

9

SERIE E TRASFORMATE DI LIE

Il contenuto di questo capitolo è esclusivamente tecnico: lo scopo è introdurre gli algoritmi delle serie e delle trasformate di Lie come strumenti per il calcolo perturbativo. Alla base di questi metodi c'è l'idea di costruire una trasformazione di coordinate prossima all'identità mediante il flusso generato da un campo vettoriale. L'aspetto tecnico rilevante consiste nel tradurre questa idea in algoritmi espliciti, che possono essere effettivamente applicati in calcoli di serie con metodi perturbativi. Tali algoritmi risultano essere particolarmente efficaci quando vengano applicati al calcolo mediante manipolazione algebrica.

La formulazione dei metodi delle serie di Lie in forma algoritmica si può trovare nel libro di Gröbner [43]. In quel testo si possono trovare anche le stime quantitative sulla convergenza delle serie di Lie nel caso di variabili polinomiali. L'introduzione di tali metodi in Meccanica Celeste è dovuta ad Hori^[48] e Deprit^[26], che però, coerentemente con la tradizione degli astronomi, hanno sviluppato solo l'aspetto formale. L'elaborazione di uno schema quantitativo per le variabili d'angolo-azione si può trovare in [34].

9.1 Definizioni formali

In questo paragrafo mi occuperò in via preliminare dell'aspetto formale del calcolo, nel senso che lascerò momentaneamente da parte il problema della convergenza degli sviluppi. Di questa mi occuperò nel paragrafo successivo. Salvo specifica contraria, assumerò che tutte le funzioni di cui si fa uso in questo paragrafo siano analitiche.

Consideriamo uno spazio delle fasi $\mathcal{F}$ di dimensione $2n$ dotato di coordinate canoniche p, q . Consideriamo poi una funzione analitica $\chi(p, q)$, che chiameremo *funzione generatrice*. Consideriamo infine la derivata lungo il flusso canonico generato da $\chi(p, q)$, ossia

$$(9.1) \quad L_{\chi} \cdot = \{ \cdot, \chi \} .$$

9.1.1 La serie di Lie

La serie di Lie viene generata tramite l'operatore esponenziale L_χ definito come

$$(9.2) \quad \exp(\varepsilon L_\chi) = \sum_{s \geq 0} \frac{\varepsilon^s}{s!} L_\chi^s .$$

Tale operatore rappresenta l'evoluzione al tempo ε dovuta al flusso canonico generato dall'Hamiltoniana autonoma χ . Il primo utilizzo della serie di Lie consiste nello scrivere una trasformazione di coordinate prossima all'identità. Consideriamo $\chi(p', q')$ come funzione delle nuove variabili, e scriviamo

$$(9.3) \quad \begin{aligned} p &= \exp(\varepsilon L_\chi) p' = p' + \varepsilon \left. \frac{\partial \chi}{\partial q} \right|_{p', q'} + \frac{\varepsilon^2}{2} L_\chi \left. \frac{\partial \chi}{\partial q} \right|_{p', q'} + \dots \\ q &= \exp(\varepsilon L_\chi) q' = q' + \varepsilon \left. \frac{\partial \chi}{\partial p} \right|_{p', q'} + \frac{\varepsilon^2}{2} L_\chi \left. \frac{\partial \chi}{\partial p} \right|_{p', q'} + \dots ; \end{aligned}$$

Il calcolo della trasformazione inversa in questo caso non presenta più difficoltà di quante non se ne abbiano nella trasformazione diretta: dal momento che il flusso di $\chi(p', q')$ è autonomo, l'inverso del flusso al tempo ε generato da χ è il flusso al tempo ε generato da $-\chi$.

Esempio 9.1: *Deformazioni delle variabili d'angolo-azione* Consideriamo il caso di variabili d'angolo-azione $p \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ e $q \in \mathbb{T}^n$, con $\mathcal{G}$ aperto. Dato un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la funzione generatrice $\chi = \langle \xi, q \rangle =: \sum_l \xi_l q_l$, e costruiamo la trasformazione corrispondente. Con un rapido calcolo si ricava subito

$$p = \exp(\varepsilon L_\chi) p' = p' - \varepsilon \xi , \quad q = \exp(\varepsilon L_\chi) q' = q' ;$$

si tratta dunque di una piccola traslazione delle azioni, che si riduce a zero quando $\varepsilon = 0$. Se invece consideriamo una funzione generatrice $\chi = \chi(q')$ indipendente da p' , allora abbiamo la trasformazione

$$p = p' - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial q'} , \quad q = q' ;$$

Questa rappresenta una deformazione di ordine ε del toro p .

L'operatore esponenziale che abbiamo appena introdotto ha delle proprietà notevoli.

Lemma 9.1: *Valgono le seguenti proprietà.*

(i) *Linearità: per ogni coppia di funzioni f, g e per $\alpha \in \mathbb{R}$ vale*

$$\exp(\varepsilon L_\chi)(f+g) = \exp(\varepsilon L_\chi)f + \exp(\varepsilon L_\chi)g , \quad \exp(\varepsilon L_\chi)(\alpha f) = \alpha \exp(\varepsilon L_\chi)f .$$

(ii) *Conservazione del prodotto: per ogni coppia di funzioni f, g vale*

$$\exp(\varepsilon L_\chi)(f \cdot g) = \exp(\varepsilon L_\chi)f \cdot \exp(\varepsilon L_\chi)g .$$

(iii) *Conservazione della parentesi di Poisson: per ogni coppia di funzioni f, g vale*

$$\exp(\varepsilon L_\chi)\{f, g\} = \{\exp(\varepsilon L_\chi)f, \exp(\varepsilon L_\chi)g\} .$$

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Supponiamo ora di voler trasformare una funzione $f(p, q)$. In linea di principio dovremmo calcolare la funzione trasformata $f'(p', q')$ sostituendovi la trasformazione (9.3). Nel corso di un calcolo perturbativo poi dovremmo provvedere allo sviluppo in serie di Taylor della funzione trasformata, calcolando tutte le derivate ed i prodotti necessari. La proprietà notevole, che vale per le serie di Lie, è stabilita dal

Lemma 9.2: *Sia data una funzione generatrice $\chi(p, q)$ ed una funzione $f(p, q)$. Vale*

$$(9.4) \quad f(p, q) \Big|_{p=\exp(\varepsilon L_\chi)p', q=\exp(\varepsilon L_\chi)q'} = \exp(\varepsilon L_\chi) f \Big|_{p=p', q=q'} .$$

A questo lemma Gröbner ha dato il nome di *teorema di scambio*. Comprenderne il significato può richiedere un momento di attenzione: l'affermazione è che *per calcolare lo sviluppo in serie di ε della funzione trasformata non è necessario sostituire le variabili e sviluppare: basta applicare l'operatore esponenziale della serie di Lie alla funzione stessa*.¹

La dimostrazione del lemma 9.2 si può ottenere in due modi diversi. Un primo modo si presenta spontaneamente se si pensa che la trasformazione è generata da un flusso, e che la derivata di Lie $L_\chi f$ della funzione è proprio la derivata lungo il flusso, ossia $\frac{df}{d\varepsilon} = L_\chi f$. Il membro di destra della (9.4) altro non è che lo sviluppo di Taylor della funzione trasformata in potenze di ε . Un secondo modo consiste nell'osservare che le proprietà di linearità e di conservazione del prodotto fanno sì che il lemma valga per tutti i polinomi e per le serie di potenze. Il risultato segue dall'analiticità delle funzioni.²

Che la proprietà stabilita dal lemma 9.2 semplifichi sensibilmente l'operazione di trasformazione di una funzione è già di per sé abbastanza evidente. Ma lo si vede ancora meglio se si pensa di trasformare una funzione che è essa stessa una serie, ossia $f(p, q, \varepsilon) = f_0(p, q) + \varepsilon f_1(p, q) + \varepsilon^2 f_2(p, q) + \dots$. In tal caso si può (almeno a livello formale) far uso della linearità dell'operatore di serie di Lie: la funzione trasformata $g = \exp(\varepsilon L_\chi) f$ è una serie $g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots$ definita come $g = \exp(\varepsilon L_\chi) f_0 + \varepsilon \exp(\varepsilon L_\chi) f_1 + \varepsilon^2 \exp(\varepsilon L_\chi) f_2 + \dots$, ossia costruita applicando l'operatore della serie di Lie a ciascun termine dello sviluppo di f . L'azione dell'operatore può rappresentarsi

¹ Può essere utile un'ulteriore precisazione. Nel calcolo del membro di destra si può ben pensare a $f(p, q)$ e $\chi(p, q)$ come funzioni delle variabili p, q . Eseguendo tutti i calcoli richiesti si ritrova comunque una funzione di p, q . Nel membro di sinistra invece la sostituzione di variabili produce una funzione di p', q' . L'eguaglianza è da interpretarsi nel senso che basta cambiare il nome delle variabili nel membro di destra per riottenere l'espressione del membro di sinistra; questo è indicato simbolicamente con la sostituzione $p = p', q = q'$. In altre parole, conta la forma della funzione; il nome delle variabili è del tutto irrilevante.

