ . Consideriamo una base di questo modulo, e denotiamone gli elementi con  $k_j = (k_{j,1}, \dots, k_{j,n})$  con  $j = 1, \dots, s$  dove  $s = \dim \mathcal{M}$ . Ovviamente vale  $\langle k_j, \omega \rangle = 0$ , per la definizione stessa di modulo di risonanza. Disponiamo gli  $s$  vettori della base di  $\mathcal{M}$  in una matrice rettangolare  $s \times n$

$$B = \begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s,1} & \dots & k_{s,n} \end{pmatrix} .$$

Ora, dal fatto che i vettori  $k_j$  formano una base di un modulo di risonanza segue che è possibile completare la matrice  $B$  aggiungendo  $n - s$  righe in modo che ne risulti una matrice unimodulare.<sup>4</sup>

Supponiamo dunque di aver costruito una matrice  $A$  della forma

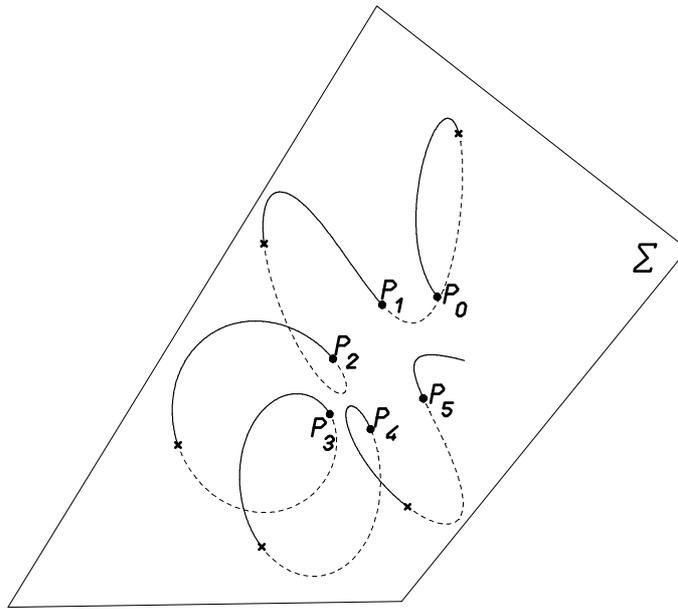
$$A = \begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s,1} & \dots & k_{s,n} \\ \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-s,1} & \dots & \lambda_{n-s,n} \end{pmatrix}$$

che sia unimodulare. È allora immediato verificare che le frequenze trasformate sono

$$A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega'_{s+1} \\ \vdots \\ \omega'_n \end{pmatrix}, \quad \omega'_j = \sum_{k=1}^{n-s} \lambda_{s+j,k} \omega_k ,$$

---

<sup>4</sup> Naturalmente, le righe aggiunte devono contenere solo elementi interi, ed il determinante della matrice completata deve essere  $\pm 1$ . L'affermazione è di facile comprensione, ma la dimostrazione non è banale. Rimandiamo per questo ai testi di algebra.



**Figura 6.4.** Ad illustrazione del metodo della sezione di Poincaré. La superficie  $\Sigma$  è la superficie di sezione. L'orbita uscente dal punto  $P_0$  in una certa direzione interseca successivamente la superficie, nella stessa direzione, nei punti  $P_1$ ,  $P_2$  e così via.

ossia che tutte e sole le prime  $s$  frequenze sono nulle. Che queste si annullino segue dal fatto che le prime  $s$  righe della matrice  $A$  sono costituite da vettori che fanno parte del modulo di risonanza; che le frequenze rimanenti  $\omega'_{s+1}, \dots, \omega'_n$  siano non nulle segue dal fatto che i vettori  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}$  non possono appartenere al modulo di risonanza, per costruzione.

Ne concludiamo che si possono scegliere le coordinate sul toro in modo che il flusso lasci costanti  $s$  angoli, mentre gli  $n - s$  rimanenti sono soggetti ad un flusso di Kronecker con frequenze non risonanti.

### 6.1.5 Una nota sulla sezione di Poincaré

L'applicazione del metodo della sezione di Poincaré a sistemi a più dimensioni è un'estensione sostanzialmente naturale e diretta dell'uso che ne abbiamo fatto fin qui. Anche in questo caso si potrà parlare, in generale, solo di sezione locale: in un punto dello spazio delle fasi si determina una superficie trasversale al campo vettoriale, e questa resta trasversale, per continuità, in un intorno del punto. Naturalmente non avremo più a disposizione risultati tipo quello del lemma 4.9, che assicura che la successione delle intersezioni successive di un'orbita con la sezione locale è monotona.

Nel caso di un sistema di equazioni in uno spazio delle fasi di dimensione tre il metodo della sezione conduce in modo naturale a rappresentare le orbite come una successione di punti su un piano (o un dominio opportuno del piano): basta a tal fine introdurre una carta sulla sezione locale.

Il procedimento è illustrato in figura 6.4. È alquanto utile però osservare che il procedimento si applica anche ad un sistema del tipo descritto dalle equazioni (6.3), quando si possa determinare un integrale primo. In quel caso, ad esempio, si può osservare che le equazioni ammettono come integrale primo l'energia totale

$$E = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2) ,$$

ovvero la somma delle energie degli oscillatori. Del resto, questa funzione altro non è che l'Hamiltoniana (6.4). Le orbite giacciono dunque sulla superficie dell'energia, che è topologicamente una superficie sferica (o ellittica) tridimensionale in  $\mathbb{R}^4$ . Una superficie di sezione (che essendo trasversale alle orbite deve essere trasversale anche alla superficie dell'energia) ha dimensione due, e può ancora rappresentarsi sul piano.

Illustriamo il procedimento in maggior dettaglio, perché è esattamente quello che faremo tra poco per un sistema non lineare. Fissiamo una superficie dell'energia con  $E \neq 0$ , e prendiamo come superficie di sezione il piano  $x_1 = 0$ : si verifica rapidamente che tale piano è effettivamente trasversale al flusso. Fissato poi un punto  $(x_2, y_2)$  arbitrario, si ricava subito  $y_1$ , a meno del segno, essendo

$$y_1^2 = E - \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2) .$$

Una volta fissato il segno, ad esempio positivo, un punto sul piano  $x_2, y_2$  determina in modo univoco il punto  $(0, x_1, y_1, y_2)$  nello spazio delle fasi, dove  $y_1$  deve essere ricavato mediante la formula sopra, tenendo fissa l'energia  $E$ .

Immaginare come si svolge la dinamica sul piano  $(x_2, y_2)$  è un buon esercizio. Si deve seguire l'orbita fino all'intersezione successiva col piano  $x_1 = 0$ , avendo cura di selezionare solo i punti con  $y_1$  positivo. In tal modo si ottiene una mappa che associa al punto  $(x_2, y_2)$  il suo evoluto  $\phi^\tau(x_2, y_2)$ , dove  $\tau$  è il tempo a cui avviene la sezione. L'orbita della mappa in quel piano è una successione di punti generata dalle intersezioni successive dell'orbita del sistema di equazioni differenziali col piano di sezione. È utile tener ben presente che in tal modo si rappresentano sul piano  $x_2, y_2$  dei punti che giacciono sull'emisfero positivo della superficie dell'energia.

Con un attimo di riflessione ci si renderà conto facilmente che nel caso che stiamo esaminando tutti i punti di un'orbita giacciono su una circonferenza: ciò è conseguenza del fatto che anche l'azione  $I_2 = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2)$  è un integrale primo. In effetti, la mappa che stiamo considerando altro non è che la mappa del cerchio che abbiamo visto nel paragrafo 6.1.2. Possiamo dunque concludere immediatamente che nel caso di rapporto razionale tra le frequenze, diciamo  $\omega_2/\omega_1 = r/s$ . L'orbita sarà costituita da  $s$  punti distinti, mentre nel caso irrazionale si avrà un insieme di punti denso sulla circonferenza.

## 6.2 Oscillatori interagenti

Introduciamo ora un termine che faccia interagire i due oscillatori. Vogliamo però che tale termine non distrugga la caratteristica del sistema di essere conservativo. Il modo più semplice consiste nel modificare il potenziale (6.2) scrivendo  $V(x) = \frac{\omega_1^2}{2}x_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}x_2^2 + V_3(x)$ , dove  $V_3(x)$  è un polinomio omogeneo di grado 3 in  $x_1, x_2$ . Naturalmente, nessuno proibisce di aggiungere termini di grado 4, 5, ... per approssimare meglio il comportamento di un potenziale non lineare. In realtà, col senno di poi, ci si rende conto che ciò non cambierebbe in modo sostanziale il comportamento qualitativo delle orbite. L'effetto del termine cubico sarà quello di accoppiare le equazioni, introducendo una dipendenza di ciascun oscillatore dall'altro: si dice appunto che il contributo  $V_3(x)$  al potenziale è un *termine di accoppiamento*. Si deve anche osservare che in un intorno abbastanza piccolo dell'origine di  $\mathbb{R}^4$  il contributo del termine cubico è più piccolo di quello dei termini quadratici. Alla luce di questo fatto si dice anche che  $V_3(x)$  è una *perturbazione* del sistema lineare.

Un modo ancor più diretto consiste nel far ricorso alla forma canonica delle equazioni, ad esempio aggiungendo un termine cubico di accoppiamento all'Hamiltoniana (6.4). Questo è quanto faremo qui, considerando un'Hamiltoniana della forma particolare<sup>5</sup>

$$(6.12) \quad H(x, y) = \frac{\omega_1}{2}(y_1^2 + x_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(y_2^2 + x_2^2) + x_1^2x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$$

---

<sup>5</sup> Questo tipo di sistema è stato considerato in un lavoro di M. Hénon e C. Heiles<sup>[13]</sup>, diventato ormai un classico. In quel lavoro gli autori considerano il caso  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ . Lo stesso tipo di sistema, per valori diversi delle frequenze e senza il termine  $x_2^3/3$  era già stato ampiamente studiato da G. Contopoulos in una serie di lavori a partire dall'inizio degli anni '60; se ne trova un'esposizione sistematica in [7]. L'interesse di questo tipo di modello nel campo dell'astronomia riguarda principalmente lo studio della dinamica di stelle in una galassia a simmetria cilindrica. In coordinate cilindriche  $r, \vartheta, z$ , il potenziale cui è soggetta una stella può pensarsi come funzione  $V(r, z)$ ; l'angolo  $\vartheta$  non compare grazie all'ipotesi di simmetria cilindrica. Di conseguenza, il momento angolare  $p_\vartheta$  si conserva, e ponendo  $p_\vartheta = C$  si può scrivere l'Hamiltoniana del sistema come

$$H = \frac{(p_r^2 + p_z^2)}{2} + V^*(r, z), \quad V^*(r, z) = \frac{C^2}{2r^2} + V(r, z).$$

Ci si è dunque ricondotti allo studio di un moto piano con potenziale  $V^*(r, z)$ . Se il potenziale ha un punto di minimo (il che è del tutto ragionevole per il modello fisico che si considera) la linearizzazione in prossimità dell'equilibrio riconduce allo studio di un sistema di due oscillatori, con una perturbazione dovuta ai termini di grado superiore al secondo nello sviluppo del potenziale. Il modello qui studiato corrisponde ad una scelta arbitraria di tali termini.

