

8

INTEGRALI PRIMI

Secondo Poincaré, il problema generale della dinamica si formula come segue.¹ Si considera il sistema canonico con Hamiltoniana

$$(8.1) \quad H(p, q, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) + \varepsilon^2 H_2(p, q) + \dots ,$$

dove:

- i. $p \equiv (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ sono variabili d'azione e \mathcal{G} è un aperto ;
- ii. $q \equiv (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{T}^n$ sono variabili d'angolo;
- iii. $\varepsilon \in \mathbb{R}$ è un parametro;
- iv. L'Hamiltoniana $H(p, q, \varepsilon)$ è funzione analitica dei suoi argomenti, ed in particolare può svilupparsi in serie di potenze di ε in un intorno dell'origine.

Si chiede di studiare la dinamica di questo sistema.

La discussione sul teorema di Arnold, svolta nei paragrafi 4.3 e 4.4, giustifica pienamente tale definizione: un sistema integrabile si caratterizza proprio in base all'esistenza di variabili d'azione ed angolo, ed è naturale pensare ad una piccola perturbazione di un tale sistema.

La lunga discussione del capitolo 5 sul sistema planetario ci ha condotto a considerare un'Hamiltoniana del tipo (8.1), pur con l'ulteriore complicazione dovuta alla degenerazione delle frequenze. È ora tempo di superare i metodi sviluppati da Eulero, Lagrange e Laplace e ripresi dai loro successori per buona parte del secolo XIX. L'obiettivo è sbarazzarci, se possibile, dei termini secolari e dominare le risonanze. È questo, sia pure in termini alquanto semplificati, il problema a cui i matematici hanno dedicato sforzi considerevoli per tutta la seconda metà dell'ottocento.

Alla luce della discussione sui sistemi integrabili del capitolo 4 è spontaneo chiedersi se il sistema (8.1) possa ammettere un numero sufficiente di integrali primi, in modo che si possa ancora applicare il teorema di Arnold. Se un tal tentativo avesse successo si potrebbe allora concludere che il sistema è integrabile e che ammette moti quasi periodici su tori invarianti, ovvero moti a n frequenze. Si tornerebbe dunque, in buona sostanza, agli epicicli dell'astronomia greca. Ma il teorema di Poincaré, che

¹ Si veda [81], Tome I, § 13.

sarà oggetto della prima parte del capitolo, mostra che ciò non è possibile: l'esistenza delle risonanze non consente di costruire integrali primi analitici.

Prenderò poi in considerazione la perturbazione di sistemi isocroni, che abbiamo visto essere alquanto utili nel descrivere i moti di eccentricità ed inclinazioni e degli angoli ad esse coniugati oppure nel comprendere la dinamica nell'intorno dei punti di equilibrio ellittici. Vedremo che in quel caso le difficoltà formali che conducono al risultato negativo di Poincaré sembrano essere superabili, e si può passare ad esaminare il problema della convergenza. A questo proposito è d'obbligo citare uno splendido brano di Poincaré.²

“ Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient

² “ Tra i geometri (oggi si direbbe piuttosto gli analisti, *NdA*) e gli astronomi c'è una sorta di malinteso sul significato del termine *convergenza*. I geometri, interessati al rigore assoluto e spesso troppo indifferenti alla lunghezza dei calcoli inestricabili di cui concepiscono la possibilità, senza per questo sognarsi di intraprenderli davvero, dicono che una serie è convergente se la somma dei termini tende ad un limite ben definito, e ciò anche se i primi termini decrescono in modo estremamente lento. Gli astronomi, al contrario, usano affermare che una serie converge se, diciamo, i primi venti termini diminuiscono molto rapidamente, anche se i termini successivi crescono indefinitamente.

Così, per fare un semplice esempio, consideriamo le due serie che hanno come termine generale

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad \text{e} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1000^n} .$$

I geometri diranno che la prima serie converge, e pure rapidamente, perché il milionesimo termine è ben più piccolo del 999 999°; essi classificheranno invece la seconda serie come divergente, perché il termine generale cresce oltre ogni limite.

Al contrario, gli astronomi considereranno la prima serie come divergente, perché i primi 1000 termini sono crescenti, mentre classificheranno la seconda serie come convergente perché i primi 1000 termini decrescono, e all'inizio la diminuzione è molto rapida.

Ambedue le regole sono legittime: la prima nella ricerca teorica, la seconda nelle applicazioni numeriche. Ambedue devono regnare, ma in domini separati da confini che dovremmo conoscere in modo ben preciso.

.....

Il primo esempio che abbia messo in evidenza la legittimità di certi sviluppi divergenti è quello classico della serie di Stirling. Cauchy ha mostrato che i termini di quella serie prima decrescono, e poi iniziano a crescere, sicché la serie diverge; ma arrestando il calcolo al termine più piccolo si rappresenta la funzione Euleriana con un'approssimazione sempre migliore al crescere dell'argomento.” ([81], Tome II, cap. VIII.)

croître indéfiniment.

Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad \text{et} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1000^n}.$$

Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999^e; mais ils regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.

Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant; et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.

Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières.

Les astronomes ne les connaissent pas toujours d'une façon bien précise, mais ils les franchissent rarement; l'approximation dont ils se contentent les maintient d'ordinaire beaucoup en deçà; d'ailleurs leur instinct les guide et, s'il les trompait, le contrôle de l'observation les avertirait promptement de leur erreur.

Je crois néanmoins qu'il y a lieu d'apporter dans cette question un peu plus de précision, et c'est ce que vais essayer de faire, bien que par sa nature même elle ne s'y prête pas beaucoup.

.....