² Per i dettagli su questo secondo procedimento si veda ad esempio [43], § I.2.

in modo comodo ed efficace mediante il diagramma triangolare

$$\begin{array}{cccccc}
 & g_0 & & f_0 & & \\
 & & & \downarrow & & \\
 & g_1 & & L_\chi f_0 & & f_1 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow \\
 (9.5) & g_2 & & \frac{1}{2!} L_\chi^2 f_0 & & L_\chi f_1 & & f_2 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & g_3 & & \frac{1}{3!} L_\chi^3 f_0 & & \frac{1}{2!} L_\chi^2 f_1 & & L_\chi f_2 & & f_3 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

In questo diagramma i termini dello stesso ordine in ε sono allineati sulla stessa riga. Il calcolo procede per colonne, come indicato dalle frecce: nota la funzione f_j e la generatrice χ si può calcolare ricorsivamente tutta la colonna sottostante fino all'ordine in ε voluto. Fatto questo per ciascuna colonna, basta sommare le righe e si ottengono i vari termini dello sviluppo di g in potenze di ε .

Si può riassumere il diagramma in una formula compatta: si ha

$$(9.6) \quad g_0 = f_0, \quad g_r = \sum_{j=1}^r \frac{1}{j!} L_{\chi_j} f_{r-j} \text{ per } r > 0.$$

9.1.2 Composizione di serie di Lie

Abbiamo visto che la serie di Lie definisce una trasformazione prossima all'identità. In particolare, nella forma in cui abbiamo esposto la teoria tale trasformazione è canonica: ciò è quanto affermato dalla proprietà (iii) del lemma 9.1, ed è del tutto naturale se si pensa che si tratta del flusso generato da un campo vettoriale hamiltoniano. È spontaneo chiedersi se in tal modo si possa costruire *qualunque* trasformazione canonica prossima all'identità.

Qui dobbiamo formulare la domanda in termini più precisi. Ciò che di fatto stiamo considerando è una famiglia di trasformazioni parametrizzata da ε (che potremo assumere sufficientemente piccolo). Supponiamo ora di assegnare una famiglia ad un parametro di trasformazioni

$$(9.7) \quad q = q' + \varepsilon \varphi_1(p', q') + \varepsilon^2 \varphi_2(p', q') + \dots, \quad p = p' + \varepsilon \psi_1(p', q') + \varepsilon^2 \psi_2(p', q') + \dots,$$

dove le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ e $\psi_1, \psi_2, \dots$ sono soggette alle condizioni che garantiscono la canonicità della trasformazione. La domanda è se esista una funzione generatrice $\chi(p', q')$ che produce questa famiglia di trasformazioni. La risposta in generale è negativa: una singola serie di Lie produce solo una classe particolare di trasformazioni. Per costruire trasformazioni più generali si può far ricorso alla *composizione di serie di Lie*^[50].

Consideriamo una successione di funzioni generatrici $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ e definiamo la successione di operatori $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \dots$ definita ricorsivamente come

$$(9.8) \quad S^{(1)} = \exp(\varepsilon L_{\chi_1}) , \quad S^{(k)} = \exp(\varepsilon^k L_{\chi_k}) S^{(k-1)} \quad \text{per } k > 1 .$$

Restando sempre a livello formale, supponiamo che ciascuno di questi operatori sia ben definito e che la successione tenda, in qualche senso, ad un limite. Allora risulta definito anche l'operatore

$$(9.9) \quad S_\chi = \dots \circ \exp(\varepsilon^3 L_{\chi_3}) \circ \exp(\varepsilon^2 L_{\chi_2}) \circ \exp(\varepsilon L_{\chi_1})$$

Questo procedimento definisce la *composizione di serie di Lie*.

L'inversione di questi operatori non presenta particolari difficoltà. Definiamo la successione $\tilde{S}^{(1)}, \tilde{S}^{(2)}, \tilde{S}^{(3)}, \dots$ come

$$(9.10) \quad \tilde{S}^{(1)} = \exp(-\varepsilon L_{\chi_1}) , \quad \tilde{S}^{(k)} = \tilde{S}^{(k-1)} \exp(-\varepsilon^k L_{\chi_k}) \quad \text{per } k > 1 .$$

Si verifica subito che vale

$$\tilde{S}^{(k)} \circ S^{(k)} = \text{Id} .$$

Anche in questo caso supponiamo che tale successione tenda (in qualche senso) ad un limite; ciò definisce l'operatore inverso di S_χ , ovvero

$$(9.11) \quad S_\chi^{-1} = \exp(-\varepsilon L_{\chi_1}) \circ \exp(-\varepsilon^2 L_{\chi_2}) \circ \exp(-\varepsilon^3 L_{\chi_3}) \circ \dots$$

Sempre operando formalmente, vale il

Lemma 9.3: *Data una qualunque trasformazione canonica della forma (9.7) esiste una successione di funzioni generatrici $\chi_1(p', q'), \chi_2(p', q'), \dots$ tale che si ha*

$$q = S_\chi q' , \quad p = S_\chi p' .$$

In altre parole, si può riprodurre la trasformazione cercata seguendo il flusso canonico di χ_1 fino al tempo ε , poi il flusso canonico di χ_2 fino al tempo ε^2 , &c.

9.1.3 Calcolo formale

A questo punto delle nostre considerazioni occorre aprire una parentesi sul significato da assegnare al *calcolo formale* delle serie perturbative. Ciò è particolarmente utile in quanto le serie prodotte dalla teoria delle perturbazioni sono tipicamente divergenti, sicché gli operatori che abbiamo definito rischiano di perdere significato. Inoltre dobbiamo tener ben presente che in un calcolo pratico non si potrà mai, di fatto, svolgere un numero infinito di trasformazioni.

Anzitutto riflettiamo un momento sulla rappresentazione tramite diagramma triangolare, in modo da comprendere bene come si possa effettivamente eseguire il calcolo. Per trasformare una funzione $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$ occorre calcolare

$$g = \dots \circ \exp(\varepsilon^2 L_{\chi_2}) \circ \exp(\varepsilon L_{\chi_1}) f .$$

A tal fine si calcola anzitutto $f' = \exp(\varepsilon L_{\chi_1}) f = f'_0 + \varepsilon f'_1 + \varepsilon^2 f'_2 + \dots$ come indicato nel diagramma triangolare (9.5), salvo l'ovvia sostituzione di g con f' e di χ con χ_1 . Poi si calcola $f'' = \exp(\varepsilon^2 L_{\chi_2}) f' = f''_0 + \varepsilon f''_1 + \varepsilon^2 f''_2 + \dots$ costruendo un diagramma

triangolare simile a quello della (9.5), ma facendo attenzione ad allineare correttamente le potenze di ε . Con un momento di riflessione si vede che si deve costruire il diagramma

$$\begin{array}{cccccc}
 f_0'' & & f_0' & & & \\
 & & \downarrow & & & \\
 f_1'' & & 0 & & f_1' & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \\
 f_2'' & & L_{\chi_2} f_0' & & 0 & & f_2' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f_3'' & & 0 & & L_{\chi_2} f_1' & & 0 & & f_3' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f_4'' & & \frac{1}{2!} L_{\chi_2}^2 f_0' & & 0 & & L_{\chi_2} f_2' & & 0 & & f_4' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

in cui compaiono molti elementi nulli. Ciò perché si procede per potenze di ε^2 invece che di ε . Al crescere di s l'applicazione di $\exp(\varepsilon^s L_{\chi_s})$ richiederà la costruzione di un diagramma triangolare, per così dire, sempre più rarefatto: in ogni colonna un termine non nullo viene seguito da $s - 1$ righe vuote. Si può dare una formula compatta, che in pratica potrà comprendersi solo immaginando qualcosa di simile ai diagrammi che abbiamo visto ma risulta utile quando si debba tradurre l'algoritmo in un programma di calcolo esplicito:

$$(9.12) \quad g_s = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} L_{\chi_r}^j f_{s-jr}, \quad k = \left\lfloor \frac{s}{r} \right\rfloor,$$

dove il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica il massimo intero non superiore a x .