Le equazioni corrispondenti sono

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 y_1, & \dot{y}_1 &= -\omega_1 x_1 - 2x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_2 y_2, & \dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2 - x_1^2 + x_2^3. \end{aligned}$$

### 6.2.1 Alcune considerazioni analitiche

Consideriamo anzitutto il caso di frequenze ambedue positive. Il sistema ha un integrale primo, che altro non è che la funzione Hamiltoniana (6.12); dunque le orbite giacciono sulla superficie di energia costante  $H(x, y) = E$ . La funzione ha un minimo nell'origine, corrispondente ad un valore di energia  $E = 0$ ; per piccoli valori (positivi) di  $E$  la superficie di energia costante ha una componente compatta, topologicamente simile ad una sfera. Tale superficie non risulta più compatta per valori di  $E$  superiori ad un valore critico, ove il potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{\omega_1}{2} x_1^2 + \frac{\omega_2}{2} x_2^2 + x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3$$

presenta un punto di sella; ciò si verifica nei tre punti

$$P_{1,2} = \left( \pm \frac{\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2}}{2}, -\frac{\omega_1}{2} \right), \quad P_3 = (0, \omega_2),$$

cui corrispondono i valori di energia

$$E_1 = E_2 = \frac{\omega_1^3}{24} + \frac{\omega_1^2 \omega_2}{8}, \quad E_3 = \frac{\omega_2^3}{6}.$$

Nel seguito, il più piccolo di questi valori verrà identificato come *energia di fuga*, e denotato con  $E_f$ .

Per  $0 < E < E_f$  si ha una situazione simile a quella del caso integrabile discusso nel paragrafo 6.1.5. In corrispondenza all'iperpiano  $x_1 = 0$  il campo generato dalle equazioni (6.13) ha componenti

$$(\omega_1 y_1, \omega_2 y_2, 0, -\omega_2 x_2 + x_2^3),$$

e pertanto è genericamente trasversale all'iperpiano. L'intersezione della componente compatta della superficie dell'energia con l'iperpiano è la superficie a due dimensioni determinata dall'equazione

$$H(0, x_2, y_1, y_2) = \frac{\omega_1}{2} y_1^2 + \frac{\omega_2}{2} (y_2^2 + x_2^2) - \frac{1}{3} x_2^3 = E,$$

che ha una componente compatta topologicamente simile ad una sfera. La proiezione di questa superficie sul piano  $x_2, y_2$  è la regione

$$\frac{\omega_2}{2} (y_2^2 + x_2^2) - \frac{1}{3} x_2^3 \leq E,$$

topologicamente simile ad un cerchio per quanto riguarda la componente compatta; è anche interessante osservare che la curva che delimita questa

regione è un'orbita corrispondente ai dati iniziali  $x_1(0) = y_1(0) = 0$ , e  $x_2(0), y_2(0)$  sulla curva limite: basta verificare che dalle equazioni di moto segue subito  $x_1(t) = y_1(t) = 0$  per tutti i tempi. Inoltre, se l'orbita  $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$  è una soluzione delle equazioni di moto, anche l'orbita

$$x'_1(t) = x_1(-t), \quad x'_2(t) = x_2(-t), \quad y'_1(t) = -y_1(-t), \quad y'_2(t) = -y_2(-t)$$

è una soluzione (al lettore la verifica); ciò è dovuto alla simmetria dell'Hamiltoniana rispetto a  $y_1$  e  $y_2$ . Quest'ultima proprietà può esprimersi dicendo che se si mantiene la posizione e si invertono le velocità si ottiene la stessa orbita (nel piano delle configurazioni  $x_1, x_2$ ) percorsa a rovescio: è questa la caratteristica dei sistemi cosiddetti *reversibili*.<sup>6</sup>

Fin qui, il lettore avrà osservato che la discussione non è molto diversa da quella del caso integrabile. A questo punto però ci si deve discostare. Le azioni  $I_1, I_2$  non sono più costanti del moto, perché

$$\dot{I}_1 = -4x_1x_2y_1, \quad \dot{I}_2 = -y_2(x_1^2 - x_2^2);$$

dunque non si può più affermare, a priori, che l'orbita debba giacere su un toro. La mancanza di questa informazione rende più difficile il compito di prevedere il risultato della sezione di Poincaré per il sistema completo. Qui interviene il calcolo numerico.

### 6.2.2 Un caso con frequenze non risonanti

Come primo caso scegliamo le frequenze

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0.6180339887498948$$

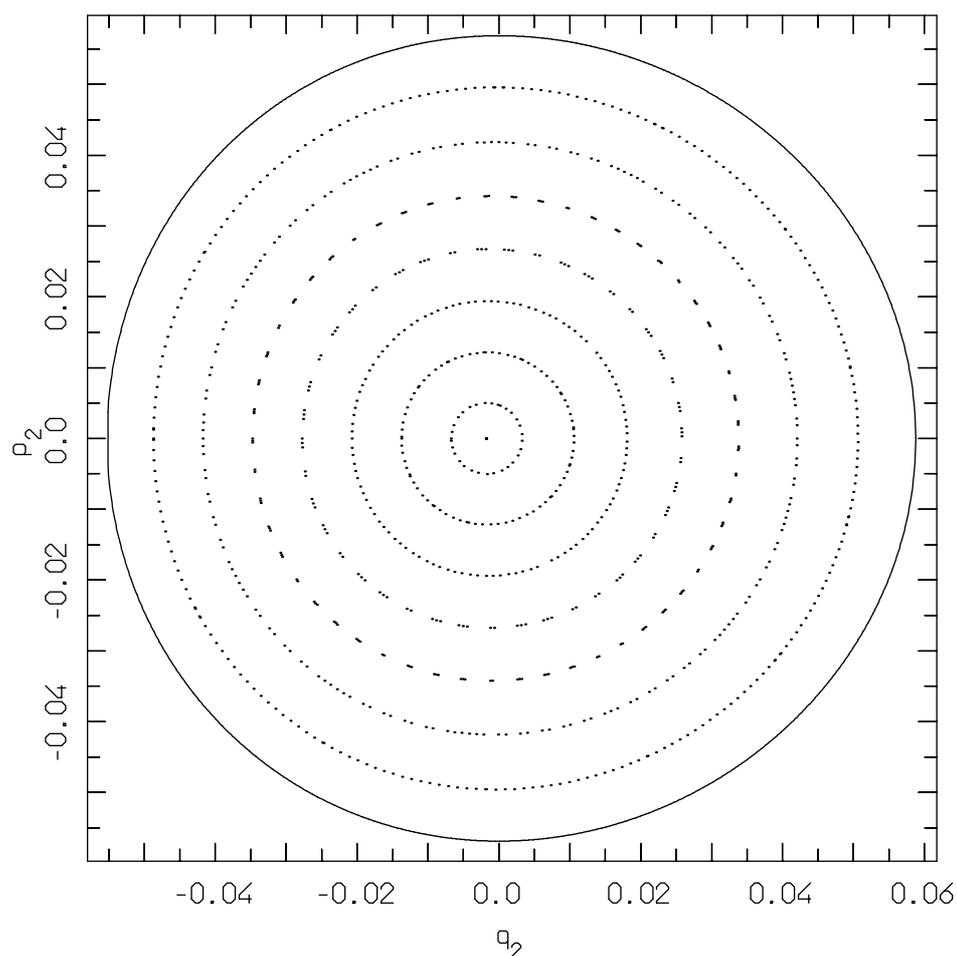
(la frequenza  $\omega_2$  è la ben nota sezione aurea). Con questi valori delle frequenze la superficie dell'energia ha una componente compatta per

$$0 < E < E_f \simeq 0.03934466287$$

L'intensità della perturbazione è misurata, come si è già avuto modo di osservare, dal valore dell'energia iniziale. I risultati sono rappresentati graficamente, riportando nel piano  $x_2, y_2$  le proiezioni dei punti di sezione dell'orbita col piano  $x_1 = 0$ .

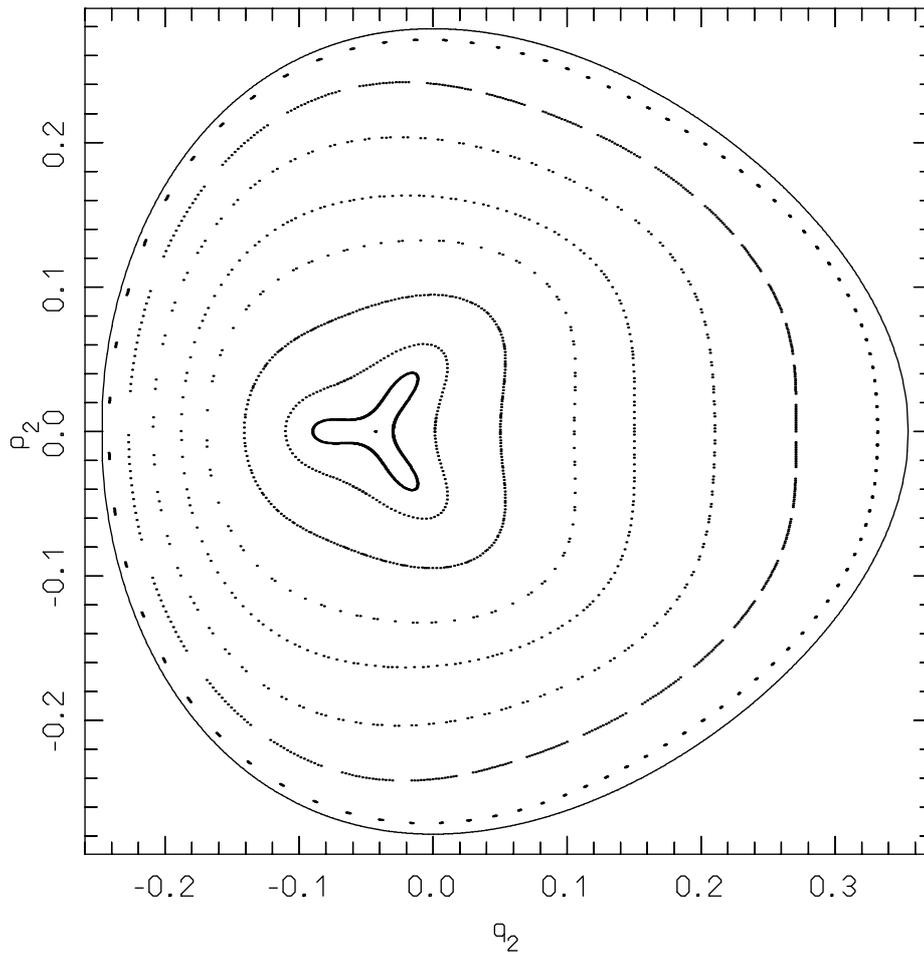
---

<sup>6</sup> Queste proprietà non sono certo valide in generale: si tratta di utili peculiarità del modello scelto, che semplificano sensibilmente la preparazione e l'interpretazione delle figure. Il fatto che la curva limite è un'orbita implica che le sezioni successive della stessa orbita non possono passare sull'emisfero nascosto della superficie sferica. Inoltre, la reversibilità implica che la figura di sezione sull'emisfero nascosto, proiettata sul piano  $x_2, y_2$ , è identica a quella dell'emisfero visibile. Nel produrre le figure di sezione riportate in queste note si è fatto uso di questa simmetria, riportando tutti i punti di sezione, indipendentemente dal segno di  $y_1$ , con un sensibile risparmio di tempo di elaborazione (in pratica, è come se si integrassero due orbite contemporaneamente).



**Figura 6.5.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.001$ . La curva esterna, di forma praticamente circolare, rappresenta la curva limite. Il punto centrale rappresenta un'orbita periodica. Tutte le altre orbite danno origine a punti che si distribuiscono su curve quasi indistinguibili da circonferenze. La figura globale si presenta come un piccolissima deformazione di quella del caso imperturbato.