Le premier exemple qui a montré clairement la légitimité de certains développements divergents est l'exemple classique de la série de Stirling. Cauchy a montré que les termes de cette série vont d'abord en décroissant, puis en croissant, de sorte que la série diverge; mais si l'on s'arrête au terme le plus petit, on représente la fonction eulérienne avec une approximation d'autant plus grande que l'argument est plus grand. ”

L'ultima osservazione di Poincaré diventerà rilevante nella seconda parte del capitolo, ove discuterò le proprietà asintotiche delle serie che rappresentano gli integrali primi di un sistema Hamiltoniano nell'intorno di un punto di equilibrio ellittico.

8.1 Il teorema di Poincaré sulla non esistenza di integrali primi

Veniamo dunque alla ricerca di integrali primi per l'Hamiltoniana (8.1). Avremo modo di constatare che se questo metodo sembra cancellare il problema dei termini secolari non riesce però a sbarazzare il campo dalle risonanze.³

³ Questo paragrafo riprende alcuni dei risultati riportati sia nella memoria [80] sia nei

8.1.1 Equazioni per la costruzione di integrali primi

Considerando il sistema descritto dall'Hamiltoniana (8.1) si cerca un integrale primo della forma

$$(8.2) \quad \Phi(p, q, \varepsilon) = \Phi_0(p, q) + \varepsilon\Phi_1(p, q) + \varepsilon^2\Phi_2(p, q) + \dots$$

A tal fine si fa uso dell'equazione

$$\{H, \Phi\} = 0 ,$$

sostituendovi le espressioni (8.1) per l'Hamiltoniana e (8.2) per l'integrale primo. Grazie alla linearità della parentesi di Poisson si può riordinare l'espressione così ottenuta in serie di potenze di ε ed annullarne i coefficienti ordine per ordine. Si ottiene in tal modo il sistema

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \{H_0, \Phi_0\} &= 0 \\ \{H_0, \Phi_1\} &= -\{H_1, \Phi_0\} \\ &\dots\dots\dots \\ \{H_0, \Phi_s\} &= -\{H_1, \Phi_{s-1}\} - \dots - \{H_s, \Phi_0\} \\ &\dots\dots\dots , \end{aligned}$$

che si può pensare di risolvere in modo ricorsivo, dal momento che il termine di destra di ciascuna equazione è determinato mediante la risoluzione delle equazioni precedenti.

La prima equazione dice che se è soddisfatta la condizione di non degenerazione

$$(8.4) \quad \det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_j \partial p_k} \right) \neq 0 ,$$

la funzione Φ_0 non può dipendere dagli angoli (proposizione 4.13). Il caso di un'Hamiltoniana non soddisfacente questa condizione richiede un esame più dettagliato, e ne discuterò più avanti.

Assumendo dunque che Φ_0 dipenda solo dalle variabili d'azione, consideriamo la seconda equazione. Poiché $H_1(p, q)$ è funzione periodica degli angoli q , si può senz'altro far uso del suo sviluppo in serie di Fourier⁴

$$(8.5) \quad H_1(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} ,$$

dove $h_k(p)$ sono funzioni note delle sole azioni. Il fatto che $H_1(p, q)$ assuma solo valori reali per p, q reali si traduce nella condizione

$$(8.6) \quad h_k(p) = h_{-k}^*(p) ,$$

Méthodes Nouvelles di Poincaré, [81], Tome I, cap. V. Se ne può trovare un'esposizione anche nel trattato di Whittaker [99], cap. XIV, §165.

⁴ Questa espressione è da leggersi come una somma su n indici interi (k_1, \dots, k_n) che assumono tutti i possibili valori, sicché $h_k(p) \equiv h_{k_1, \dots, k_n}(p)$ e $\langle k, q \rangle = k_1 q_1 + \dots + k_n q_n$.

dove l'asterisco indica il complesso coniugato; questa condizione tuttavia non è particolarmente rilevante ai fini della discussione che segue. Assumendo anche per Φ_1 lo sviluppo analogo

$$(8.7) \quad \Phi_1(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} ,$$

la seconda delle (8.3) assume la forma

$$(8.8) \quad i \sum_k \langle k, \omega(p) \rangle \varphi_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} = \sum_k c_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} ,$$

dove

$$(8.9) \quad \omega_j(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p_j} , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

sono le frequenze dell'Hamiltoniana imperturbata $H_0(p)$, i coefficienti $\varphi_k(p)$ sono incogniti, mentre i coefficienti $c_k(p)$ sono noti, essendo:

$$(8.10) \quad c_k(p) = i \left\langle k, \frac{\partial \Phi_0}{\partial p} \right\rangle h_k(p) .$$

Eguagliando separatamente i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier si ottiene subito il sistema di infinite equazioni

$$(8.11) \quad i \langle k, \omega(p) \rangle \varphi_k(p) = c_k(p) , \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

la cui soluzione formale è semplicemente

$$(8.12) \quad \varphi_k(p) = -i \frac{c_k(p)}{\langle k, \omega(p) \rangle} ,$$

valida a condizione che il denominatore $\langle k, \omega(p) \rangle$ non si annulli. L'analisi qui svolta si generalizza subito a tutte le equazioni (8.3), che si riconducono sempre ad un sistema della forma (8.11). Si vede dunque che si pongono due problemi.