Veniamo al procedimento che si deve seguire in un calcolo pratico. Occorrerà inevitabilmente troncare le serie all'ordine ε^r , con $r \geq 1$ scelto nel modo che riteniamo più conveniente. Consideriamo una funzione $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots + \varepsilon^r f_r$ e supponiamo di volerne costruire la funzione trasformata fino al termine di grado r in ε . A tal fine iniziamo col considerare una successione di funzioni $f^0, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$, ciascuna delle quali è a sua volta una serie in ε della forma $f^{(s)} = f_0^{(s)} + \varepsilon f_1^{(s)} + \varepsilon^2 f_2^{(s)} + \dots$, definita ricorsivamente come³

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(s)} = \exp(\varepsilon^s L_{\chi_s}) f^{(s-1)}.$$

Si ottiene così una successione di funzioni che tenderà ad una funzione $f^{(\infty)}$ che è la trasformata cercata (non dimentichiamo che stiamo lavorando a livello formale). Idealmente dovremmo costruire quest'ultima funzione e troncarnela lo sviluppo al termine di

³ La convenzione che sto adottando è che l'indice in basso indica il coefficiente di una potenza di ε , mentre l'indice in alto tiene conto del numero di operatori di serie di Lie già applicati.

ordine ε^r ; un'operazione chiaramente impossibile dal punto di vista pratico. Se però riflettiamo un momento sullo schema dei diagrammi triangolari ci rendiamo conto che *ci basta costruire ciascun diagramma fino alla riga corrispondente alla potenza ε^r* . Infatti, nessuno dei termini successivi può dare contributi ad ordini più bassi, e dunque tutti quei termini possono essere ignorati. In particolare, ci basta conoscere le sole funzioni generatrici $\chi_1, \dots, \chi_r$. Tutte queste operazioni sono ben definite.

Le stesse osservazioni valgono per la trasformazione inversa: in pratica, basta calcolare l'azione del solo operatore $\tilde{S}^{(r)}$ definito dalla (9.10) costruendo i diagrammi triangolari appropriati, sempre troncati alla riga corrispondente alla potenza ε^r .

Prima di chiudere questo paragrafo vorrei richiamare l'attenzione del lettore su un fatto che nelle applicazioni pratiche può creare qualche difficoltà. Supponiamo di aver determinato le funzioni generatrici $\chi_1, \dots, \chi_r$, e quindi di saper costruire gli operatori $S_\chi^{(r)}$ e $\tilde{S}_\chi^{(r)}$. Supponiamo poi di calcolare una trasformazione

$$q = S_\chi^{(r)} q' , \quad p = S_\chi^{(r)} p' .$$

Otterremo così delle espressioni del tipo

$$(9.13) \quad q = q' + \varepsilon \varphi_1(p', q') + \varepsilon^2 \varphi_2(p', q') + \dots , \quad p = p' + \varepsilon \psi_1(p', q') + \varepsilon^2 \psi_2(p', q') + \dots ,$$

dove le funzioni $\varphi_1(p', q'), \dots$ e $\psi_1(p', q'), \dots$ possono calcolarsi esplicitamente. Accanto a questa trasformazione possiamo considerare la sua inversa

$$q' = \tilde{S}_\chi^{(r)} q , \quad p' = \tilde{S}_\chi^{(r)} p .$$

Anche in questo caso otterremo delle espressioni

$$(9.14) \quad q' = q + \varepsilon \tilde{\varphi}_1(p, q) + \varepsilon^2 \tilde{\varphi}_2(p, q) + \dots , \quad p' = p + \varepsilon \tilde{\psi}_1(p, q) + \varepsilon^2 \tilde{\psi}_2(p, q) + \dots ,$$

che in linea di principio potremmo calcolare esplicitamente. Supponiamo ora di sostituire le (9.14) nelle (9.13). Per il lemma 9.2 (il teorema di scambio) ciò equivale ad applicare l'operatore $\tilde{S}_\chi^{(r)}$ alle funzioni che compaiono nei secondi membri della (9.13). Qualunque sia il procedimento che seguiamo — sostituzione o trasformazione delle funzioni — ci attendiamo che il risultato sia l'identità. In linea di principio ciò è vero solo se si considerano le trasformazioni definite mediante le serie infinite. In realtà troviamo di meglio: se si esegue il calcolo troncando tutti i diagrammi alla riga corrispondente a ε^r si trova che avendo applicato sia la trasformazione diretta che l'inversa si annullano tutte le righe del diagramma triangolare finale, salvo la prima (che dà l'identità).

La sorpresa arriva se si svolge il calcolo numericamente: si assegnano dei valori numerici a p', q' , si calcolano i valori numerici p, q mediante le (9.13), poi si pongono questi valori nelle (9.14) e si calcolano numericamente p', q' . Si troverà che questi ultimi valori differiscono da quelli iniziali. Ciò è effetto del troncamento delle serie: sia la trasformazione diretta che l'inversa introducono un errore di ordine ε^{r+1} , che ritroviamo alla fine del procedimento. Si tratta di un'osservazione che nel calcolo numerico può avere una certa rilevanza.

9.1.4 La trasformata di Lie

Una notevole variante del metodo delle serie di Lie si ha considerando una trasformazione generata dal flusso di un sistema Hamiltoniano non autonomo. Se ne ricava una formula di trasformazione diversa dalla (9.2), e pure un po' più complessa, che presenta però alcuni vantaggi. I primi lavori in cui compare un algoritmo di questo tipo sono quelli di Hori^[48] e Deprit^[26]. Ad essi è dovuto il nome *trasformata di Lie*, che adotterò in queste note. Dopo la pubblicazione dei due lavori citati sono state proposte innumerevoli varianti dell'algoritmo, e non è possibile, né sarebbe utile, elencarle tutte.⁴ Qui mi limiterò a proporre la forma che preferisco, che è in stretta relazione con il cosiddetto *algoritmo dell'inversa della trasformata di Lie* introdotto da Henrard^[45].

Nel seguito di questo paragrafo è conveniente porre $\varepsilon = 1$. Ciò semplifica sensibilmente le formule, ed ha anche il pregio di dare all'algoritmo una maggiore generalità.

Consideriamo una *successione generatrice* $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ di funzioni analitiche. La trasformata di Lie è l'operatore T_χ definito come segue:

$$(9.15) \quad T_\chi = \sum_{s \geq 0} E_s ,$$

dove la successione di operatori $\{E_s\}_{s \geq 0}$ è definita ricorsivamente da

$$(9.16) \quad E_0 = \text{Id} , \quad E_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} E_{s-j} .$$

Mediante la trasformata di Lie possiamo definire una trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} q &= T_\chi q' = q' + L_{\chi_1} q' + \left(\frac{1}{2} L_{\chi_1}^2 q' + L_{\chi_2} q' \right) + \dots , \\ p &= T_\chi p' = p' + L_{\chi_1} p' + \left(\frac{1}{2} L_{\chi_1}^2 p' + L_{\chi_2} p' \right) + \dots , \end{aligned}$$

che risulta essere canonica (si veda il lemma 9.4).

Il caso più semplice è quello della successione generatrice $\chi = \{\chi_1, 0, 0, \dots\}$, in cui il solo termine non nullo è il primo. In questo caso la trasformata di Lie coincide con la serie di Lie generata da χ_1 , a patto di considerare il flusso al tempo $\varepsilon = 1$.

Lemma 9.4: *La trasformata di Lie T_χ definita dalle (9.15) e (9.16) ha le proprietà seguenti.*

(i) *Linearità: per ogni coppia di funzioni f, g e per $\alpha \in \mathbb{R}$ vale*

$$T_\chi(f + g) = T_\chi f + T_\chi g , \quad T_\chi(\alpha f) = \alpha T_\chi f .$$

(ii) *Conservazione del prodotto: per ogni coppia di funzioni f, g vale*

$$T_\chi(f \cdot g) = T_\chi f \cdot T_\chi g .$$

⁴ Per un elenco non esaustivo dei vari algoritmi si veda ad esempio [46].

(iii) *Conservazione della parentesi di Poisson: per ogni coppia di funzioni f, g vale*

$$T_\chi\{f, g\} = \{T_\chi f, T_\chi g\} .$$

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, [34].

Il lettore osserverà che le proprietà che abbiamo appena enunciato sono identiche a quelle dell'operatore della serie di Lie. È lecito attendersi che i due operatori abbiano in comune anche altre proprietà.