La figura 6.5 riporta 8 orbite per il caso  $E = 0.001$  (un'energia piuttosto piccola, corrispondente a circa  $1/40$  dell'energia di fuga). Già a prima vista è evidente che la figura non presenta grosse differenze qualitative rispetto a quella che ci si aspetterebbe di osservare nel caso imperturbato: la curva limite non differisce in modo apprezzabile da una circonferenza, ed i punti di sezione corrispondenti alle varie orbite sono distribuiti su curve difficilmente distinguibili, a prima vista, da circonferenze. Le differenze sono percettibili solo dopo un esame accurato. Il punto in prossimità del centro della figura rappresenta un'orbita periodica; nel caso imperturbato tale orbita corrisponde ai dati iniziali  $x_2(0) = y_2(0) = 0$ , e  $x_1, y_1$  arbitrari, compatibilmente col valore dell'energia. L'effetto della perturbazione è uno sposta-



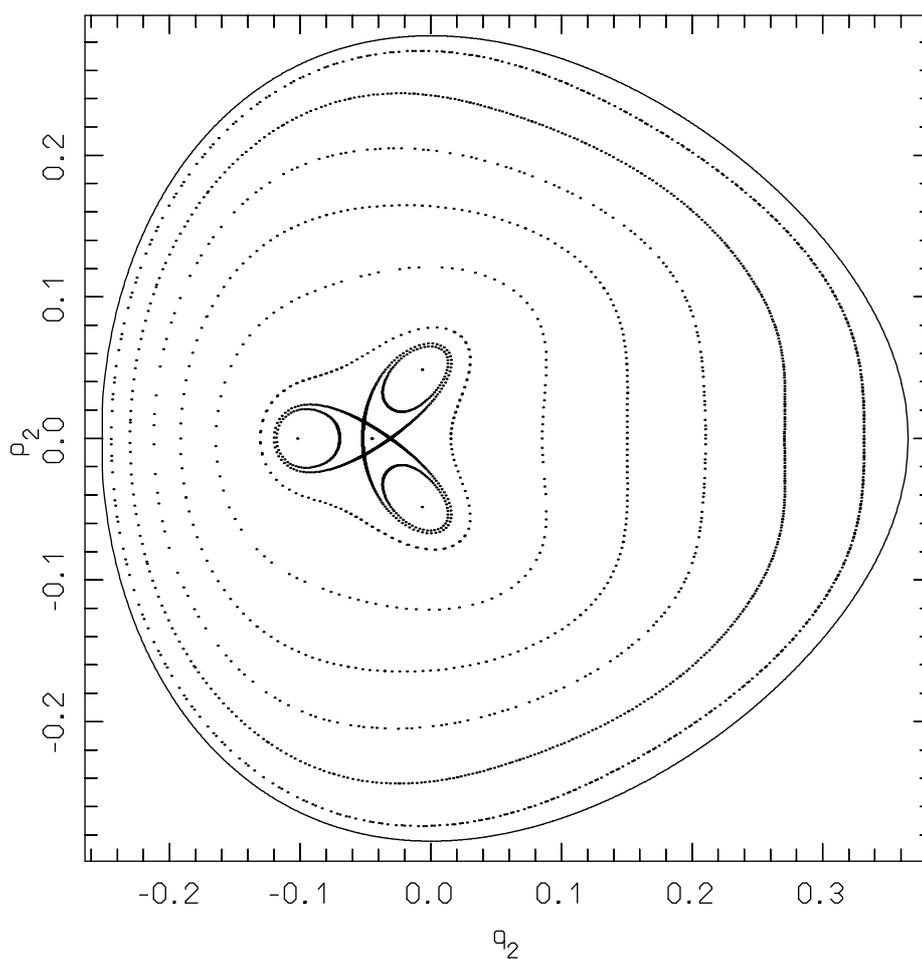
**Figura 6.6.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.024$ . La deformazione rispetto al caso imperturbato è diventata ben evidente, ma l'aspetto topologico rimane, nella sostanza, lo stesso.

mento dell'orbita rispetto all'origine del piano  $x_2, y_2$ . La curva limite nel caso imperturbato è una circonferenza con centro nell'origine; in questo caso è percettibile uno spostamento della circonferenza nella direzione positiva dell'asse. Analogamente, i punti di sezione nel caso imperturbato dovrebbero distribuirsi (densamente, poiché il rapporto tra le frequenze è un numero irrazionale) su circonferenze concentriche, con centro comune nell'origine; qui invece le curve, pur mantenendo una forma sensibilmente circolare, non sono più concentriche, ma si avverte uno schiacciamento delle curve verso la sinistra del grafico. Un'ultima osservazione riguarda la distribuzione dei punti sulla curva: nel caso imperturbato si dovrebbe osservare esattamente la stessa distribuzione su tutte le curve, in quanto il rapporto tra le frequenze è indipendente dal toro; qui invece si avverte una sensibile differenza tra le varie curve, dovuta al fatto che il rapporto tra le frequenze dipende, in realtà, dal toro, e dunque dal dato iniziale. Quest'ultima osservazione di-

venta naturale quando si pensi che l'aggiunta di un termine perturbativo al potenziale ha tipicamente come effetto la distruzione dell'isocronismo delle oscillazioni tipico dell'oscillatore armonico, e questo anche quando si consideri un sistema ad un solo grado di libertà.

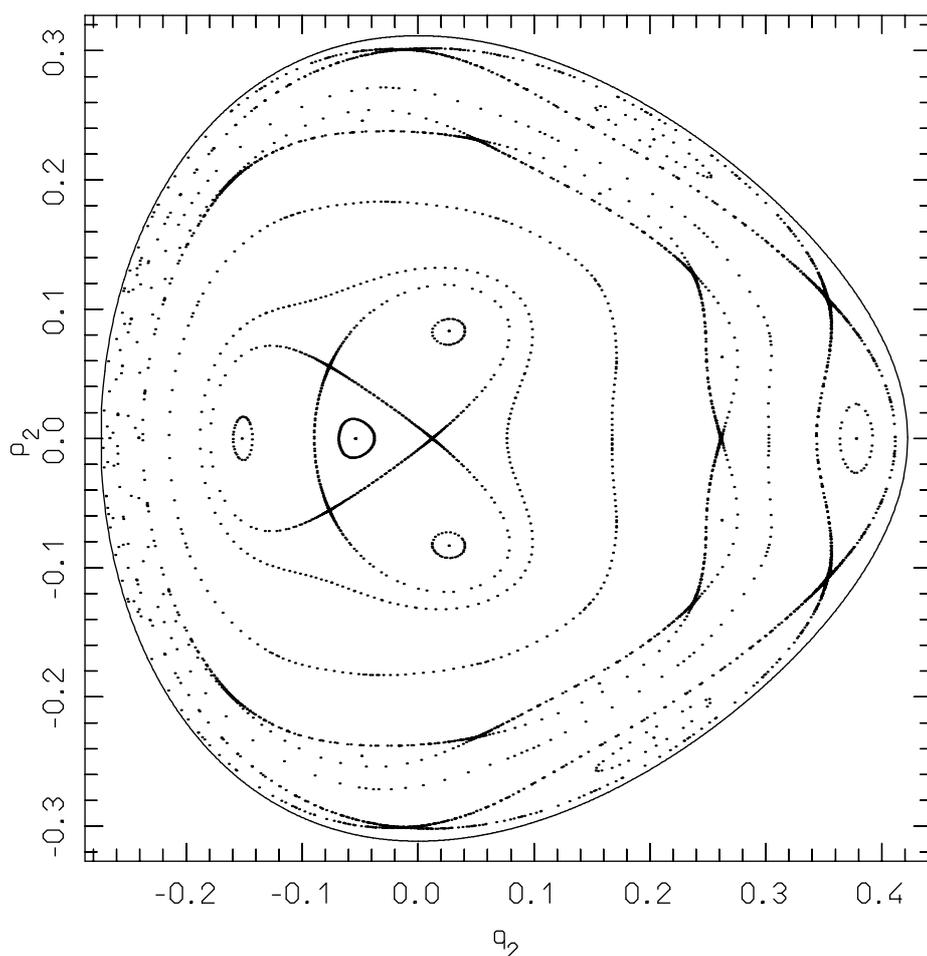
L'impressione che si ricava dall'analisi della figura 6.5 è che la perturbazione induca una *deformazione* dei tori invarianti del sistema imperturbato, ma non cambi in modo sostanziale la topologia delle orbite; sembra dunque che il sistema non perda le sue caratteristiche di integrabilità. Tale impressione viene in buona parte confermata dalla figura 6.6, che riporta i risultati relativi a 9 orbite per un valore di energia  $E = 0.024$ ; l'energia qui è ben superiore a quella della figura 6.5, e corrisponde a circa  $2/3$  dell'energia di fuga. La deformazione in questo caso è ben evidente: l'orbita periodica centrale si è decisamente allontanata dall'origine; la curva limite ha assunto un aspetto ovale; le curve che circondano l'orbita centrale sono nettamente deformate, in particolare in prossimità del centro. Tuttavia non vi è nessun indizio, almeno nella figura, che indichi un cambiamento rilevante nella topologia delle orbite: sembra di poter dire che, pur sensibilmente deformata, la struttura dei tori invarianti del sistema imperturbato abbia resistito alla perturbazione. Più evidente è l'effetto del cambiamento di frequenze con l'ampiezza delle oscillazioni. La prima curva in prossimità dell'orbita periodica centrale risulta sensibilmente più marcata delle altre perché si tratta di un'orbita per cui il rapporto tra le frequenze è prossimo a  $3/2$ ; in pratica, il punto di sezione  $P_{s+3}$  risulta molto vicino al punto  $P_s$ , e la sottosuccessione formata prendendo un punto ogni tre avanza molto lentamente sulla curva. Ne risulta una maggiore densità dei punti, che rende la curva più marcata. L'effetto della risonanza  $3/2$  tra le frequenze si manifesta in modo evidente anche nei tre lobi formati dalla curva. In complesso, sembra di poter concludere che il comportamento del sistema sia ancora ben simile a quello di un sistema integrabile.

La figura 6.7 rivela il primo cambiamento consistente rispetto al quadro che si è presentato fin qui. Vi sono rappresentate 10 orbite ad energia  $E = 0.025$ ; si osservi che l'energia è solo di poco superiore a quella della figura 6.6. Il fenomeno rilevante qui è costituito dalla formazione di un cappio vagamente a forma di trifoglio in prossimità dell'orbita centrale. I tre punti all'interno delle foglie formano un'orbita periodica di periodo 3, causata dal rapporto  $2/3$  tra le frequenze. Tuttavia, mentre per il sistema imperturbato nel caso di rapporto razionale tra le frequenze si ha un toro con una sottofoliazione in orbite periodiche, qui il toro si è distrutto, formando una struttura più complessa. In realtà, oltre all'orbita al centro delle foglie si è formata una seconda orbita di periodo 3 in corrispondenza alle intersezioni della curva a forma di cappio. Si osservi bene la somiglianza di questa curva con la separatrice del pendolo: l'orbita periodica al centro delle foglie corrisponde alla posizione di equilibrio stabile del pendolo, e le curve che la circondano corrispondono ad orbite che si mantengono in prossimità di quella periodica,



**Figura 6.7.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.025$ . La perturbazione ha indotto una modifica consistente nella topologia delle orbite: in prossimità del centro si sono create due orbite periodiche di periodo 3, con formazione di separatrici in corrispondenza delle orbite instabili e di curve chiuse intorno alle orbite stabili. In prossimità delle orbite periodiche stabili la figura tende ad assumere lo stesso aspetto delle figure precedenti in prossimità dell'orbita periodica (di periodo 1) centrale.