- i. *Consistenza*: la media sugli angoli del termine noto dell'equazione (8.8), ossia il coefficiente $c_0(p)$, deve essere nulla, altrimenti la (8.12) cade in difetto per $k = 0$. Nell'equazione per Φ_1 questa condizione è verificata, dato che Φ_0 dipende solo dalle azioni; non c'è però nessuna ragione evidente che mostri che lo stesso argomento vale per le equazioni successive.
- ii. *Piccoli denominatori*: per $k \neq 0$ la soluzione (8.12) cade in difetto sulla superficie determinata dall'equazione $\langle k, \omega(p) \rangle = 0$. Dunque, salvo nel caso in cui il coefficiente $c_k(p)$ si annulli contemporaneamente a $\langle k, \omega(p) \rangle$, l'equazione per l'integrale primo potrà risolversi solo in un sottoinsieme $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ che escluda tale superficie. Si presentano però due difficoltà. La prima è che i valori risonanti di ω sono densi in \mathbb{R}^n , e dunque, per la condizione di non degenerazione (8.4), anche nel dominio \mathcal{G} ; la seconda è che i denominatori $\langle k, \omega(p) \rangle$, anche se non si annullano, possono assumere valori arbitrariamente piccoli, e dunque il problema della convergenza delle serie si presenta alquanto spinoso.

Il problema della consistenza non è, in realtà, insormontabile: nel seguito di questo capitolo mostrerò come possa essere superato. Più grave è invece il problema dei piccoli denominatori: è certamente non esagerato affermare che si tratta della principale difficoltà di tutta la teoria delle perturbazioni.

8.1.2 Il teorema di Poincaré

Le conseguenze della presenza dei piccoli denominatori sono alla base del teorema di Poincaré sulla non esistenza degli integrali primi.

Proposizione 8.1: Sia $H(p, q, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) + \varepsilon^2 H_2(p, q) + \dots$ un'Hamiltoniana analitica per $p \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{T}^n$ e per ε sufficientemente piccolo, e supponiamo che essa soddisfi le ulteriori ipotesi

i. non degenerazione

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_j \partial p_k} \right) \neq 0 ;$$

ii. genericità: nessuno dei coefficienti $h_k(p)$ nello sviluppo di Fourier (8.5) di H_1 si annulla identicamente sulla superficie $\langle k, \omega(p) \rangle = 0$.

Allora non esiste alcun integrale primo analitico $\Phi(q, p, \varepsilon)$ indipendente dall'Hamiltoniana.

La dimostrazione della proposizione può spezzarsi in tre passi. Il primo è costituito dalla proposizione 4.13, per cui Φ_0 deve essere indipendente dagli angoli q . Gli altri due passi sono costituiti dai seguenti lemmi.

Lemma 8.2: La condizione che Φ sia indipendente da H è equivalente alla condizione che Φ_0 sia indipendente da H_0 .

Dimostrazione. Se Φ_0 è indipendente da H_0 si verifica subito che Φ è indipendente da H . Basta dimostrare che se Φ è indipendente da H allora si può sempre trovare un integrale primo $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 + \varepsilon \tilde{\Phi}_1 + \dots$ tale che $\tilde{\Phi}_0$ è indipendente da H_0 . Si procede come segue. Sia Φ un integrale primo della forma richiesta, ma con Φ_0 funzione di H_0 ; allora Φ_0 è funzione analitica di H_0 . Infatti si può sempre risolvere l'equazione $H_0 = H_0(p)$ rispetto ad una delle p , diciamo p_j , ottenendo p_j come funzione analitica di H_0 e delle p rimanenti; per sostituzione si ottiene allora Φ_0 come funzione analitica di H_0 e delle p diverse da p_j ; poiché però, per ipotesi, Φ_0 è funzione solo di H_0 segue che Φ_0 dipende analiticamente da H_0 . Si consideri ora la funzione $\Psi = \Phi - \Phi_0(H)$, dove $\Phi_0(H)$ si ottiene sostituendo H al posto di H_0 nell'espressione esplicita di $\Phi_0(H_0)$. La funzione Ψ è evidentemente un integrale primo, perché funzione di integrali primi, e si annulla per $\varepsilon = 0$. Inoltre, essendo funzione composta di funzioni analitiche, essa è analitica in ε , e si può sviluppare in serie di potenze di ε nella forma $\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots$. Dividendo per ε e denotando Ψ_1 con $\tilde{\Phi}_0, \Psi_2$ con $\tilde{\Phi}_1$ e così via si ottiene un altro integrale primo della forma (8.2). Se $\tilde{\Phi}_0$ è ancora funzione di H_0 , si può ripetere il procedimento finché si trova $\tilde{\Phi}_0$ indipendente da H_0 . Se ciò non accade, significa che il procedimento fornisce semplicemente uno sviluppo di Φ come funzione di H , e ciò è contrario all'ipotesi che Φ sia indipendente da H . Segue l'asserto. Q.E.D.

Lemma 8.3: *Sotto le ipotesi della proposizione 8.1, la funzione $\Phi_0(p)$ non può essere indipendente da H_0 .*

Dimostrazione. Si fa uso dei piccoli denominatori e della condizione di genericità. Tenendo conto dell'espressione esplicita (8.10) di $c_k(p)$ il sistema (8.11) si scrive

$$\langle k, \omega(p) \rangle \varphi_k(p) = \left\langle k, \frac{\partial \Phi_0}{\partial p}(p) \right\rangle h_k(p), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

La sola possibilità di evitare i denominatori nulli, tenuto conto della condizione di genericità, è che $\langle k, \frac{\partial \Phi_0}{\partial p}(p) \rangle$ si annulli in tutti i punti $p \in \mathcal{G}$ ove si annulla $\langle k, \omega(p) \rangle$. Ricordando che ad ogni $\omega \in \mathbb{R}^n$ è associato un modulo di risonanza \mathcal{M}_ω , questo significa che in ogni punto $p \in \mathcal{G}$ i vettori $\omega(p)$ e $\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}(p)$ devono essere ortogonali allo stesso modulo $\mathcal{M}_{\omega(p)}$. In particolare, si consideri l'insieme dei $p \in \mathcal{G}$ tali che $\dim \mathcal{M}_\omega = n - 1$; in questi punti $\omega(p)$ e $\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}$ devono essere paralleli, e dunque la matrice Jacobiana

$$(8.13) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial H_0}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

non può avere rango 2. Poiché i punti ω completamente risonanti sono densi in \mathbb{R}^n , la condizione di non degenerazione implica che la matrice (8.13) ha rango minore di 2 in un insieme di punti che è denso in \mathcal{G} . Questo implica che il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata della (8.13) si annulli in un insieme di punti che è denso in \mathcal{G} , e dunque, per continuità, in tutto \mathcal{G} ; quindi il rango della matrice è minore di 2 in tutto \mathcal{G} . Segue che Φ_0 e H_0 non possono essere indipendenti. *Q.E.D.*