Lemma 9.5: *Sia data una successione generatrice $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ ed una funzione $f(p, q)$. Vale*

$$(9.17) \quad f(p, q) \Big|_{p=T_\chi p', q=T_\chi q'} = T_\chi f \Big|_{p=p', q=q'} .$$

Come nel caso delle serie di Lie, la dimostrazione del lemma può fondarsi sul fatto che la trasformazione conserva somme e prodotti, grazie all'analiticità delle funzioni.⁵

Consideriamo ora una funzione $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$, e denotiamo con $g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots$ la sua trasformata $g = T_\chi f$; ci proponiamo di calcolare le funzioni $g_0, g_1, \dots$ che formano la serie per g . Sfruttando la linearità dell'operatore disponiamo i vari termini nel diagramma triangolare

$$(9.18) \quad \begin{array}{ccccccc} & g_0 & & f_0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & g_1 & & E_1 f_0 & & f_1 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ g_2 & & E_2 f_0 & & E_1 f_1 & & f_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g_3 & & E_3 f_0 & & E_2 f_1 & & E_1 f_2 & & f_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

dove consideriamo dello stesso ordine i termini allineati sulla stessa riga. Il diagramma si costruisce per colonne, come indicato dalle frecce, e le funzioni g_s trasformate si calcolano sommando tutti i contributi che si trovano sulla stessa riga. Così, la prima riga dà $g_0 = f_0$, la seconda dà $g_1 = E_1 f_0 + f_1$, &c.⁶

⁵ Si ricordino le osservazioni fatte a proposito della serie di Lie, compresa la nota 1 poco sopra.

⁶ Questo modo di procedere può risultare alquanto misterioso per un lettore che, avendo acquisito una buona familiarità con i metodi di sviluppo della teoria delle perturbazioni, è avvezzo ad usare sviluppi in un parametro. Vorrei chiarire questo aspetto, che del resto avrà un ruolo non banale nel seguito. Introduciamo un parametro perturbativo ε , e scriviamo la successione generatrice come $\varepsilon\chi_1, \varepsilon^2\chi_2, \dots$ anziché $\chi_1, \chi_2, \dots$. Allora la trasformata di Lie di una funzione generica f (indipendente da ε) genera in modo naturale una trasformata che è una serie di potenze in ε . Infatti, basta osservare che

Il calcolo dell'inversa della trasformata di Lie è all'apparenza meno banale. Dal punto di vista pratico però si scopre che l'inversione non è più complessa del calcolo diretto: basta usare in modo astuto il diagramma triangolare (9.18). In effetti, supponiamo che g sia data e che f sia l'incognita da determinarsi risolvendo l'equazione $T_\chi f = g$. La prima riga del diagramma dà immediatamente $f_0 = g_0$; una volta determinato f_0 si può calcolare tutta la colonna sotto f_0 , e dalla seconda riga si ricava immediatamente $f_1 = g_1 - E_1 f_0$; noto f_1 , si può costruire tutta la colonna sottostante, e quindi si determina f_2 dalla terza riga ponendo $f_2 = g_2 - E_2 f_0 - E_1 f_1$, &c. Proseguendo in modo analogo si calcolano tutti i termini desiderati di f .

Si può anche ricavare una formula esplicita per l'operatore che calcola l'inversa, ossia

$$(9.19) \quad T_\chi^{-1} = \sum_{s \geq 0} D_s ,$$

dove

$$D_0 = \text{Id} , \quad D_s = - \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} D_{s-j} L_{\chi_j} .$$

Basta però un attimo di riflessione per rendersi conto che si tratta di una formula del tutto inutile in un calcolo pratico: l'algoritmo che ho esposto poco fa è decisamente più efficiente. Ciononostante ho riportato la formula in quanto utile per le stime analitiche.

La proprietà che rende particolarmente interessante la trasformata di Lie è contenuta nell'enunciato del seguente

Lemma 9.6: *Data una qualunque trasformazione canonica della forma (9.7) esiste una successione generatrice $\chi_1(p', q')$, $\chi_2(p', q')$, ... tale che si ha*

$$p = T_\chi p' , \quad q = T_\chi q' .$$

In particolare se è assegnata una famiglia ad un parametro di trasformazioni prossime all'identità esiste una successione generatrice che la riproduce.

$L_{\varepsilon \chi_1} = \varepsilon L_{\chi_1}$, $L_{\varepsilon^2 \chi_2} = \varepsilon^2 L_{\chi_2}$, ... sicché l'operatore E_s nella definizione (9.16) risulta avere un fattore ε^s . Supponiamo ora che f stessa sia una serie in ε , che scriveremo come $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$, e proponiamoci di calcolare lo sviluppo $g = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots$ della funzione trasformata $g = T_\chi f$. Allora diventa naturale costruire il diagramma triangolare (9.18) allineando sulla stessa riga tutti i termini che hanno a coefficiente la stessa potenza di ε . A questo punto si può porre $\varepsilon = 1$, ed osservare che gli indici hanno in pratica lo stesso ruolo degli esponenti di ε . Può sembrare un puro gioco formale, ma ha una sua convenienza. Possiamo ben considerare l'indice s di una funzione come l'indicazione che essa è piccola "di ordine s " in qualche senso, senza relazione a priori con un parametro. Tale senso diventa rigoroso solo nell'ambito di una teoria quantitativa che giustifica in modo preciso il fatto che una funzione che diciamo "di ordine s " sia più piccola di una "di ordine $r > s$ ". Ad esempio, basta mostrare che i termini successivi di una serie decrescono regolarmente in qualche modo. Nel capitolo 10 faremo uso sistematico di questo modo di procedere, pur operando con composizioni di serie di Lie.

*** Completare con la dimostrazione ***

9.1.5 Relazioni tra la trasformata di Lie e la composizione di serie di Lie

Le relazioni, sempre di tipo formale, che metterò in evidenza in questo paragrafo non hanno una grande utilità dal punto di vista del calcolo pratico, ma risultano molto utili per lo sviluppo di una teoria quantitativa.

Il punto di partenza sta nelle formule (9.6) e (9.19) che definiscono rispettivamente la trasformata di Lie e la sua inversa come somma di operatori lineari definiti in forma ricorsiva. Per la composizione di serie di Lie e la sua inversa si possono scrivere le formule analoghe

$$(9.20) \quad S_\chi = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s W_s, \quad S_\chi^{-1} = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s V_s$$

dove gli operatori W_s, V_s sono definiti come

$$(9.21) \quad \begin{aligned} W_0 &= V_0 = \text{Id}, \\ W_s &= \sum_{k_1+2k_2+\dots+sk_s=s} \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_s!} L_{\chi_s}^{k_s} \circ \dots \circ L_{\chi_1}^{k_1} \\ V_s &= \sum_{k_1+2k_2+\dots+sk_s=s} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_s}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_s!} L_{\chi_1}^{k_1} \circ \dots \circ L_{\chi_s}^{k_s}. \end{aligned}$$

La verifica segue da semplici considerazioni sulle formule (9.9) e (9.11) che definiscono gli operatori S_χ e S_χ^{-1} . Basta considerare lo sviluppo dell'operatore esponenziale e selezionare tutti i termini che hanno a coefficiente la stessa potenza di ε .

Il lettore osserverà che gli operatori W_s e V_s sono molto simili: le somme corrono sugli stessi insiemi di indici, ed ogni termine della somma contiene esattamente gli stessi operatori L_{χ_j} con le stesse potenze ed un coefficiente numerico che differisce solo per il segno; gli indici j degli operatori L_{χ_j} sono ordinati (da destra a sinistra) in modo crescente per W_s e in modo decrescente per V_s . Potremmo dire che si può ricavare V_s da W_s semplicemente invertendo l'ordine degli operatori ed applicando un segno meno a ciascuno di essi.

Quest'osservazione sembra, tutto sommato, una curiosità priva di particolare interesse. Ma diventa interessante se si cerca di stabilire una relazione tra la composizione di serie di Lie e la trasformata di Lie. Consideriamo un operatore che abbia genericamente la forma

$$F = L_{\chi_{k_1}} \circ \dots \circ L_{\chi_{k_s}}$$

di una composizione di s operatori L_{χ_j} scelti in modo arbitrario. Denotiamo con

$$: F :^{(+)} = : L_{\chi_{k_1}} \circ \dots \circ L_{\chi_{k_s}} :^{(+)}$$

l'operatore costruito a partire da F mantenendo gli stessi operatori, ma permutandoli in modo che gli indici siano disposti in ordine crescente da destra a sinistra. Analogamente denotiamo con

$$: F :^{(-)} = : L_{\chi_{k_1}} \circ \dots \circ L_{\chi_{k_s}} :^{(-)}$$

l'operatore costruito permutando gli operatori in modo che gli indici siano disposti in ordine decrescente da destra verso sinistra. Naturalmente F , $: F :^{(+)}$ e $: F :^{(-)}$ saranno operatori ben diversi in generale, perché le derivate di Lie non commutano: si ricordi l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson.

Se un operatore è definito a sua volta come combinazione lineare di operatori della stessa forma di F definiamo le operazioni $: \cdot :^{(+)}$ e $: \cdot :^{(-)}$ eseguendole su ciascun termine della somma.