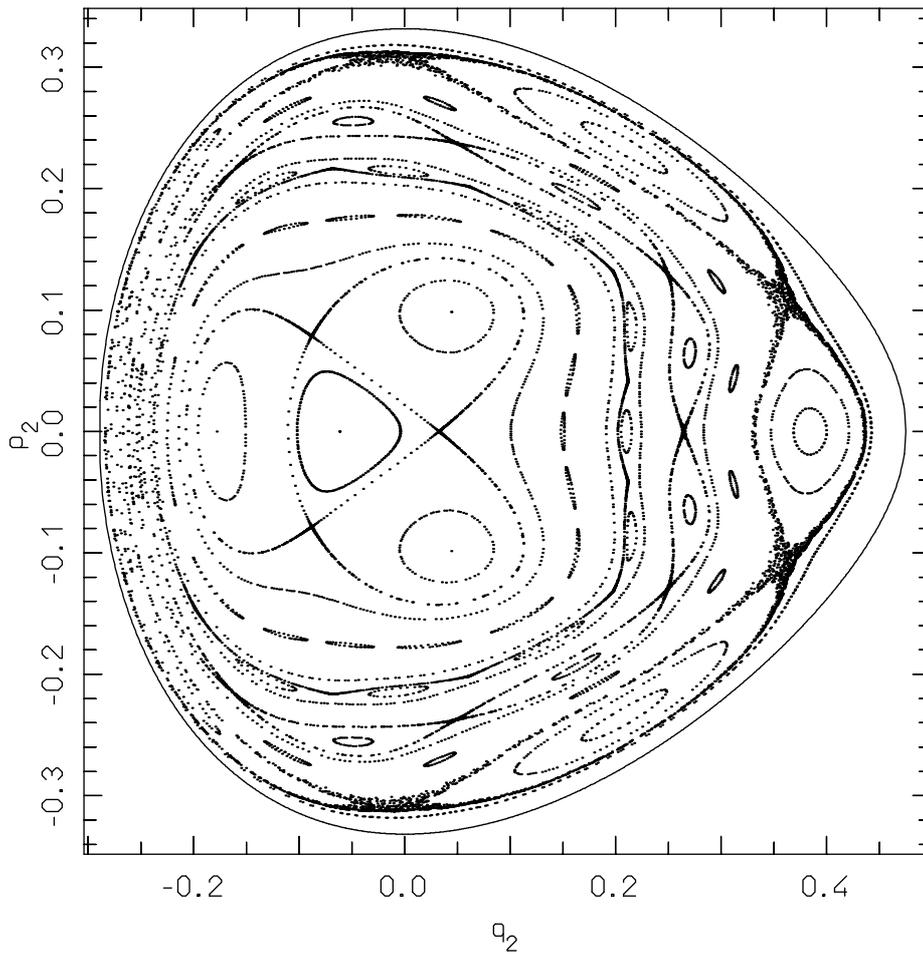
oscillandole intorno; l'orbita periodica nei punti di intersezione corrisponde al punto di equilibrio instabile del pendolo, con il suo corredo di separatrici. Si tratta solo di sostituire ai punti di equilibrio del pendolo delle orbite che sono rispettivamente stabili ed instabili. In corrispondenza all'orbita stabile poi si crea una regione controllata dalla risonanza, che tende a riprodurre al suo interno le caratteristiche già osservate, nelle figure precedenti, a proposito dell'orbita centrale. Si tratta di un fenomeno tipico in caso di risonanza, che mostra in modo evidente quanto l'approssimazione di un sistema risonante mediante oscillatori armonici sia ingenua e lontana dalla realtà. Se si esclude



**Figura 6.8.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.030$ . Il fenomeno della formazione di orbite periodiche si è ripetuto all'esterno della regione influenzata dall'orbita di periodo 3. Si sono formate (almeno) altre due orbite di periodi 7 e 4, anch'esse corredate da separatrici.

la regione controllata dalla risonanza tuttavia, il resto della figura sembra, ancora una volta, non discostarsi in modo sostanziale dalla descrizione del sistema imperturbato.

La formazione di orbite periodiche con relativo corredo di separatrici si ripete nuovamente al crescere dell'energia. Nella figura 6.8 sono rappresentate 13 orbite sulla superficie di energia  $E = 0.030$ . È ben evidente l'esistenza di quattro orbite periodiche: procedendo dal centro della figura verso l'esterno, si ha sempre l'orbita centrale di periodo 1, poi l'orbita di periodo 3 già osservata in precedenza, poi un'orbita di periodo 7 ed infine un'orbita di periodo 4. Attorno a ciascuna di queste orbite si è creata una regione in cui altre orbite oscillano attorno a quella periodica stabile. Il limite di questa regione è segnato da separatrici che si intersecano in corrispondenza



**Figura 6.9.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.034$ . Il fenomeno di formazione di orbite periodiche diventa sempre più evidente. Al tempo stesso, intorno alle separatrici dell'orbita periodica più esterna di periodo 4, si osserva la creazione di una regione che viene riempita in modo apparentemente denso e caotico da una sola orbita.

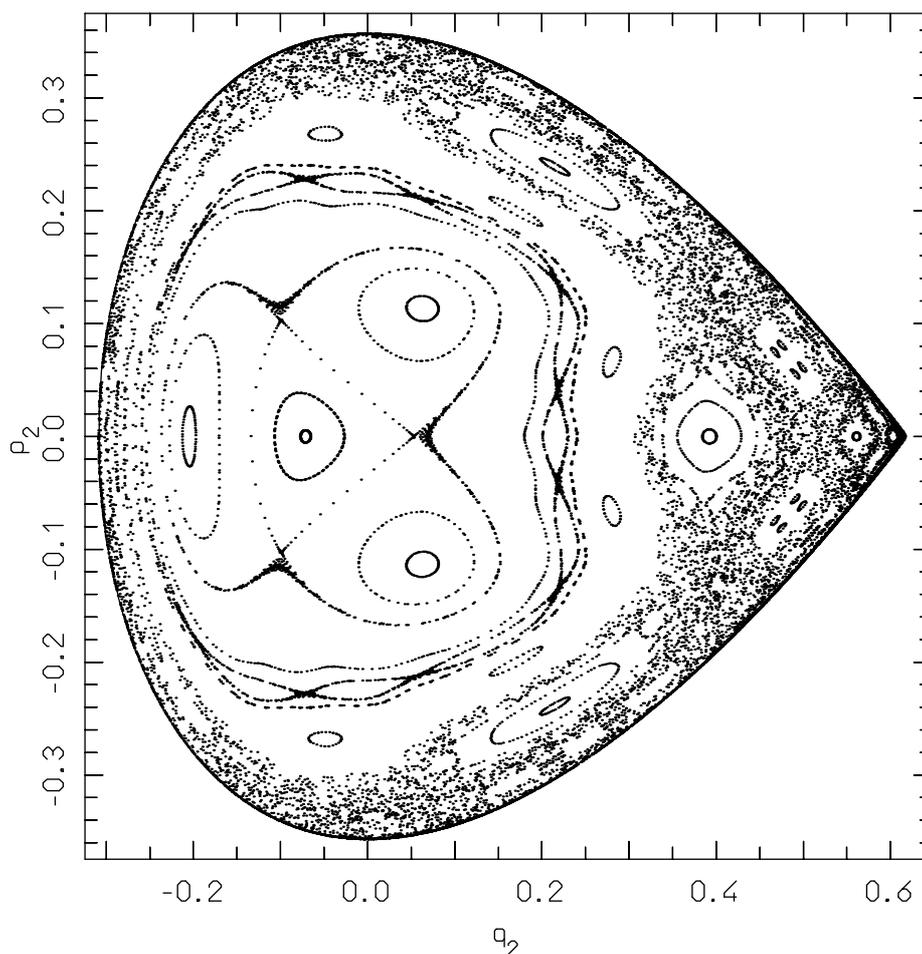
di orbite periodiche instabili: anche se il rapporto tra le frequenze cambia, il fenomeno si ripete in modo simile a quello già osservato per l'orbita di periodo 3. Inoltre, le regioni controllate dalle orbite risonanti sembrano essere ben separate tra loro da curve che appaiono in modo evidente come deformazioni dei tori invarianti del sistema imperturbato.

È spontaneo a questo punto osservare che, se si assume che la perturbazione cambi le frequenze in modo continuo, ci si deve aspettare che i tori sui cui le frequenze assumono un rapporto razionale siano densi. Se il fenomeno descritto è generico, non si vede come non possa ripetersi per tutti questi tori il meccanismo di formazione di orbite stabili ed instabili e di separatrici. Di fatto, questo non appare nella figura, e la sola risposta che si può dare a questo livello è che se tale fenomeno avviene interessa comunque regioni

di dimensioni troppo piccole per essere effettivamente osservabili sulla scala della nostra rappresentazione. In effetti, se si ingrandisce qualche regione si può ben osservare che si formano altre orbite periodiche, di periodo più lungo. Ciò genera il sospetto che ulteriori ingrandimenti potrebbero rivelare una struttura sempre più fine di orbite periodiche, ma ci si rende subito conto che la simulazione numerica non può certo confermare né rimuovere questo sospetto: oltre un certo limite di ingrandimento, l'inevitabile errore numerico rende impossibile seguire i dettagli della dinamica.

La proliferazione di orbite periodiche diventa ben evidente nella figura 6.9. Vi sono rappresentate 19 orbite sulla superficie di energia  $E = 0.034$ . Procedendo dal centro verso l'esterno, si distinguono chiaramente orbite di periodo 1 (quella centrale), 3, 16, 10, 7, 11, 4. In realtà, la figura rivela solo una parte della complessità del comportamento del sistema: un'indagine più accurata eseguita direttamente al calcolatore rivela altre strutture create da orbite periodiche, ma nella rappresentazione finale diventa inevitabile trascurarne la maggior parte, se si vuole ottenere una figura ancora interpretabile. Allo stesso tempo però compare un fenomeno che sembra essere del tutto nuovo: la separatrice corrispondente all'orbita di periodo 4 si è allargata fino a formare una sorta di macchia, con una struttura interna non facilmente identificabile sulla scala della figura. Tutta questa struttura è creata da una sola orbita, e se si segue l'evoluzione sullo schermo di un terminale grafico si vede che i punti, anziché disporsi con regolarità su una curva, si disperdono in modo irregolare, con un comportamento di tipo caotico ben lontano dalla sostanziale semplicità dell'evoluzione di un sistema integrabile. Lo stesso fenomeno, su scala più piccola, sembra avvenire anche in corrispondenza della separatrice dell'orbita di periodo 7.

Ancor più complessa è la situazione rappresentata in figura 6.10. Vi sono riportate 14 orbite sulla superficie di energia  $E = 0.039344$ . Si tratta di un valore di energia appena al di sotto del valore dell'energia di fuga: ciò è reso evidente dalla forma appuntita della curva limite, poiché la punta corrisponde al punto di sella del potenziale. La regione caotica che nella figura 6.9 era concentrata in prossimità della separatrice dell'orbita di periodo 4 si è estesa fino ad occupare una parte consistente della superficie dell'energia. Anche qui, si tratta di una sola orbita che riempie tutta la zona caotica. In realtà il riempimento non è uniforme: l'orbita invade la regione a salti, si sofferma a lungo in prossimità della separatrice di un'orbita periodica riempiendo una regione in modo apparentemente casuale e pressoché uniforme; poi improvvisamente salta in un zona diversa, vaga imprevedibilmente lasciando qua e là dei punti isolati; poi si localizza di nuovo in prossimità della separatrice di un'orbita periodica, non necessariamente la stessa di prima; poi ancora riprende a vagare in modo casuale; quando si pensa che abbia visitato tutta la zona che ha a disposizione, improvvisamente salta in una regione non ancora toccata fino a quel momento, e riprende a localizzarsi intorno ad una nuova separatrice; nel frattempo lascia in modo evidente dei buchi



**Figura 6.10.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 0.039344$ , appena inferiore al valore dell'energia di fuga. La zona caotica si è estesa su buona parte della superficie dell'energia, pur lasciando al suo interno dei vuoti riempiti da orbite periodiche con il loro corredo di curve chiuse. Parafrasando la felice descrizione di Hénon, poi diventata di uso comune in letteratura, si sono create delle *isole di moto ordinato* all'interno di un *mare di orbite caotiche*.

dove sembra non voler entrare. I buchi lasciati dall'orbita si rivelano spesso occupati da orbite periodiche stabili, ciascuna con il suo corredo di curve chiuse più o meno grandi: nella figura, per ovvie ragioni di carattere pratico, ne sono state rappresentate solo alcune. Un'immagine suggestiva usata da Hénon nel lavoro che verrà descritto nel paragrafo che segue parla di *isole di moto ordinato in un mare di orbite caotiche*. In compenso, resta al centro della figura una regione abbastanza vasta controllata dalla risonanza  $2/3$ .