Dimostrazione della proposizione 8.1. Per la proposizione 4.13 ed il lemma 8.3, Φ_0 non può scegliersi indipendente da H_0 . Per il lemma 8.2, questo implica che Φ non può essere indipendente da H . *Q.E.D.*

8.1.3 Discussione della condizione di genericità

Tra le ipotesi del teorema di Poincaré, la condizione di genericità sembra essere la più forte, e può dare adito al sospetto che un eventuale indebolimento apra la strada ad una effettiva costruzione degli integrali primi. In effetti, Poincaré stesso dedica a questo problema una lunga discussione, in cui esamina attentamente diverse possibilità di indebolire tale condizione, pur mantenendo la validità del teorema.⁵ Rimandando senz'altro a Poincaré per una discussione dettagliata, mi limiterò qui ad illustrare il

⁵ Si veda [81]. Tome I, cap. V, § 83-85. Il problema è piuttosto complesso. È possibile mostrare che esistono infinite Hamiltoniane della forma (8.1) che sono integrabili. Dunque, il teorema di Poincaré si presenta come un risultato generico, la cui formalizzazione in termini più precisi richiede di considerare lo spazio delle Hamiltoniane della forma (8.1), e di introdurre una opportuna topologia che consenta di caratterizzare meglio l'insieme delle Hamiltoniane integrabili. Uno studio di questo tipo è stato svolto da Siegel^[89] per il caso degli equilibri ellittici, ed è riportato da Moser in [74].

problema con alcuni esempi che pongono in evidenza una condizione necessaria – ma non particolarmente pesante – per la validità del teorema di Poincaré, ed al tempo stesso a discutere la validità generale del teorema stesso.

Esempio 8.1: *Un'Hamiltoniana con sviluppo di Fourier troncato.* Consideriamo l'Hamiltoniana

$$H(p, q, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon [\cos q_1 + \cos(q_1 - q_2) + \cos(q_1 + q_2) + \cos q_2] ,$$

e si cerchi di costruire un integrale primo della forma (8.2) con $\Phi_0 = p_1$ (il lettore potrà verificare che anche cambiando Φ_0 non si modifica in modo sostanziale il ragionamento che segue, salvo se si sceglie Φ_0 funzione di H_0). Facendo uso della forma esponenziale per le funzioni trigonometriche si calcola subito

$$\{H_1, p_1\} = \frac{i}{2} \left[\left(e^{iq_1} + e^{i(q_1 - q_2)} + e^{i(q_1 + q_2)} \right) - \text{c.c.} \right]$$

(c.c. denota il complesso coniugato della parentesi precedente); si trova dunque, tenendo conto che $\omega_j(p) = p_j$,

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^{iq_1}}{p_1} + \frac{e^{i(q_1 - q_2)}}{p_1 - p_2} + \frac{e^{i(q_1 + q_2)}}{p_1 + p_2} \right) + \text{c.c.} \right] .$$

La soluzione è determinata a meno di una funzione arbitraria di p_1, p_2 , che qui viene semplicemente ignorata. Sembra dunque che sia possibile costruire Φ_1 , con la sola condizione che il dominio \mathcal{G} escluda le rette $p_1 = 0$, $p_1 - p_2 = 0$, $p_1 + p_2 = 0$. La ragione di ciò sta nel fatto che lo sviluppo in serie di Fourier di H_1 contiene solo un numero *finito* di termini. Se però si prosegue con la costruzione di Φ , si vede che l'equazione per Φ_2 contiene, tra le altre, le combinazioni di angoli $2q_1 - q_2$, $2q_1 + q_2$, $q_1 - 2q_2$, $q_1 + 2q_2$; i piccoli denominatori corrispondenti hanno la forma $2p_1 - p_2$, $2p_1 + p_2$, $p_1 - 2p_2$, $p_1 + 2p_2$, e dunque la funzione Φ_2 può determinarsi solo in un dominio \mathcal{G} che esclude, oltre alle precedenti, anche le rette⁶ $2p_1 - p_2 = 0$, $2p_1 + p_2 = 0$, $p_1 + 2p_2 = 0$, $p_1 - 2p_2 = 0$. Si può osservare che anche qui compare un numero finito di componenti di Fourier, ma ne sono state generate alcune che non esistevano in H_1 . Proseguendo con gli ordini successivi, si osserva che nell'equazione per Φ_s compare sempre un numero finito di componenti di Fourier, e precisamente solo combinazioni di angoli $k_1 q_1 + k_2 q_2$ con $|k_1| + |k_2| \leq 2s$; non compaiono necessariamente tutte, ma è difficile intravedere un meccanismo che impedisca la generazione di componenti nuove rispetto agli ordini precedenti, salvo cancellazioni miracolose. Si vede dunque che procedendo con l'ordine s si è costretti a restringere sempre più il dominio \mathcal{G} , e che per $s \rightarrow \infty$ le rette che devono essere escluse coprono densamente il piano, e pertanto la funzione Φ non può essere definita in un aperto.

L'esempio qui discusso si generalizza facilmente a patto di tener conto di come debbano essere scelte le componenti di Fourier che compaiono inizialmente nell'Hamiltoniana.