La relazione tra composizione di serie di Lie e trasformata di Lie è enunciata nel seguente^[28]

Lemma 9.7: *Per gli operatori E_s , D_s , W_s e V_s che definiscono le trasformate e le serie di Lie valgono le relazioni*

$$: E_s :^{(+)} = W_s, \quad : D_s :^{(-)} = V_s.$$

*** aggiungere la dimostrazione ***

9.2 Strumenti analitici

Gli sviluppi recenti della teoria delle perturbazioni fanno uso sistematico di metodi quantitativi in grado di mettere in evidenza le proprietà di convergenza o di asintoticità delle serie. In questo paragrafo raccoglierò alcuni elementi tecnici che costituiscono la base per i capitoli successivi. L'uso di stime quantitative, sia pure non ottimali, è essenziale per la dimostrazione di alcuni tra i risultati più interessanti della teoria moderna delle perturbazioni.

9.2.1 Diseguaglianze di Cauchy

Richiamo qui le diseguaglianze di Cauchy nel caso più semplice. Consideriamo un disco aperto $\Delta_\varrho(0)$ con centro nell'origine del piano complesso $\mathbb{C}$. Sia f una funzione analitica e limitata sul disco $\Delta_\varrho(0)$. Consideriamo la norma uniforme⁷ $|f|_\varrho$ della funzione f sul dominio $\Delta_\varrho(0)$ definita come

$$(9.22) \quad |f|_\varrho = \sup_{z \in \Delta_\varrho(0)} |f(z)|.$$

La diseguaglianza di Cauchy per la derivata f' di f nell'origine afferma che

$$(9.23) \quad |f'(0)| \leq \frac{1}{\varrho} |f|_\varrho.$$

Più in generale, per la derivata di ordine s di f , che denotiamo con $f^{(s)}$, vale la diseguaglianza

$$(9.24) \quad |f^{(s)}(0)| \leq \frac{s!}{\varrho^s} |f|_\varrho.$$

⁷ Detta anche norma di Chebishev o più brevemente norma sup.

Ad esempio, sia $\varrho = 1$ e $f(z) = z^s$; si verifica facilmente che $|f|_1 = 1$, sicché la disuguaglianza di Cauchy dà $|f^{(s)}(0)| \leq s!$. La dimostrazione delle disuguaglianze (9.23) e (9.24) è una facile applicazione della formula integrale di Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

L'estensione al caso di n variabili si può ottenere in modo diretto come segue. Definiamo $\Delta_\varrho(0)$ come un polidisco di raggio ϱ con centro nell'origine di $\mathbb{C}^n$, ossia

$$(9.25) \quad \Delta_\varrho(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \varrho\} ,$$

dove $|z| = \max_j |z_j|$ è la norma l_∞ su $\mathbb{C}^n$. La norma uniforme di una funzione analitica viene definita come in (9.22), e la disuguaglianza di Cauchy per le derivate prime diventa

$$(9.26) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(0) \right| \leq \frac{1}{\varrho} |f|_\varrho , \quad 1 \leq j \leq n .$$

Per le derivate di ordine superiore si ha la disuguaglianza

$$(9.27) \quad \left| \frac{\partial^{s_1+\dots+s_n} f}{\partial z_1^{s_1} \dots \partial z_n^{s_n}}(0) \right| \leq \frac{s_1! \dots s_n!}{\varrho^{s_1+\dots+s_n}} |f|_\varrho .$$

9.2.2 Estensione complessa dei domini

Veniamo ora alle estensioni necessarie per far uso delle disuguaglianze di Cauchy nell'ambito dei problemi della teoria delle perturbazioni. Ci interessa in particolare il caso di uno spazio delle fasi $\mathcal{G} \times \mathbb{T}^n$, dove $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, dotato di coordinate canoniche d'angolo-azione $q \in \mathbb{T}^n$ e $p \in \mathcal{G}$.

Per far uso delle disuguaglianze di Cauchy occorre introdurre una *estensione complessa* dei domini. Dato $p \in \mathcal{G}$ consideriamo il polidisco complesso $\Delta_\varrho(p)$ di raggio $\varrho > 0$ con centro in p definito come nella (9.25). L'estensione complessa $\mathcal{G}_\varrho$ del dominio reale $\mathcal{G}$ viene definita come

$$(9.28) \quad \mathcal{G}_\varrho = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} \Delta_\varrho(p) .$$

In modo analogo, dato $\sigma > 0$ si costruisce l'estensione complessa $\mathbb{T}_\sigma^n$ del toro n -dimensionale definendola come

$$(9.29) \quad \mathbb{T}_\sigma^n = \{q \in \mathbb{C}^n : |\operatorname{Im} q| < \sigma\} ,$$

ossia come il prodotto cartesiano di strisce complesse di semilarghezza σ intorno all'asse reale. Otteniamo così l'estensione complessa dello spazio delle fasi

$$\mathcal{D}_{\varrho,\sigma} = \mathcal{G}_\varrho \times \mathbb{T}_\sigma^n .$$

La norma uniforme si estende in modo diretto allo spazio delle funzioni analitiche sul dominio $\mathcal{D}_{\varrho,\sigma}$. Ad esempio, la norma $|f|_\varrho$ di una funzione f analitica su $\mathcal{G}_\varrho$ è

$$(9.30) \quad |f|_\varrho = \sup_{p \in \mathcal{G}_\varrho} |f(p)| .$$

Analogamente, la norma $|g|_{\varrho, \sigma}$ di una funzione g analitica su $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma}$ è

$$(9.31) \quad |g|_{\varrho, \sigma} = \sup_{(p, q) \in \mathcal{D}_{\varrho, \sigma}} |g(p, q)| .$$

Veniamo alle diseguaglianze di Cauchy. L'uso tipico che se ne fa in teoria delle perturbazioni richiede l'introduzione di famiglie di domini parametrizzate dal raggio dei polidischi: si tratta di una questione che richiede un po' di attenzione. Prendiamo le mosse dal caso più semplice. Consideriamo una funzione f analitica e limitata sul dominio complesso $\mathcal{G}_{\varrho}$. Dato δ con $0 < \delta \leq \varrho$ consideriamo il dominio $\mathcal{G}_{\varrho-\delta}$, ossia l'unione di polidischi di raggio $\varrho - \delta$ con centro in ogni punto di $\mathcal{G}_{\varrho}$. È immediato osservare che $\mathcal{G}_{\varrho-\delta} \subset \mathcal{G}_{\varrho}$. L'osservazione che segue è meno immediata, ma più utile. Consideriamo un qualunque punto $p \in \mathcal{G}_{\varrho-\delta}$; allora il polidisco $\Delta_{\delta}(p)$ con centro p e raggio δ è un sottinsieme di $\mathcal{G}_{\varrho}$, per costruzione. Di conseguenza la funzione f è analitica e limitata in $\Delta_{\delta}(p)$, e per ogni $p' \in \Delta_{\delta}(p)$ vale la diseguaglianza $|f(p')| \leq |f|_{\varrho}$, e dunque vale anche $\sup_{p' \in \Delta_{\delta}(p)} |f(p')| \leq |f|_{\varrho}$. Per la diseguaglianza di Cauchy abbiamo anche

$$\left| \frac{\partial f}{\partial p_j}(p) \right| \leq \frac{1}{\delta} |f|_{\varrho} , \quad 1 \leq j \leq n .$$

Questo è vero per ogni punto $p \in \mathcal{G}_{\varrho-\delta}$, sicché concludiamo che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial p_j} \right|_{\varrho-\delta} \leq \frac{1}{\delta} |f|_{\varrho} , \quad 1 \leq j \leq n .$$

Il fatto notevole è che abbiamo una stima della derivata di una funzione su un dominio complesso, e non in un solo punto. Dobbiamo però pagare un prezzo: la restrizione del dominio di partenza, al quale, per così dire, occorre togliere una cornice di spessore δ . In linea di principio potremmo stimare in modo analogo le derivate successive, ma non mi soffermo su questo punto perché avremo bisogno di generalizzazioni ben più consistenti.

9.2.3 Norme di Fourier con peso

La norma uniforme che abbiamo introdotto ha dei pregi notevoli, ma presenta alcuni difetti sgradevoli nel momento in cui si tenta di dare una forma quantitativa agli sviluppi perturbativi in variabili d'angolo-azione, ed in particolare ai metodi di forma normale di cui ci occuperemo più avanti. Si può introdurre una norma diversa, ben più comoda, nota come *norma di Fourier con peso*. A tal fine si sfrutta una proprietà interessante delle funzioni analitiche periodiche.