Proseguire la simulazione per energie più elevate comporterebbe delle difficoltà di carattere pratico: tutte le orbite caotiche, prima o poi, superano il punto di sella del potenziale e sfuggono all'infinito. Naturalmente, si può ben immaginare che le orbite periodiche stabili (le isole) continuino ad esistere

almeno per un certo intervallo dei valori di energia, ed almeno per queste il calcolo resterebbe possibile. Tuttavia, più che insistere su questo modello, è interessante passare all'esame di un caso risonante.

### 6.2.3 Un caso con frequenze risonanti: il modello di Hénon e Heiles

Questo caso è stato studiato per la prima volta da M. Hénon e C. Heiles nel lavoro [13], ormai diventato un classico. In effetti si tratta del primo lavoro in cui viene messa in evidenza in modo inequivocabile l'esistenza di moti caotici in un sistema di equazioni differenziali dall'apparenza del tutto innocua.

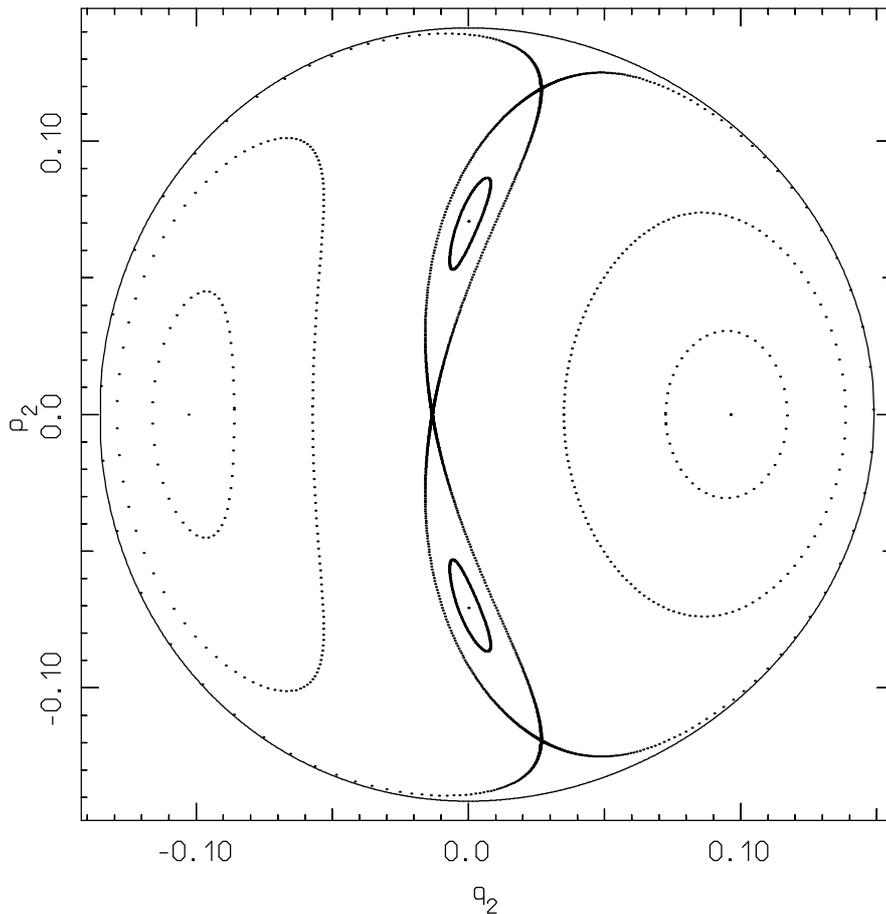
Si scelgono le frequenze  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ , sicché il sistema imperturbato è completamente risonante. Con questi valori, la superficie dell'energia possiede una componente compatta per

$$0 \leq E < E_f = \frac{1}{6}.$$

Le curve di livello del potenziale in questo caso presentano una simmetria per rotazioni di  $2\pi/3$  nel piano delle configurazioni  $x_1, x_2$ ; in particolare, per  $E = E_f = 1/6$  le curve di livello sono costituite da tre rette che formano un triangolo equilatero.

Nel caso del sistema imperturbato tutti i dati iniziali danno origine ad orbite strettamente periodiche; pertanto, per qualunque dato iniziale la figura di sezione si riduce ad un solo punto, con la sola eccezione della curva limite, che giace interamente sul piano  $x_2, y_2$ . Questa curva rappresenta un'oscillazione lungo l'asse  $x_2$ .

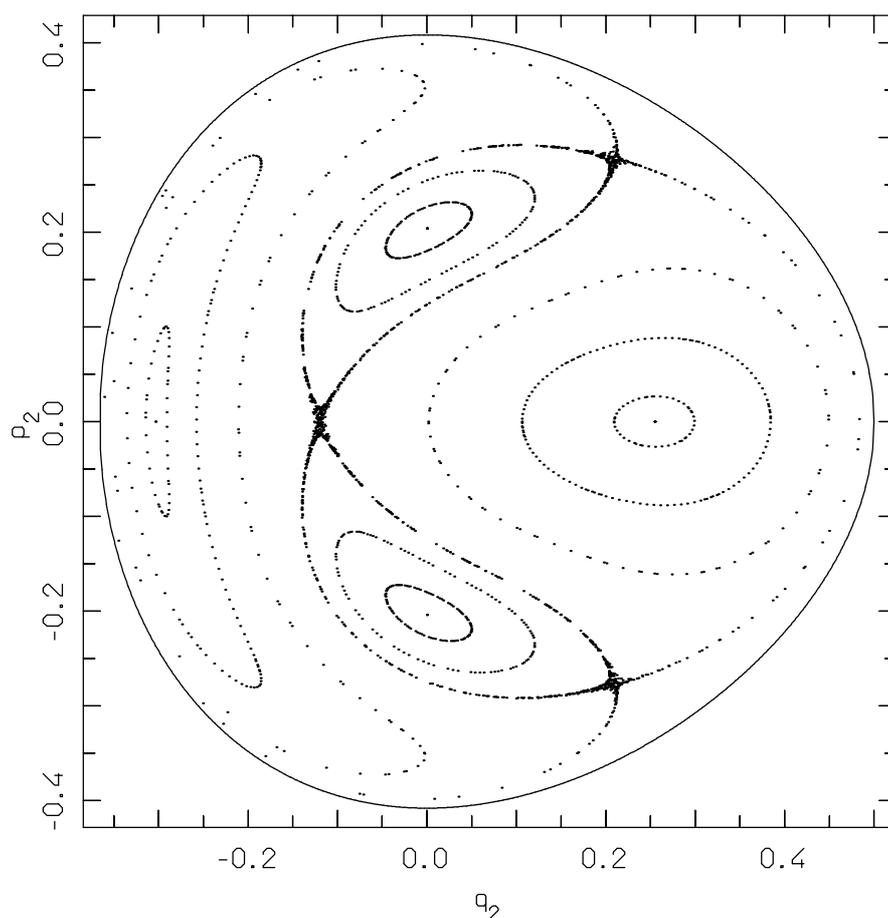
La figura 6.11 corrisponde ad un valore di energia  $E = 1/100$ , e riporta le sezioni relative a 6 orbite. Si tratta di un caso che possiamo definire completamente ordinato, nel senso che non c'è alcuna indicazione visibile dell'esistenza di moti di tipo caotico, ma un confronto con la figura che ci si aspetterebbe nel caso imperturbato rivela immediatamente la profonda modifica nella struttura delle orbite indotta dalla risonanza  $1/1$ . La simmetria triangolare del potenziale ha dato origine, nel piano  $x_1, x_2$ , a tre orbite periodiche a forma di segmento, inclinate rispettivamente di  $-2\pi/3$ ,  $0$  e  $2\pi/3$  rispetto all'asse  $x_2$  (queste orbite sono rappresentate in figura 6.13 per un'energia superiore; si veda più avanti). Nella figura una di queste orbite (quella ad inclinazione  $0$ ) è rappresentata dalla curva limite, mentre le altre due sono rappresentate dai due punti sull'asse  $y_2$ . Altre due orbite periodiche, dovute proprio alla risonanza  $1/1$ , sono rappresentate dai due punti sull'asse  $x_2$ ; si tratta di un'orbita di forma grosso modo circolare, che può essere percorsa nelle due direzioni. Tutte queste orbite sono stabili, e le zone da esse controllate sono limitate da separatrici che si intersecano in corrispondenza a tre orbite periodiche instabili, anch'esse originate dalla simmetria triangolare del potenziale. Dalla figura si vede immediatamente che non si può sperare di ricondurre il sistema ad un caso integrabile senza



**Figura 6.11.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 1/100$ . Le orbite appaiono tutte ordinate, ma è ben evidente l'effetto della risonanza  $1/1$ , che ha creato due grosse regioni di orbite risonanti.

tener conto della risonanza.

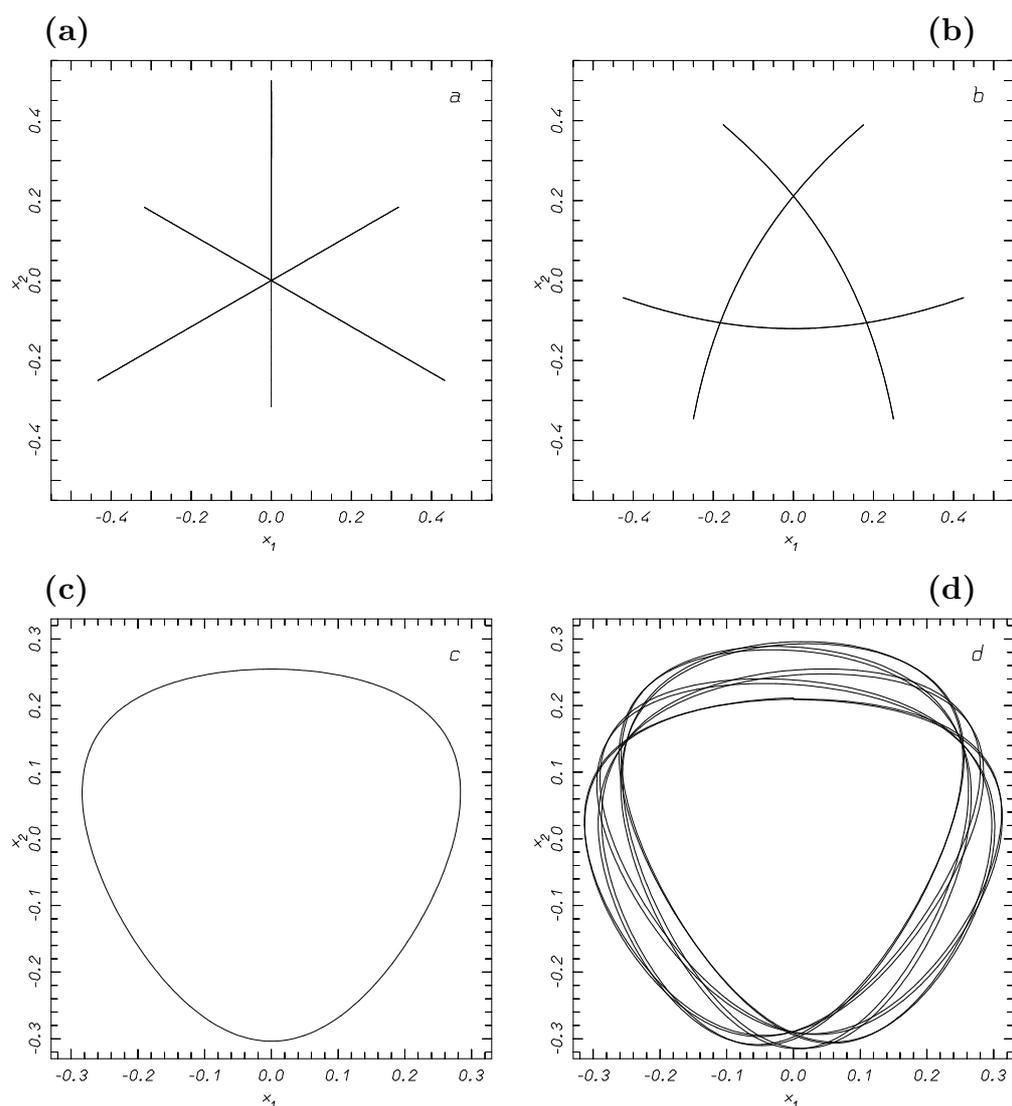
La figura 6.12 corrisponde ad un'energia  $E = 1/12$ , e riporta le sezioni relative a 8 orbite. Il sistema appare ancora pesantemente dominato dalla risonanza  $1/1$ : le orbite sono sensibilmente deformate rispetto al caso di energia  $1/100$ , ma il solo fatto qualitativamente nuovo è l'apparire in modo evidente di una piccola zona caotica in prossimità delle separatrici. La figura 6.13 rappresenta la proiezione sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  di tutte le orbite periodiche visibili nella figura di sezione. Il quadro (a) riporta tre orbite a forma di segmento; l'orbita verticale corrisponde nella figura di sezione alla curva limite, e le altre due ai punti isolati sull'asse  $y_2$ . Il quadro (b) riporta tre orbite a forma di bastone ricurvo, e non passanti per l'origine; nella figura di sezione queste corrispondono alle tre orbite periodiche instabili in corrispondenza dell'intersezione delle separatrici. Il quadro (c) riporta un'orbita a forma di cerchio schiacciato, con una simmetria triangolare; quest'orbita corrisponde ai due punti fissi stabili sull'asse  $x_2$  (i