⁶ Questo, beninteso, purché non si presenti il problema di consistenza di cui si è detto nel paragrafo 8.1.1.

Esempio 8.2: *Integrali primi troncati.* Consideriamo ancora un'Hamiltoniana del tipo (8.1), con l'ulteriore proprietà che gli sviluppi di Fourier di H_1, H_2, \dots soddisfino le condizioni

$$H_s = \sum_{|k| \leq sN} h_k^{(s)}(p) e^{i\langle k, q \rangle}, \quad s \geq 1,$$

dove N è un intero positivo e $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$. Seguendo la linea dell'esempio 8.1, è facile verificare che l'equazione per Φ_s coinvolge solo un numero *finito* di componenti di Fourier, soddisfacenti $|k| \leq sN$. È dunque possibile, per qualunque $s \geq 1$, costruire un dominio aperto $\mathcal{G}^{(s)} \subset \mathcal{G}$ che escluda risonanze di ordine non superiore a sN (intendendo con questo risonanze $\langle k, \omega(p) \rangle = 0$ con $|k| \leq sN$), ed in questo dominio si può determinare Φ_s (sempre ammettendo che non si presenti il problema di consistenza).

Anche nel caso dell'ultimo esempio non si potrà, in generale, costruire l'intero sviluppo con $s \rightarrow \infty$, perché il dominio $\mathcal{G}^{(s)}$ si deve costruire togliendo volta per volta ulteriori superfici risonanti che per $s \rightarrow \infty$ diventano dense, a meno che non si instaurino meccanismi miracolosi di cancellazione che impediscano il proliferare di risonanze. Il teorema di Poincaré resterà dunque genericamente valido, sotto la sola condizione di non degenerazione. È però interessante domandarsi che informazioni si possano ottenere dal calcolo dell'integrale primo approssimato $\Phi^{(r)} = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots + \varepsilon^r \Phi_r$ ottenuto troncando il procedimento ad un ordine r arbitrario. In termini un po' rozzi si può ragionare come segue. La derivata temporale di $\Phi^{(r)}$ è $\dot{\Phi}^{(r)} = \{H, \Phi^{(r)}\}$, che, per come è stato determinato $\Phi^{(r)}$ (dalle equazioni (8.3), risolte fino all'ordine r), ha come coefficiente ε^r . Se ε è piccolo, la derivata temporale $\dot{\Phi}^{(r)}$ risulta molto più piccola di ε , e dunque la variazione di $\Phi^{(r)}$ risulta sensibilmente più lenta di quella di Φ_0 . Il calcolo di $\Phi^{(r)}$ consentirà dunque di ottenere informazioni valide per tempi più lunghi rispetto al considerare solo Φ_0 . Si può ben dire che su argomenti di questo tipo si fonda, in pratica, l'uso della teoria delle perturbazioni in meccanica celeste. Più avanti mostrerò come si possa riformulare il problema in forma più rigorosa nel caso degli equilibri ellittici, e come si arrivi in tal modo alla teoria della stabilità esponenziale. Nel caso generale dell'Hamiltoniana (8.1) l'argomento viene reso rigoroso dal teorema di Nekhoroshev^{[75][76]}.

L'esempio che segue mette in evidenza una condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'applicazione del teorema di Poincaré.

Esempio 8.3: *Un criterio elementare per la determinazione di integrali primi.* Sia $H(p, q, \varepsilon)$ un'Hamiltoniana della forma (8.1), con l'ulteriore proprietà che lo sviluppo in serie di Fourier di $H_1(p, q), H_2(p, q), \dots$ abbia la forma

$$H_s(p, q) = \sum_{k \in \mathcal{K}} h_k^{(s)}(p) e^{i\langle k, q \rangle}, \quad s \geq 1,$$

dove \mathcal{K} è un sottoinsieme proprio di \mathbb{Z}^n . Si consideri poi il modulo $\mathcal{M}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{Z}^n$ generato da tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi di elementi di \mathcal{K} . Se $\dim \mathcal{M}(\mathcal{K}) < n$, si verifica subito che dato un qualunque vettore non nullo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ la funzione $\Phi_0(p) = \sum_l \alpha_l p_l$ è un integrale primo (basta calcolare la parentesi di Poisson $\{H, \Phi_0\}$ e verificare che si annulla). In questo caso è possibile effettuare una

trasformazione di coordinate del toro \mathbb{T}^n , che rende l'Hamiltoniana indipendente da $n - \dim\mathcal{M}(\mathcal{K})$ angoli. Il sistema diventa integrabile se $\dim\mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1$, altrimenti è riconducibile ad un sistema a $\dim\mathcal{M}(\mathcal{K})$ gradi di libertà, al quale è genericamente applicabile il teorema di Poincaré.

8.1.4 Discussione della condizione di non degenerazione

Il caso più semplice di sistema con degenerazione delle frequenze imperturbate è rappresentato dall'Hamiltoniana nell'intorno di un equilibrio ellittico,⁷ ossia

$$(8.14) \quad \begin{aligned} H(x, y) &= H_0(x, y) + H_1(x, y) + \dots, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ H_0(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_l \omega_l (x_l^2 + y_l^2), \end{aligned}$$

dove $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ sono le variabili canoniche, $\omega \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle frequenze e H_s per $s \geq 1$ è un polinomio omogeneo di grado $s + 2$ nelle variabili canoniche x, y . Si assume che l'Hamiltoniana sia analitica, e dunque sviluppabile in serie di potenze convergente, in un intorno dell'origine di \mathbb{R}^{2n} .