Consideriamo anzitutto una funzione di una sola variabile $f(q)$ analitica e limitata sul dominio complesso $\mathbb{T}_{\sigma'}$, ovvero la striscia di semiampiezza σ' intorno all'asse reale nel piano $\mathbb{C}$. Una tale funzione ammette lo sviluppo di Fourier

$$f(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikq} , \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q) e^{-ikq} dq .$$

La proprietà che ci interessa è il *decadimento esponenziale dei coefficienti*: si ha la disuguaglianza

$$|f_k| \leq |f|_{\sigma'} e^{-|k|\sigma'}$$

Vediamone la dimostrazione. Supponiamo che k sia positivo, e riscriviamo l'integrale traslando il contorno di integrazione di $-i\sigma'$, sicché abbiamo

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q - i\sigma') e^{-ikq} e^{-k\sigma'} dq .$$

La disuguaglianza si ricava immediatamente osservando che vale $|f(q - i\sigma')| \leq |f|_{\sigma'}$, in virtù della definizione di norma uniforme, e che inoltre $|e^{-ikq}| = 1$. Per $k < 0$ basta traslare il contorno di $i\sigma'$, mentre per $k = 0$ l'affermazione è banale (la media di una funzione non può superare il massimo della stessa).

Nel caso più generale di una funzione $f(p, q)$ analitica e limitata su un dominio $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma'}$ si estende l'argomento che abbiamo appena illustrato. Si sviluppa la funzione in serie di Fourier come

$$f(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} ,$$

dove i coefficienti sono definiti come

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(q) e^{-i\langle k, q \rangle} dq_1 \dots dq_n .$$

Considerando p come un parametro e ricorrendo ad una traslazione del contorno di integrazione per le singole variabili q si ricava la disuguaglianza

$$|f_k(p)| \leq |f|_{\varrho, \sigma'} e^{-|k|\sigma'} , \quad \text{per ogni } p \in \mathcal{G}_{\varrho} ,$$

dove $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$. Poiché questo è vero per ogni $p \in \mathcal{G}_{\varrho}$ concludiamo

$$|f_k|_{\varrho} \leq |f|_{\varrho, \sigma'} e^{-|k|\sigma'} ,$$

che è la proprietà che ci interessa.

Grazie al decadimento esponenziale dei coefficienti possiamo definire la norma di Fourier con peso $\|f\|_{\varrho, \sigma}$ con $0 < \sigma < \sigma'$ come

$$(9.32) \quad \|f\|_{\varrho, \sigma} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma} .$$

La condizione $\sigma < \sigma'$ garantisce la convergenza della serie che definisce la norma.

È anche utile osservare che la norma uniforme è limitata dalla norma di Fourier con peso, ossia che

$$|f|_{\varrho, \sigma} \leq \|f\|_{\varrho, \sigma} .$$

9.2.4 Diseguaglianze di Cauchy generalizzate

Mi occuperò ora della generalizzazione delle diseguaglianze di Cauchy al caso in cui le derivate rispetto alle variabili vengano sostituite da derivate di Lie rispetto ad un campo vettoriale hamiltoniano, ovvero parentesi di Poisson con la generatrice di una trasformazione canonica. Queste ultime infatti hanno un ruolo primario nella definizione sia delle serie che delle trasformate di Lie. Si tratta di una parte alquanto tecnica. Il lettore dovrà prestare attenzione in particolare al gioco dei domini: ogni derivata richiede una restrizione del dominio da considerarsi, ma le restrizioni successive devono essere fatte in modo consistente.

Lemma 9.8: *Siano $f(p, q)$ e $g(p, q)$ due funzioni analitiche e limitate rispettivamente sui domini $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma}$, e $\mathcal{D}_{(1-d')(\varrho, \sigma)}$, dove d' è soggetto alla limitazione $0 \leq d' < 1$, sicché $\|f\|_{\varrho, \sigma}$ e $\|g\|_{(1-d')(\varrho, \sigma)}$ sono quantità finite. Allora valgono le affermazioni seguenti:*

(i) per $0 < d < 1$ e per $1 \leq j \leq n$ si ha

$$(9.33) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{d\varrho} \|f\|_{\varrho, \sigma}, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial q_j} \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{ed\sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma};$$

(ii) per $0 < d < 1 - d'$ si ha

$$(9.34) \quad \|\{f, g\}\|_{(1-d-d')(\varrho, \sigma)} \leq \frac{2}{ed(d+d')\varrho\sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma} \|g\|_{(1-d')(\varrho, \sigma)}.$$

Dimostrazione. (i) Scriviamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial p_j}(p) e^{i\langle k, q \rangle}.$$

Per definizione di norma abbiamo

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} = \sum_k \left| \frac{\partial f_k}{\partial p_j} \right|_{(1-d)\varrho} e^{(1-d)|k|\sigma};$$

d'altra parte, grazie alle diseguaglianze di Cauchy, il membro di destra è maggiorato da

$$\frac{1}{d\varrho} \sum_k |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma},$$

dove ho ommesso nell'esponente un fattore $1 - d$ che non è essenziale, sicché la prima delle (9.33) segue dalla definizione della norma. Per la seconda calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = i \sum_k k_j f_k(p) e^{i\langle k, q \rangle},$$

e grazie alla definizione di norma ricaviamo la stima

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial q_j} \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} = \sum_k |k_j| |f_k|_{(1-d)\varrho} e^{(1-d)|k|\sigma} \leq \sum_k |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma} |k| e^{-d|k|\sigma}.$$

Facciamo uso ora della disuguaglianza elementare⁸

$$(9.35) \quad x^\alpha e^{-\delta x} \leq \left(\frac{\alpha}{e\delta}\right)^\alpha$$

valida per qualunque α , β e x positivo. Ponendo $\alpha = 1$ e sostituendo rispettivamente $|k|$ e $d\sigma$ al posto di x e δ abbiamo $|k|e^{-d|k|\sigma} \leq 1/(e d\sigma)$; da qui, grazie alla definizione della norma, si ricava la seconda delle (9.33).

(ii) La dimostrazione della (9.34) è più laboriosa. Calcoliamo anzitutto

$$\{f, g\} = i \sum_{k, k'} \left[\sum_{l=1}^n \left(k_l \frac{\partial g_{k'}}{\partial p_l} f_k + k'_l \frac{\partial f_k}{\partial p_l} g_{k'} \right) \right] e^{i\langle k, q \rangle} e^{i\langle k', q \rangle},$$

e facciamo uso della definizione della norma, ricavando la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|\{f, g\}\|_{(1-d'-d)(\varrho, \sigma)} &< \sum_{k, k'} \left[\sum_{l=1}^n \left(|k_l| \left| \frac{\partial g_{k'}}{\partial p_l} \right|_{(1-d'-d)\varrho} |f_k|_{\varrho} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |k'_l| \left| \frac{\partial f_k}{\partial p_l} \right|_{(1-d'-d)\varrho} |g_{k'}|_{(1-d')\varrho} \right) \right] e^{(1-d'-d)|k+k'|\sigma}. \end{aligned}$$

In virtù delle disuguaglianze di Cauchy abbiamo che il membro di destra dell'ultima espressione è maggiorato da

$$\begin{aligned} \frac{1}{d\varrho} \sum_{k, k'} |g_{k'}|_{(1-d')\varrho} e^{(1-d')|k'|\sigma} |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma} \sum_{l=1}^n |k_l| e^{-(d'+d)|k|\sigma} \\ + \frac{1}{(d'+d)\varrho} \sum_{k, k'} |g_{k'}|_{(1-d')\varrho} e^{(1-d')|k'|\sigma} |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma} \sum_{l=1}^n |k'_l| e^{-d|k'|\sigma}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in questa somma le sole parti dipendenti dall'indice l sono $\sum_l |k_l| = |k|$ e $\sum_l |k'_l| = |k'|$; inoltre, grazie alla disuguaglianza (9.35), abbiamo

$$|k| e^{-(d'+d)|k|\sigma} \leq \frac{1}{(d'+d)e\sigma}, \quad |k'| e^{-d|k'|\sigma} \leq \frac{1}{de\sigma}.$$

Facendo uso di queste ultime disuguaglianze nella maggiorazione che abbiamo scritto poco sopra e riordinando opportunamente i termini abbiamo che quell'espressione è maggiorata da

$$\frac{2}{ed(d'+d)\varrho\sigma} \sum_{k'} |g'_k|_{(1-d')\varrho} e^{(1-d')|k'|\sigma} \cdot \sum_k |f_k|_{\varrho} e^{|k|\sigma},$$

e grazie alla definizione delle norma $\|f\|_{\varrho, \sigma}$ e $\|g\|_{(1-d')(\varrho, \sigma)}$ concludiamo che la (9.34) è vera. Q.E.D.

⁸ La funzione $x^\alpha e^{-\beta x}$ ha un massimo per $x = \alpha/\beta$, ed in quel punto assume il valore a destra nella disuguaglianza.