**Figura 6.12.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 1/12 \simeq 0.08333333$ . La figura è simile a quella ottenuta per energia  $1/100$ , salvo l'apparire in modo evidente di una piccola regione caotica in prossimità delle separatrici delle orbite periodiche instabili.

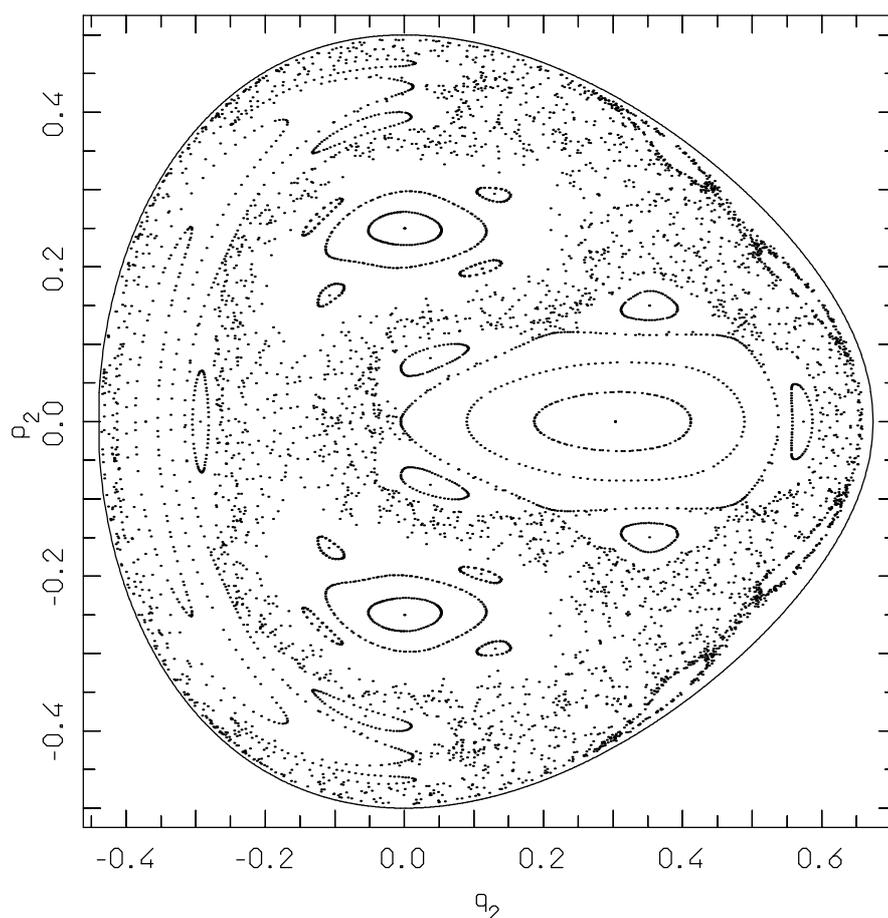
punti sono due perché l'orbita può essere percorsa sia in verso orario che antiorario). Il quadro (d) rappresenta un'orbita con dato iniziale prossimo a quello dell'orbita periodica stabile del quadro (c).

La situazione cambia in modo drastico nella figura 6.14, corrispondente ad energia  $E = 1/8 = 0.125$ . Vi sono rappresentate le sezioni relative a 12 orbite. Le orbite stabili di periodo 1 osservate fin qui sono ancora presenti, ed ancora circondate da isole di orbite ordinate. Intorno ad esse si sono però formate altre orbite periodiche stabili: ne sono rappresentate due, di periodi rispettivamente 4 e 5, che formano delle catene di 4 e 5 isole intorno alle zone controllate dalle orbite di periodo 1; la proiezione di queste orbite sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  è rappresentata nei quadri (a) e (c) della figura 6.15. Buona parte della figura è però occupata da una sola orbita caotica; la proiezione sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  di un'orbita di questo tipo è rappresentata nel quadro (d) della figura 6.15. La figura di



**Figura 6.13.** Proiezione sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  di alcune orbite sulla superficie di energia  $E = 1/12 \simeq 0.08333333$ . (a) tre orbite stabili a forma di segmento; (b) le tre orbite instabili che si trovano sull'intersezione delle separatrici; (c) due orbite stabili di forma approssimativamente circolare (si tratta di una sola orbita che può essere percorsa nei due sensi di rotazione); (d) un'orbita con dato iniziale in prossimità di quello dell'orbita periodica quasi circolare.

sezione mostra con evidenza il fatto che ciascuna delle orbite periodiche tende a riprodurre intorno a sé lo stesso tipo di struttura che si è osservata, nel paragrafo precedente, a proposito del caso di frequenze non risonanti. Questo, naturalmente, rende ancor più forte la convinzione che tale fenomeno si debba riprodurre, sia pure su scala estremamente piccola e non osservabile numericamente, attorno a tutte le orbite stabili. A questo proposito vale la



**Figura 6.14.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 1/8 = 0.125$ . Le orbite risonanti di periodo 1 controllano ancora una parte consistente della superficie dell'energia, ma accanto ad esse sono comparse orbite di periodi diversi, ed una zona di orbite caotiche.

pena di citare direttamente il lavoro di Hénon e Heiles, che per primi hanno messo in evidenza il fenomeno del caos proprio su questo modello:<sup>7</sup>

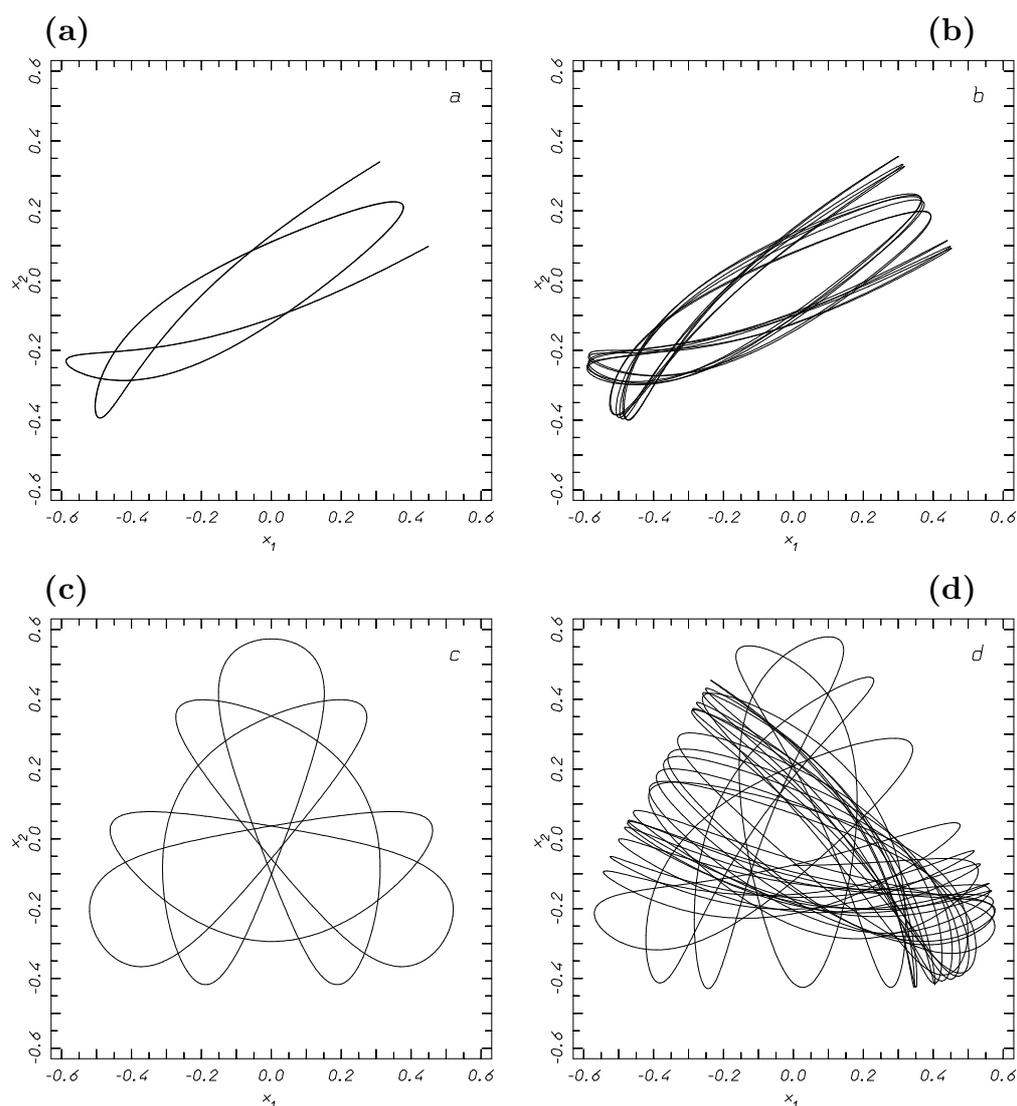
“ The following properties are also suggested by our results:

- (1) there is an infinite number of islands (and of chains of islands);
- (2) the set of all islands is dense everywhere;
- (3) but the islands do not cover the whole area since they become very small; there exists a “sea” between the islands and the ergodic trajectory is dense everywhere on the sea.