La forma (8.14) dell'Hamiltoniana richiama da vicino quella del problema generale della dinamica, come è stato formulato all'inizio del capitolo. Il parametro ε che ivi compare viene qui sostituito dalla distanza dall'origine: se si considera, ad esempio, la dinamica in una sfera di raggio ϱ , il termine H_s risulta essere di ordine ϱ^{s+2} , e dunque ϱ svolge di fatto la funzione di piccolo parametro; in termini ingenui, ci si aspetta che per ϱ sufficientemente piccolo il comportamento del sistema completo, retto da H , non si discosti molto da quello del sistema integrabile retto da H_0 .

Un modo più formale per convincersi della sostanziale identità col problema generale della dinamica è il seguente. Si introduce una trasformazione di scala

$$x_j = \varepsilon x'_j, \quad y_j = \varepsilon y'_j,$$

dove ε è un parametro reale positivo. Una tale trasformazione non è canonica, ma la forma Hamiltoniana delle equazioni viene mantenuta a patto di ridefinire la nuova Hamiltoniana come

$$H'(x', y') = \frac{1}{\varepsilon^2} H(x, y) \Big|_{x=\varepsilon x', y=\varepsilon y'}$$

(paragrafo 3.2.1). Si vede subito che la nuova Hamiltoniana prende in questo caso la forma

$$H'(x', y') = H_0(x', y') + \varepsilon H_1(x', y') + \varepsilon^2 H_2(x', y') + \dots,$$

sicché l'Hamiltoniana è sviluppata in serie di potenze di ε .

Il passaggio a variabili d'azione e angolo è più delicato: la trasformazione canonica, che vale la pena qui di richiamare,

$$x_j = \sqrt{2p_j} \cos q_j, \quad y_j = \sqrt{2p_j} \sin q_j$$

⁷ In prossimità di un punto di equilibrio si possono linearizzare le equazioni mediante uno sviluppo dei secondi membri in cui si trascurano tutti i termini di ordine superiore al primo. Si veda a tal proposito l'appendice A.

introduce in modo artificiale una singolarità nell'origine. Questa singolarità a sua volta causa una perdita di analiticità dell'Hamiltoniana in $p = 0$, sicché viene a cadere una delle ipotesi del teorema di Poincaré.

Questo fatto non è sostanziale, per diverse ragioni che illustro brevemente. Anzi tutto, l'Hamiltoniana, pur non essendo analitica, resta comunque limitata nell'origine. Inoltre, il lettore interessato potrà facilmente verificare che un polinomio omogeneo di grado s assume in variabili d'azione e angolo la forma di uno sviluppo di Fourier negli angoli q con coefficienti dipendenti dalle azioni p , come nel caso generale, ma con alcune particolarità:

- i. le p compaiono nei coefficienti solo come potenze di $\sqrt{p_1} \dots, \sqrt{p_n}$, ossia nella forma

$$c_{j_1, \dots, j_n} p_1^{j_1/2} \cdot \dots \cdot p_n^{j_n/2},$$

con $c_{j_1, \dots, j_n} \in \mathbb{R}$;

- ii. in ciascun termine

$$c_{j_1, \dots, j_n} p_1^{j_1/2} \cdot \dots \cdot p_n^{j_n/2} e^{i(k_1 q_1 + \dots + k_n q_n)}$$

dello sviluppo di Fourier ci sono relazioni ben strette tra gli esponenti j e gli esponenti k : precisamente, k_l può assumere solo i valori $-j_l, -j_l + 2, \dots, j_l - 2, j_l$. Queste ultime relazioni non sono altro che parte delle caratteristiche di d'Alembert (paragrafo 5.4.3), e precisamente quelle che garantiscono che eccentricità, perielii, inclinazioni e nodi possano descriversi mediante le variabili di Poincaré, da cui l'Hamiltoniana dipende in forma polinomiale. Le proprietà enunciate vengono mantenute dalla parentesi di Poisson,⁸ sicché si può ben dire che la non analiticità introdotta dalle variabili d'azione e angolo è, nella sostanza, innocua.

Di fatto tutti i problemi relativi all'analiticità vengono automaticamente rimossi se si mantiene la forma polinomiale, o di serie di potenze, dell'Hamiltoniana e si ricavano le equazioni per gli integrali primi semplicemente facendo riferimento al grado dei polinomi omogenei. Mostrerò tra poco che si ricavano ancora le equazioni (8.3).

L'elemento veramente nuovo è costituito proprio dalla degenerazione delle frequenze del sistema imperturbato, che risulta essere isocrono. Ciò impedisce l'applicazione diretta del teorema di Poincaré, e dà adito al sospetto che almeno i problemi formali possano essere superati.⁹ Così avviene, infatti: le conseguenze dell'esistenza di piccoli denominatori vengono pesantemente ridimensionate, proprio grazie al fatto che le frequenze sono costanti.¹⁰

⁸ La verifica diretta è un po' noiosa, ma non difficile, e nemmeno necessaria: basta osservare che la trasformazione a variabili d'azione e angolo è canonica, e quindi il risultato della parentesi di Poisson deve ancora potersi esprimere come polinomio nelle variabili x, y .

⁹ Si osservi bene che la dimostrazione del teorema di Poincaré si fonda su argomenti puramente formali: vi si mostra che la costruzione di integrali primi indipendenti dall'Hamiltoniana è impossibile per la semplice ragione che non si possono neppure definire i coefficienti in modo consistente; il problema dell'eventuale convergenza delle serie non si pone nemmeno.

¹⁰ Su questa possibilità di sfuggire alle conclusioni negative di Poincaré si è subito con-

Nei paragrafi da 8.2 a 8.4 esporrò la teoria formale, intendendo con questo che tutti i calcoli vengono eseguiti applicando le proprietà algebriche valide per il calcolo dei polinomi, senza occuparsi della convergenza delle serie ottenute. Il problema di ottenere stime quantitative sulle serie è rimandato ai paragrafi successivi.