Il lemma che abbiamo dimostrato serve da base per la stima della parentesi di Poisson multipla. Consideriamo un'espressione della forma $L_{g_s} \circ \dots \circ L_{g_1} f$. Possiamo darne una maggiorazione applicando ripetutamente il lemma 9.8. Occorre però prestare attenzione al gioco dei restringimenti dei domini, e questo richiede un po' di attenzione. Fissiamo fin dall'inizio il restringimento finale d , con $0 < d < 1$, e scegliamo s quantità positive $\delta_1, \dots, \delta_s$ la cui somma sia d ; ci proponiamo di ricavare una maggiorazione di $L_{g_s} \circ \dots \circ L_{g_1} f$ sul dominio ristretto di un fattore $1 - \delta_1 - \dots - \delta_s = 1 - d$. La scelta più semplice è $\delta_1 = \dots = \delta_s = d/s$.

Lemma 9.9: *Supponiamo che $g_1, \dots, g_s$ e f siano analitiche e limitate sul dominio $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma}$. Allora per ogni $d < 1$ positivo vale*

$$(9.36) \quad \|L_{g_s} \circ \dots \circ L_{g_1} f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{s!}{e^2} \left(\frac{2e}{d^2 \varrho \sigma} \right)^s \|g_1\|_{\varrho, \sigma} \cdot \dots \cdot \|g_s\|_{\varrho, \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma}.$$

Osservazione. In generale gli operatori L_{g_j} non commutano. Si vede però che la maggiorazione (9.36) non dipende dall'ordine in cui si applicano gli operatori. Potremmo sintetizzare questo fatto nella frase “gli operatori non commutano, ma le maggiorazioni sì”. Inoltre si può osservare che il coefficiente numerico dipende solo da *quanti* operatori L_{g_j} vengono applicati ad f . Potremmo rinunciare il lemma nel modo seguente:

Corollario 9.10: *Sia $\vartheta_0 = f$, e per $s > 0$ sia ϑ_s il risultato dell'applicazione degli s operatori $L_{g_1}, \dots, L_{g_s}$ ad f in qualunque ordine (ad esempio $\vartheta_s = L_{g_1} \circ \dots \circ L_{g_s} f$ oppure $\vartheta_s = L_{g_s} \circ \dots \circ L_{g_1} f$). Definiamo la successione di numeri reali positivi Θ_s , con $s > 0$, definita come*

$$\Theta_1 = \frac{2}{e d^2 \varrho \sigma} \|g_1\|_{\varrho, \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma}, \quad \Theta_s = \frac{2se}{d^2 \varrho \sigma} \|g_s\|_{\varrho, \sigma} \Theta_{s-1}.$$

Allora vale

$$\|\vartheta_s\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \Theta_s \quad \forall s \geq 1.$$

L'enunciato del corollario è semplicemente una riformulazione del lemma 9.9 alla luce dell'osservazione fatta poco sopra. La definizione ricorsiva della successione Θ_s non è altro che una riscrittura del secondo membro della (9.36) quando si faccia variare s . Questo corollario sarà alquanto utile per la dimostrazione dell'analiticità della trasformata di Lie e della composizione di serie di Lie.

Dimostrazione del lemma 9.9. Per $s = 1$ l'affermazione è la stessa del lemma 9.8; supponiamo quindi $s > 1$, e poniamo $\delta = d/s$. Dal lemma 9.8 abbiamo subito

$$\|L_{g_1} f\|_{(1-\delta)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{2}{e \delta^2 \varrho \sigma} \|g_1\|_{\varrho, \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma}.$$

Procediamo ricorsivamente per $j = 2, \dots, s$ considerando $L_{g_j} \circ \dots \circ L_{g_1} f$. Poiché dobbiamo applicare j parentesi di Poisson, avremo una maggiorazione sul dominio $\mathcal{D}_{(1-j\delta)(\varrho, \sigma)}$; applicando nuovamente il lemma 9.8 con δ al posto di d e $(j-1)\delta$ al

posto di d' , troviamo la formula ricorrente

$$\|L_{g_j} \circ \dots \circ L_{g_1} f\|_{(1-j\delta)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{2}{e j \delta^2 \varrho \sigma} \|g_j\|_{\varrho, \sigma} \|L_{g_{j-1}} \circ \dots \circ L_{g_1} f\|_{(1-(j-1)\delta)(\varrho, \sigma)} .$$

Applicando s volte questa formula, e ricordando che $\delta = d/s$ otteniamo

$$\|L_{g_s} \circ \dots \circ L_{g_1} f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \left(\frac{2}{e d^2 \varrho \sigma} \right)^s \frac{s^{2s}}{s!} \|g_1\|_{\varrho, \sigma} \cdot \dots \cdot \|g_s\|_{\varrho, \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma} .$$

La (9.36) segue dalla disuguaglianza elementare⁹ $s^s \leq e^{s-1} s!$ for $s \geq 1$. Q.E.D.

9.3 Analiticità delle serie e delle trasformate di Lie

Il problema della convergenza delle serie di Lie è in buona sostanza quello dell'esistenza ed unicità della soluzione di un'equazione differenziale nel caso analitico. I metodi esposti qui sono in pratica una reinterpretazione del metodo classico delle serie maggioranti di Cauchy. L'obiettivo è non solo mostrare l'esistenza delle soluzioni, ma anche dare una valutazione quantitativa dei valori del parametro perturbativo per cui si può assicurare la convergenza o l'asintoticità delle serie.

9.3.1 Convergenza della trasformata di Lie

Inizio dalla trasformata di Lie, in quanto tutti gli altri casi possono ricondursi ad essa.

Proposizione 9.11: *Sia data la successione generatrice $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ analitica e limitata sul dominio $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma}$, e supponiamo che esistano due costanti $b \geq 0$ e $G > 0$ tali che valga*

$$(9.37) \quad \|\chi_s\|_{\varrho, \sigma} \leq \frac{b^{s-1}}{s} G .$$

Allora per ogni $d < 1/2$ positivo vale l'affermazione seguente: se è verificata la condizione

$$(9.38) \quad \frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \leq \frac{1}{2}$$

allora l'operatore T_χ ed il suo inverso T_χ^{-1} definiscono una trasformazione canonica sul dominio $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{(1-2d)(\varrho, \sigma)} &\subset T_\chi \mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \subset \mathcal{D}_{\varrho, \sigma} , \\ \mathcal{D}_{(1-2d)(\varrho, \sigma)} &\subset T_\chi^{-1} \mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \subset \mathcal{D}_{\varrho, \sigma} . \end{aligned}$$

⁹ Si dimostra rapidamente per induzione: è banalmente vera per $s = 1$, e per $s > 1$ si calcola

$$s^s = s \left(\frac{s}{s-1} \right)^{s-1} (s-1)^{s-1} = s \left(1 - \frac{1}{s-1} \right)^{s-1} (s-1)^{s-1} < s e \cdot (s-1)! e^{s-2} = s! e^{s-1} .$$

Per la dimostrazione della proposizione si fa uso del seguente

Lemma 9.12: *Supponiamo che la funzione f e la successione $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ siano analitiche sul dominio $\mathcal{D}_{\varrho, \sigma}$; assumiamo che $\|f\|_{\varrho, \sigma}$ sia finita e che la successione generatrice soddisfi l'ipotesi (9.37). Allora le serie $T_\chi f$, $T_\chi^{-1} f$, $T_\chi p$, $T_\chi^{-1} p$, $T_\chi q$ e $T_\chi^{-1} q$ sono assolutamente convergenti su $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$, e per ogni intero $r > 0$ valgono le stime seguenti:*

(i) *per gli operatori E_s D_s valgono le maggiorazioni*

$$(9.39) \quad \begin{aligned} \|E_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \frac{2G}{ed^2 \varrho \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma} \\ \|D_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \frac{2G}{ed^2 \varrho \sigma} \|f\|_{\varrho, \sigma} \end{aligned}$$

(ii) *la trasformazione di una funzione è maggiorata da*

$$(9.40) \quad \|T_\chi f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq 2\|f\|_{\varrho, \sigma}, \quad \|T_\chi^{-1} f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq 2\|f\|_{\varrho, \sigma};$$

(iii) *il resto di una trasformazione troncata all'ordine $r > 0$ è maggiorato da*

$$(9.41) \quad \begin{aligned} \left\| T_\chi f - \sum_{s=0}^r E_s f \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{2}{e^2} \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{r+1} \|f\|_{\varrho, \sigma} \\ \left\| T_\chi^{-1} f - \sum_{s=0}^r D_s f \right\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{2}{e^2} \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{r+1} \|f\|_{\varrho, \sigma}; \end{aligned}$$