But, of course, mathematical proofs are needed to establish these points. ”

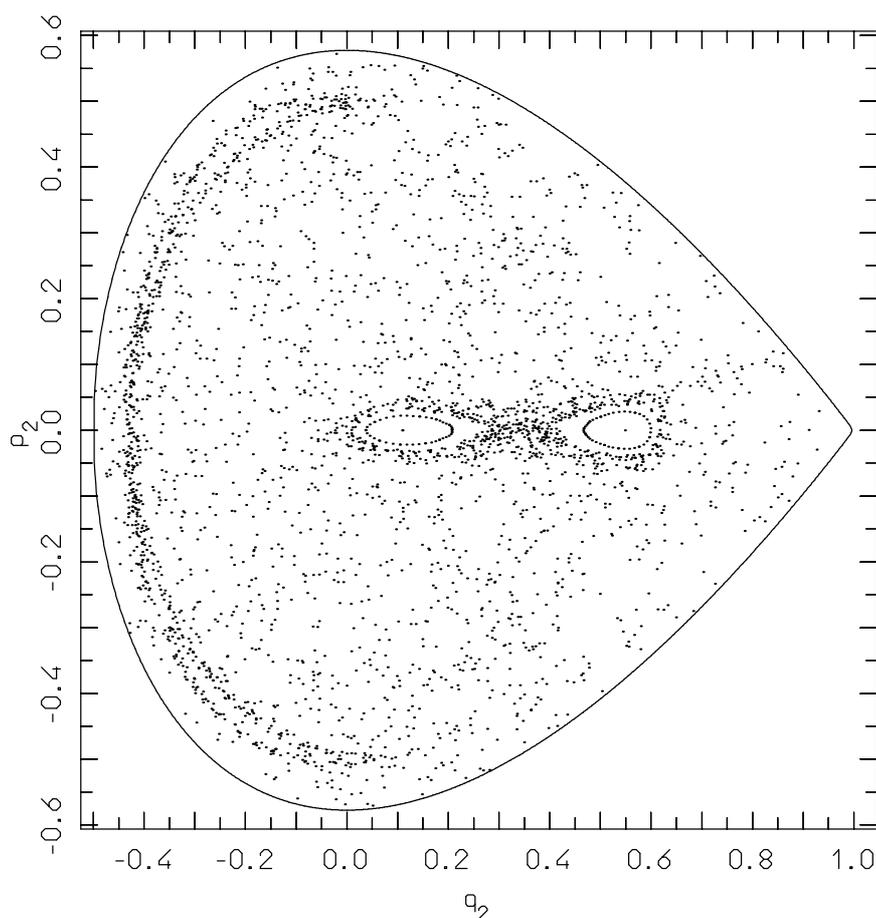
La figura 6.16, corrispondente ad un valore di energia  $E = 0.16666 \simeq$

<sup>7</sup> Hénon e Heiles, [13], p. 76.



**Figura 6.15.** Proiezione sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  di alcune orbite sulla superficie di energia  $E = 1/8 = 0.125$ . (a) un'orbita periodica di periodo 4; (b) un'orbita con dato iniziale prossimo a quella di periodo 4 del riquadro precedente; (c) un'orbita periodica di periodo 5; (d) un'orbita nella regione caotica.

$1/6$  (di poco inferiore all'energia di fuga) mostra una situazione di caos pressoché completo. Vi sono rappresentate le sezioni relative a 3 orbite. Una di esse è un'orbita stabile di periodo 2; la seconda forma le piccole isole intorno all'orbita periodica; la terza dà origine a tutta la zona caotica. La proiezione dell'orbita periodica e di quella che forma le isole è riportata in figura 6.17. È notevole il fatto che l'espandersi della zona caotica avviene molto rapidamente al variare dell'energia, quasi esistesse un'energia critica (da non confondersi con l'energia di fuga) al di sopra della quale il fenomeno



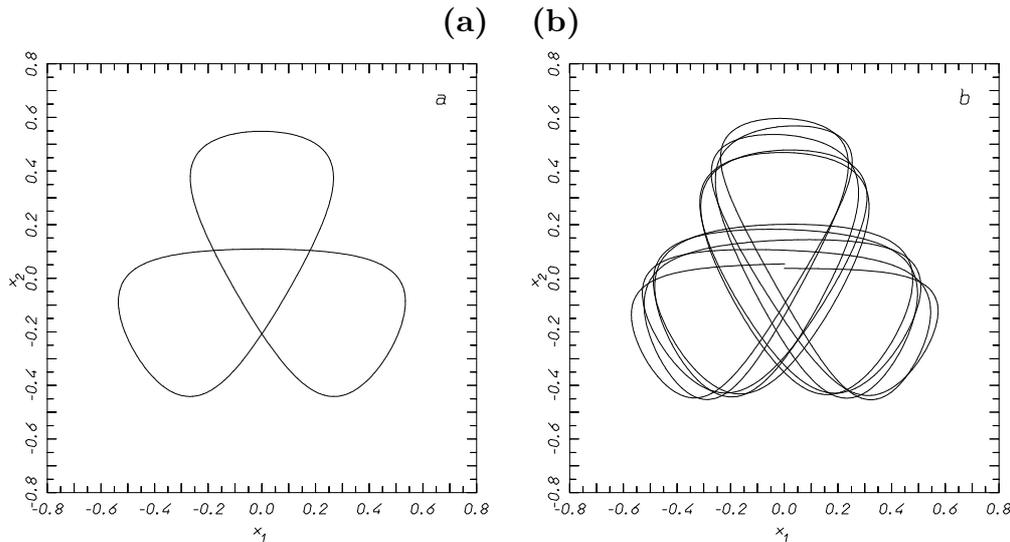
**Figura 6.16.** Rappresentazione della sezione di Poincaré per energia  $E = 1/6 \simeq 0.16666$ . La zona di orbite caotiche ha praticamente invaso tutta la superficie dell'energia, lasciando sopravvivere solo una piccola regione controllata da un'orbita periodica di periodo 2, che forma due isole.

del caos si manifesta in modo estremamente rapido.

Riportiamo le conclusioni degli autori stessi del lavoro

“ The true situation can perhaps be summarized as follows. (...) If the energy is small, it seems that a third isolating integral always exists. Perhaps, it is only a quasi integral; but then, to the accuracy of the computers, it is as good as a true integral. If the energy is higher than the critical energy, there are an infinite number of separated regions in the phase space where such a third integral still seems to exist. The space left free between these regions is the “ergodic region” where the third integral is nonisolating. If the energy is further increased, the proportion of allowable phase space occupied by this ergodic region increases very rapidly and tends to be the whole space.

A number of questions are raised. For example: are the curves



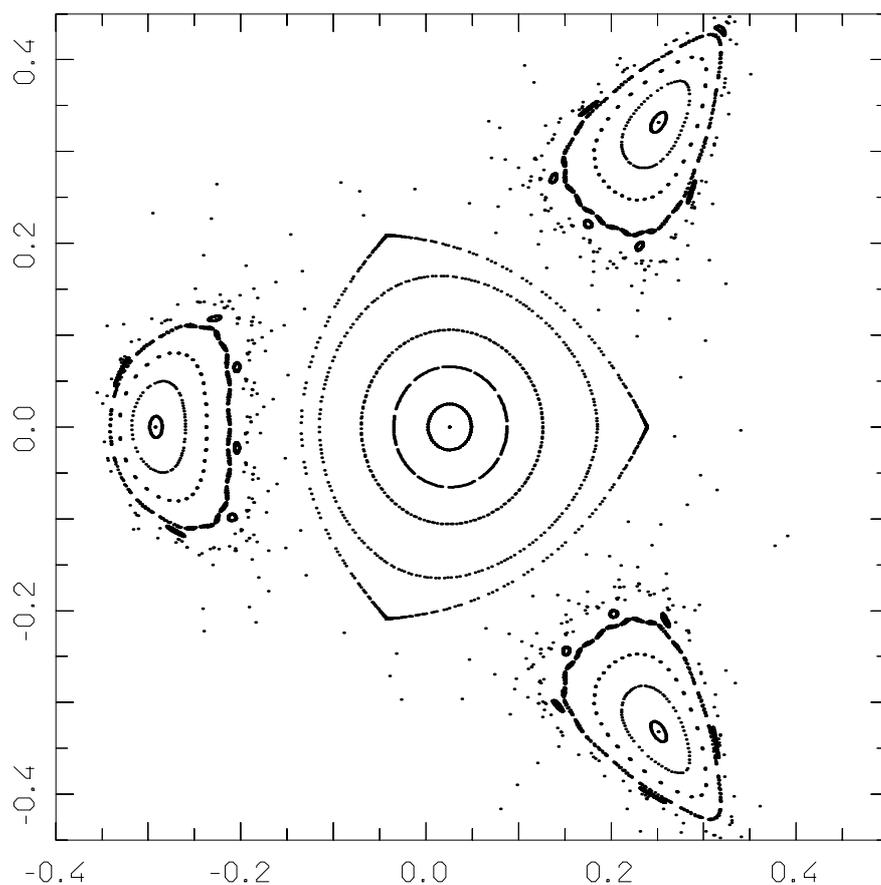
**Figura 6.17.** Proiezione sul piano delle configurazioni  $x_1, x_2$  di alcune orbite sulla superficie di energia  $E = 1/6 \simeq 0.16666$ . (a) l'orbita di periodo 2; (b) un'orbita con dati iniziali in prossimità della precedente.

found here exactly or only approximately invariant? What is the topological nature of the set of all the islands? Is it possible to compute the curves directly from the potential, without integrating all the orbits? The ultimate answer to such questions should rest on rigorous mathematical proofs, not on numerical experiments; but the mathematical approach to the problem does not seem too easy. ”

#### 6.2.4 Un caso con frequenze di segno opposto

Il terzo esempio che vogliamo illustrare è quello in cui le frequenze degli oscillatori abbiano segni opposti. Sottolineiamo che non si tratta di un puro esercizio matematico: questo caso si presenta in uno dei problemi classici della Meccanica Celeste: quello della stabilità dei punti di equilibrio lagrangiani nel problema ristretto dei tre corpi.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> In breve, il problema ristretto dei tre corpi consiste nel considerare il moto di una piccola massa, detta *planetoide*, sotto l'azione gravitazionale di due grosse masse, dette *primari*, che ruotano su una circonferenza attorno al baricentro comune. Ad esempio, i primari possono essere il Sole e Giove, ed il planetoide un asteroide o uno dei pianeti minori. Già Lagrange aveva calcolato che esistono cinque soluzioni delle equazioni di Newton per cui la posizione relativa delle due grosse masse e del planetoide rimane invariata. Queste soluzioni vengono dette equilibri lagrangiani. Tre di queste soluzioni vedono il planetoide sulla retta congiungente i primari. Nelle altre due soluzioni i due primari ed il planetoide si trovano ai vertici di un triangolo equilatero. Nel caso di Giove e



**Figura 6.18.** La sezione di Poincaré nel caso delle frequenze  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -(\sqrt{5} - 1)/2$ , sulla superficie di energia  $H(x, y) = 0.015$ .

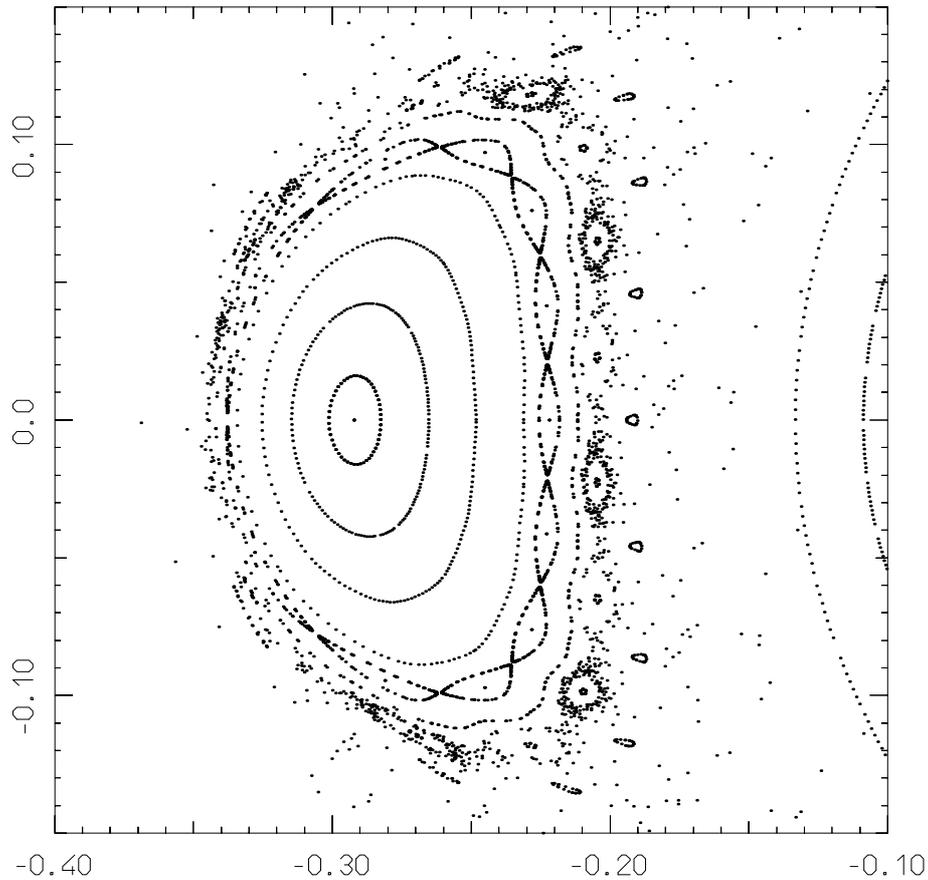
Considereremo qui il caso di frequenze  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . L'aspetto rilevante è che la superficie dell'energia non è più compatta, e ciò proprio a causa della differenza di segno tra le frequenze. Ne segue che un'orbita che abbia punto iniziale vicino quanto si vuole all'origine potrebbe andarsene all'infinito, a meno che non esistano altri meccanismi di confinamento che ci sono fin qui ignoti.