8.2 Schema formale per l'intorno di un equilibrio ellittico

Lo schema di calcolo si formalizza in modo naturale nell'ambito degli spazi dei polinomi omogenei; in tal modo, il problema della costruzione di integrali primi viene ricondotto, nella sostanza, ad un problema algebrico in spazi lineari.

8.2.1 Il contesto algebrico formale

Si considera anzitutto la famiglia $\{\mathcal{P}_s\}_{s \geq 0}$ di spazi vettoriali, dove \mathcal{P}_s è lo spazio dei polinomi omogenei di grado s nelle variabili $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$. In particolare, \mathcal{P}_0 contiene le costanti, e si può definire $\mathcal{P}_s = \{0\}$ (il solo elemento nullo) per $s < 0$. Una base in \mathcal{P}_s è costituita dai monomi $x^j y^k \equiv x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$, dove $j \in \mathbb{Z}^n$ e $k \in \mathbb{Z}^n$ sono vettori a componenti non negative, soggetti alla limitazione¹¹ $|j| + |k| = s$. Con questa base una qualunque funzione $f \in \mathcal{P}_s$ si scriverà

$$(8.15) \quad f(x, y) = \sum_{|j|+|k|=s} f_{jk} x^j y^k, \quad f_{jk} \in \mathbb{R}.$$

Le stesse notazioni possono essere usate in modo consistente anche se $(x, y) \in \mathbb{C}^{2n}$ e $f_{jk} \in \mathbb{C}$.

Le proprietà algebriche rilevanti ai fini dello sviluppo della teoria perturbativa sono raccolte nel seguente

Lemma 8.4: *Siano $f \in \mathcal{P}_s$ e $g \in \mathcal{P}_r$; allora*

- i. $\frac{df}{dx_l} \in \mathcal{P}_{s-1}$, $\frac{df}{dy_l} \in \mathcal{P}_{s-1}$, $1 \leq l \leq n$
- ii. $f \cdot g \in \mathcal{P}_{r+s}$
- iii. $\{f, g\} \in \mathcal{P}_{s+r-2}$.

La dimostrazione è elementare, ed è lasciata al lettore.

Si introduce ora lo spazio $\mathcal{P} = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{P}_s$, nel senso che si considerano somme, anche infinite, di polinomi omogenei, senza porsi il problema della convergenza. In particolare, le operazioni di prodotto e parentesi di Poisson tra due qualunque funzioni $f, g \in \mathcal{P}$ verranno effettuate ricorrendo ad un riordinamento per polinomi omogenei. Così, ad esempio, dette

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots, \quad f_s, g_s \in \mathcal{P}_s$$

si avrà

$$fg = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) + \dots,$$

centrata l'attenzione dei matematici. Si veda ad esempio la discussione nel trattato di Whittaker [99], cap. XVI.

¹¹ Qui ho fatto uso della notazione $|j| = |j_1| + \dots + |j_n|$ per $j \in \mathbb{Z}^n$.

dove le parentesi hanno lo scopo di mettere in evidenza i termini omogenei. Uno sviluppo del tutto analogo vale per la parentesi di Poisson. Con queste assunzioni, lo spazio \mathcal{P} ha le proprietà formali di un'algebra.

Da ultimo, farò spesso uso per la parentesi di Poisson della notazione

$$L_f \cdot = \{f, \cdot\};$$

qui L_f , la derivata di Lie, o derivata lungo il flusso generato da f pensata come Hamiltoniana di un sistema canonico, è un operatore lineare, le cui proprietà sono raccolte nel seguente

Lemma 8.5: *Siano $f, g, h \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure \mathbb{C} . Allora:*

- i. se $f \in \mathcal{P}_s$, L_f è un operatore lineare da \mathcal{P}_k a \mathcal{P}_{s+k-2} per qualunque $k > 0$;
- ii. $L_{f+g} = L_f + L_g$;
- iii. $L_{\alpha f} = \alpha L_f$;
- iv. $L_f(gh) = (L_f g)h + g(L_f h)$;
- v. $L_f\{g, h\} = \{L_f g, h\} + \{g, L_f h\}$;
- vi. $L_f L_g - L_g L_f = L_{\{f, g\}}$.

La facile dimostrazione è lasciata al lettore. Si osservi in particolare che le ultime due proprietà altro non sono che l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson; in particolare, la vi. può scriversi $[L_f, L_g] = L_{\{f, g\}}$, dove $[L_f, L_g]$ è il commutatore tra due operatori.

8.2.2 Equazioni per gli integrali primi e problema di consistenza

La scrittura delle equazioni non presenta particolari difficoltà. Con le notazioni introdotte nel paragrafo 8.2.1, l'Hamiltoniana (8.14) è caratterizzata da $H_s \in \mathcal{P}_{s+2}$. Si cerca ora un integrale primo $\Phi \in \mathcal{P}$ della forma

$$(8.16) \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots, \quad \Phi_s \in \mathcal{P}_{s+k},$$

dove k è un intero positivo. La scelta più semplice consiste nell'identificare Φ_0 con l'azione armonica di uno qualunque degli oscillatori: $\Phi_0 = \frac{1}{2}(x_l^2 + y_l^2)$; in questo caso si ha $k = 2$.

Le equazioni si ottengono sostituendo gli sviluppi (8.14) e (8.16) nell'equazione $\{H, \Phi\} = 0$. Procedendo con lo sviluppo formale, ed eguagliando separatamente a zero i termini dello stesso ordine, si ottiene ancora il sistema

$$(8.17) \quad \begin{aligned} L_{H_0} \Phi_0 &= 0 \\ L_{H_0} \Phi_s &= \Psi_s, \quad s > 0 \end{aligned}$$

dove $\Psi_s \in \mathcal{P}_{s+k}$ è un termine noto ove siano state risolte le equazioni degli ordini precedenti, essendo

$$(8.18) \quad \Psi_s = - \sum_{j=1}^s \{H_j, \Phi_{s-j}\}.$$

Per qualunque $s > 0$, l'equazione (8.17) è lineare. Tutto si riconduce dunque allo studio delle proprietà dell'operatore L_{H_0} .