(iv) *per la trasformazione di coordinate vale*

$$(9.42) \quad \begin{aligned} \|T_\chi p - p\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{1}{2e^2} d\varrho, \quad \|T_\chi^{-1} p - p\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{2e^2} d\varrho, \\ \|T_\chi q - q\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{1}{2e} d\sigma, \quad \|T_\chi^{-1} q - q\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{2e} d\sigma. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che

$$(9.43) \quad \|E_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq B_s \|f\|_{\varrho, \sigma}, \quad \|D_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq B_s \|f\|_{\varrho, \sigma}, \quad s \geq 1,$$

dove la successione reale $\{B_s\}_{s \geq 1}$ è definita ricorsivamente come

$$(9.44) \quad \begin{aligned} B_1 &= \frac{2}{ed^2 \varrho \sigma} G, \\ B_s &= \frac{2e}{d^2 \varrho \sigma} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{s-j+1}{s} b^{j-1} G B_{s-j} + \frac{2}{sed^2 \varrho \sigma} b^{s-1} G; \end{aligned}$$

Per $s = 1$ basta applicare la maggiorazione (9.33) del lemma 9.8 con $d' = 0$. Costruiamo una formula ricorrente valida per $s > 1$. Lo farò esplicitamente per gli operatori E_s , osservando fin d'ora che lo stesso argomento si applica parola per parola agli operatori D_s . Il procedimento richiede un po' di attenzione. La chiave della dimostrazione sta nell'osservazione che l'operatore E_s può scriversi genericamente come

$E_s = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_s} c_\alpha F_\alpha$, dove $\mathcal{J}_s$ è un insieme di indici, $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}_s}$ un insieme di coefficienti reali, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}_s}$ un insieme di operatori lineari, e ciascuno degli F_α è una composizione di al più s operatori L_{χ_j} . Questo risulta evidente dalla definizione ricorsiva (9.16) of E_s . Sottolineo che non serve sapere né quali operatori compaiano in ciascuno degli F_α né come siano ordinati, ma solo quanti. Per il corollario 9.10 abbiamo $\|F_\alpha f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq A_\alpha \|f\|_{\varrho, \sigma}$, con un insieme di costanti $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}_s}$, e quindi abbiamo anche $\|E_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_s} |c_\alpha| A_\alpha \|f\|_{\varrho, \sigma}$. Queste informazioni bastano per trovare una maggiorazione ricorsiva. A tal fine supponiamo di sapere che vale $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}_r} |c_\alpha| A_\alpha \leq B_r$ per $1 \leq r < s$; ciò è vero per $s = 2$, perché B_1 è noto. Ricordando la definizione ricorsiva (9.16) di E_s , cerchiamo una maggiorazione per $L_{\chi_j} E_{s-j} = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_{s-j}} c_\alpha L_{\chi_j} F_\alpha$. Per il lemma 9.9 abbiamo¹⁰

$$\|L_{\chi_j} F_\alpha f\|_{(1-d)\varrho, \sigma} \leq \frac{2e(s-j+1)}{d^2 \varrho \sigma} \|\chi_j\|_{\varrho, \sigma} A_\alpha \|f\|_{\varrho, \sigma}.$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \|L_{\chi_j} E_{s-j} f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{2e(s-j+1)}{d^2 \varrho \sigma} \|\chi_j\|_{\varrho, \sigma} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_{s-j}} |c_\alpha| A_\alpha \|f\|_{\varrho, \sigma} \\ &\leq \frac{2e(s-j+1)}{d^2 \varrho \sigma} \|\chi_j\|_{\varrho, \sigma} B_{s-j} \|f\|_{\varrho, \sigma}; \end{aligned}$$

qui si è fatto uso dell'ipotesi induttiva. La (9.44) si ricava dalla definizione (9.16) di E_s e dall'ipotesi (9.37).

Veniamo alla (9.39). Questa si verifica immediatamente per $s = 1, 2$. Per $s > 2$ procediamo per induzione. Isoliamo il termine $j = 1$ nella somma della (9.44), e cambiamo l'indice di somma da j a $j - 1$. Troviamo così

$$\begin{aligned} B_s &= \frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} B_{s-1} + b \sum_{j=1}^{s-2} \frac{(s-1)-j+1}{s} b^{j-1} G B_{s-1-j} + \frac{2}{s e d^2 \varrho \sigma} b^{s-1} G \\ &\leq \frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} B_{s-1} + \frac{s-1}{s} b B_{s-1}; \end{aligned}$$

qui si è usata la definizione di B_{s-1} come data dalla (9.44). Troviamo così

$$B_s < \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right) B_{s-1};$$

da qui segue immediatamente la (9.39).

Dalla (9.43) otteniamo

$$\sum_{s>0} \|E_s f\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{2G}{e d^2 \varrho \sigma} \sum_{s>0} \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \|f\|_{\varrho, \sigma};$$

¹⁰ Qui è essenziale l'osservazione riportata dopo l'enunciato del lemma 9.9, unito al fatto che F_α contiene al più $s-j$ operatori L_{χ_j} . Si noti anche che lo stesso argomento si applica agli operatori D_s perché commutando gli operatori non si cambiano le maggiorazioni.

per la condizione (9.38) la serie a destra di quest'ultima diseuguaglianza è convergente, essendo maggiorata da una serie geometrica. Poiché la norma uniforme è maggiorata dalla norma di Fourier con peso, possiamo anche affermare che la serie $T_\chi f$ è assolutamente convergente sul dominio $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$, come asserito. Per ricavare le maggiorazioni (9.41) basta sommare la serie geometrica che abbiamo appena considerato a partire da $s = r + 1$, tenendo conto della condizione (9.38). Le maggiorazioni (9.40) si ottengono in modo simile, sommando l'intera serie geometrica. Per l'operatore $T_\chi^{-1}f$ si fa uso dello stesso argomento.

Le stime sulla trasformazione canonica delle coordinate (p, q) si ottengono con lo stesso procedimento, salvo una piccola differenza che le migliora sensibilmente: i termini $L_{\chi_j}p$ e $L_{\chi_j}q$ si possono maggiorare grazie alla (9.27) del lemma 9.8. Poi si procede come sopra, e si trova

$$\begin{aligned} \|E_1 p\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{G}{ed\sigma}, \quad \|E_s p\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \frac{G}{ed\sigma}, \\ \|E_1 q\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} &\leq \frac{G}{ed\sigma}, \quad \|E_s q\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \frac{G}{d\varrho}, \end{aligned}$$

Infine si mostra la convergenza mediante l'argomento già usato per le funzioni, e si ottiene

$$\|T_\chi p - p\|_{(1-d)(\varrho, \sigma)} \leq \frac{G}{ed\sigma} \sum_{s>0} \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right)^{s-1} \leq \frac{2G}{ed\sigma} < \frac{1}{e^2} \left(\frac{2eG}{d^2 \varrho \sigma} + b \right) d\varrho.$$

Da qui, tenendo conto della condizione (9.38), si ricava la prima delle (9.42). Le maggiorazioni restanti richiedono solo modifiche banali degli argomenti già usati. *Q.E.D.*

Dimostrazione della proposizione 9.11. Per il lemma 9.12 le serie di funzioni analitiche che definiscono la trasformazione canonica sono assolutamente convergenti nel dominio $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$. Ne segue che esse sono uniformemente convergenti in qualunque sottinsieme compatto di $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$. Per il teorema di Weierstrass ciò implica che le somme delle serie sono funzioni analitiche su $\mathcal{D}_{(1-d)(\varrho, \sigma)}$, come affermato. Le affermazioni sulle inclusioni dei domini sono conseguenza diretta delle (9.42). *Q.E.D.*

9.3.2 Convergenza della serie di Lie

La convergenza della serie di Lie può ricondursi direttamente alla proposizione 9.11 che abbiamo appena dimostrato. Infatti, come abbiamo osservato nel paragrafo 9.2.3, la trasformata di Lie coincide con la serie di Lie quando si consideri la successione generatrice $\{\chi_1, 0, 0, 0, \dots\}$. Basta dunque riscrivere l'enunciato della proposizione 9.11 sostituendo rispettivamente T_χ e T_χ^{-1} con $\exp(L_\chi)$ e $\exp(-L_\chi)$, rimpiazzando la condizione (9.37) con $\|\chi\|_{\varrho, \sigma} = G$, e ponendo $b = 0$ nella condizione (9.38).

9.3.3 Analiticità della composizione di serie di Lie

L'analiticità della composizione di serie di Lie e della sua inversa può stabilirsi in modo diretto proprio considerando la successione di operatori che la definisce. Alternativamente ci si può ricondurre ancora alla proposizione 9.11 che abbiamo appena

dimostrato facendo uso del lemma 9.7. In effetti gli operatori W_s , V_s che definiscono la composizione di serie di Lie differiscono dagli operatori E_s solo per l'ordine in cui compaiono le derivate di Lie e per il segno dei coefficienti, sicché il procedimento di dimostrazione si applica parola per parola.

Anche in questo caso dunque basta riscrivere l'enunciato della proposizione 9.11 sostituendo rispettivamente T_χ e T_χ^{-1} con S_χ e S_χ^{-1} .