Le figure 6.18–6.21 rappresentano le sezioni di Poincaré nel caso di energia  $E = 0.015$ ; la scelta è dovuta più a motivi estetici che ad un reale interesse per quel particolare valore.

La figura 6.18 è una rappresentazione della sezione di Poincaré in una regione prossima all'origine di  $\mathbb{R}^4$ , quella che contiene le orbite interessanti.

---

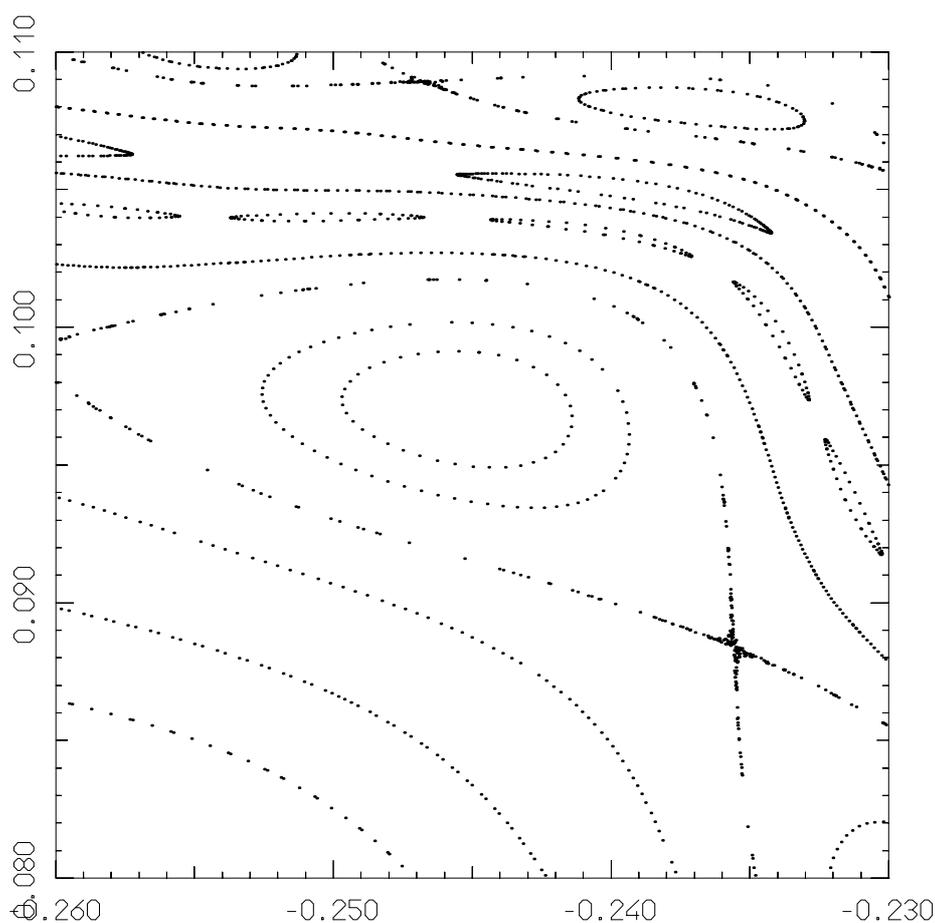
del sole è nota l'esistenza di un folto gruppo di asteroidi attorno ai punti triangolari. In effetti, questi punti risultano stabili nell'approssimazione lineare del sistema, ma la stabilità del sistema non lineare resta un problema aperto, e ciò proprio a causa della differenza di segno tra le frequenze del sistema linearizzato.



**Figura 6.19.** Ingrandimento dell'isola a sinistra della figura 6.18. Si mette meglio in evidenza la complessità della struttura delle orbite vicino ai bordi dell'isola centrale.

Qui già si osservano le conseguenze della non compattezza della superficie dell'energia. Le orbite limitate sono raggruppate in quattro regioni. Quella centrale è localizzata intorno ad un'orbita periodica che nel caso imperturbato si riduce all'oscillazione nel solo piano  $x_1, y_1$ . Le altre tre regioni sono localizzate intorno ad un'orbita periodica di periodo tre, e possono considerarsi di fatto come un'unica regione. Le orbite che partono al di fuori da queste strutture vanno rapidamente all'infinito: i punti di sezione corrispondenti ad una di queste orbite sono dispersi in modo casuale, ma sono alquanto rarefatti.<sup>9</sup> In questa figura si nota con evidenza un fatto che nei casi prece-

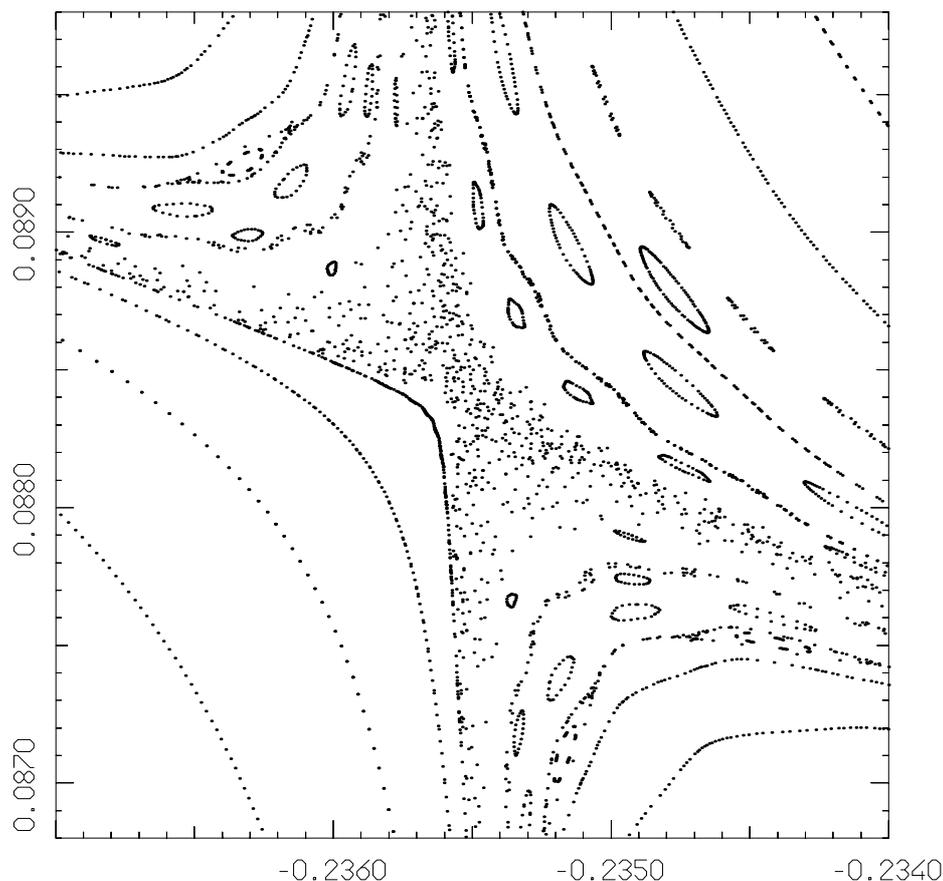
<sup>9</sup> Nel calcolo numerico l'integrazione di orbite che se ne vanno all'infinito diventa del tutto inaffidabile quando queste si allontanano dall'origine. Inoltre i termini quadratici delle equazioni provocano rapidamente un overflow nella rappresentazione di macchina. Il lettore che volesse riprodurre queste figure dovrà inserire nel suo programma di calcolo un controllo che arresta l'integrazione quando la distanza dall'origine è troppo grande.



**Figura 6.20.** Ingrandimento della zona circostante una delle orbite periodiche della figura 6.19. Si osservi la proliferazione di orbite periodiche in quella regione.

denti era in qualche modo oscurato dall'affollamento delle varie strutture, causato dalla compattezza della superficie dell'energia. L'isola che si forma intorno all'orbita periodica centrale sembra caratterizzarsi per una struttura alquanto ordinata delle orbite, almeno sulla nostra scala di osservazione. Invece le tre isole che si formano intorno all'orbita di periodo tre sembrano presentare un comportamento ordinato – sempre sulla nostra scala di osservazione – solo al centro, mentre i bordi hanno una struttura dall'aspetto più frastagliato.

Quest'ultimo fenomeno è ancor più evidente se si osserva l'ingrandimento di una delle isole intorno all'orbita di periodo tre, riportato in figura 6.19. Si vede bene che la struttura complessa è creata dalla proliferazione di orbite periodiche con le loro strutture di separatrici e di eventuali orbite caotiche. Questo fenomeno interessa in particolare i margini dell'isola. Si potrebbe dire, estendendo il linguaggio suggestivo di Hénon, che attorno all'isola ci sono numerosi scogli.



**Figura 6.21.** Ingrandimento della zona circostante l'orbita periodica instabile in basso a destra della figura 6.20. Si osserva con chiarezza l'esistenza di una dinamica caotica che nelle figure precedenti risultava poco visibile.

La proliferazione di orbite periodiche diventa ancor più evidente da un ingrandimento successivo, riportato in figura 6.20. Si vede con chiarezza che vi sono numerose catene di isole che si formano intorno ad altrettante orbite periodiche. Inoltre vi sono delle orbite periodiche instabili, ciascuna col suo corredo di separatrici. Su questa scala però non si manifesta ancora con evidenza l'esistenza di un comportamento caotico delle orbite, se si eccettua la piccola macchia in prossimità dell'orbita periodica instabile le cui separatrici delimitano l'isola più grande presente in figura.

L'ultimo ingrandimento, riportato in figura 6.21, riguarda una regione attorno alla piccola macchia cui abbiamo appena accennato. L'ingrandimento rivela una struttura ancor più complessa, in cui si mette in evidenza non solo l'esistenza di strutture sempre più minuscole di orbite periodiche col loro corredo di isole, ma anche di una zona dove predomina nettamente una dinamica di tipo caotico, riempita da una sola orbita.

Tutto questo lascia facilmente intuire che una tal struttura possa ripetersi all'infinito, su scale sempre più piccole. Questo però, come Hénon e Heiles hanno affermato con chiarezza, non può essere dimostrato col solo calcolo numerico. Del resto, con ulteriori ingrandimenti si entrerebbe inevitabilmente in conflitto con la struttura discreta della rappresentazione dei numeri reali sulla macchina, e con le inevitabili approssimazioni introdotte dall'algoritmo di integrazione.