Anzitutto, è utile introdurre lo spazio nullo (o nucleo) \mathcal{N} di L_{H_0} e l'immagine di \mathcal{P} tramite L_{H_0} (o codominio, o range) con la consueta definizione

$$(8.19) \quad \mathcal{N} = L_{H_0}^{-1}(0), \quad \mathcal{R} = L_{H_0}(\mathcal{P});$$

sarà anche utile introdurre $\mathcal{N}_s = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}_s$ e $\mathcal{R}_s = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_s$ per $s \geq 0$. Si verifica immediatamente che:

- i. Φ_0 può essere un qualunque elemento di \mathcal{N}_k , con k arbitrario;¹²
- ii. per $s > 0$ la (8.17) ammette soluzioni in \mathcal{P}_s se e solo se $\Psi_s \in \mathcal{R}_s$;
- iii. se la (8.17) ammette soluzione, Φ_s è determinata a meno di un termine arbitrario $\tilde{\Phi}_s \in \mathcal{N}_s$.

Le proprietà rilevanti dell'operatore L_{H_0} risultano dalla trasformazione a variabili complesse

$$(8.20) \quad x_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_l + i\eta_l), \quad y_l = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi_l - i\eta_l), \quad 1 \leq l \leq n;$$

fondamentale è il fatto che questa trasformazione lasci invariata la struttura algebrica di \mathcal{P} , in quanto si tratta di una trasformazione lineare.

Lemma 8.6: *In variabili complesse ξ, η l'operatore L_{H_0} ha le seguenti proprietà:*

- i. è in forma diagonale, ed i suoi autovettori sono i monomi $\xi^j \eta^k$, cui corrispondono gli autovalori $i\langle k - j, \omega \rangle$;
- ii. i sottospazi \mathcal{N} e \mathcal{R} corrispondenti a L_{H_0} sono disgiunti, e la loro somma diretta è \mathcal{P} ;
- iii. \mathcal{N} e \mathcal{R} sono i sottospazi generati rispettivamente dalle basi $\{\xi^j \eta^k\}$ con $k - j \in \mathcal{M}_\omega$ e con $k - j \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{M}_\omega$.

Dimostrazione. L'Hamiltoniana imperturbata si scrive

$$H_0 = i \sum_l \omega_l \xi_l \eta_l,$$

e dunque si ha

$$L_{H_0} \xi^j \eta^k = i\langle k - j, \omega \rangle \xi^j \eta^k.$$

Questo dimostra la proprietà i. Le altre due proprietà sono conseguenze immediate di questa. Q.E.D.

Una caratterizzazione più precisa degli integrali primi di H_0 è data dal seguente

Corollario 8.7: *L'Hamiltoniana H_0 ammette $n + \dim \mathcal{M}_\omega$ integrali primi indipendenti. In particolare*

- i. le azioni armoniche $\xi_l \eta_l$, $1 \leq l \leq n$ sono sempre integrali primi indipendenti e in involuzione;
- ii. se $r = \dim \mathcal{M}_\omega = 0$ (non risonanza) allora gli integrali primi sono tutti e soli i polinomi nelle azioni, ossia combinazioni lineari di monomi della forma $\xi^k \eta^k$;

¹² In generale, dovrà essere $\Phi_0 \in \mathcal{N}$; la scelta $\Phi_0 \in \mathcal{N}_k$, ossia polinomio omogeneo, è solo apparentemente restrittiva, grazie alla proprietà iii.

- iii. se $r = \dim \mathcal{M}_\omega > 0$ allora sono integrali primi anche le combinazioni lineari di monomi della forma $\xi^j \eta^k$ con $j - k \in \mathcal{M}_\omega$; tra queste se ne possono scegliere sempre esattamente r indipendenti tra loro e dalle azioni.

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

8.3 Costruzione diretta di integrali primi formali

Il problema di consistenza illustrato sopra si rivela, in generale, difficilmente affrontabile in modo diretto. Solo con particolari ipotesi (sia pure non insensate) si riesce ad ottenere un risultato positivo. La discussione generale invece rivela una problematica piuttosto complessa. L'aspetto interessante è che si intravede un meccanismo indiretto di superamento del problema.

8.3.1 Un caso formalmente integrabile: il sistema non risonante e reversibile

La consistenza della costruzione diretta si può dimostrare in modo semplice ed elegante per una classe di sistemi caratterizzata da due ipotesi: non risonanza tra le frequenze e reversibilità della dinamica.^[32] Il risultato è espresso dalla seguente

Proposizione 8.8: Sia $H \in \mathcal{P}$ un'Hamiltoniana della forma (8.14) e si assumano le seguenti ipotesi:

- i. non risonanza: il modulo di risonanza \mathcal{M}_ω ha dimensione zero, ovvero $\langle k, \omega \rangle = 0$ implica $k = 0$;
- ii. reversibilità: l'Hamiltoniana è funzione pari dei momenti, ossia vale la proprietà $H(x, y) = H(x, -y)$.

Allora H ammette n integrali primi formali indipendenti ed in involuzione; gli integrali hanno la forma (8.16) con $\Phi_0 = \frac{1}{2}(x_l^2 + y_l^2)$, $1 \leq l \leq n$.

È opportuno aggiungere qualche osservazione. L'ipotesi di non risonanza va considerata alla luce del fatto che le frequenze non risonanti sono preponderanti in misura (appendice C). La condizione di reversibilità può giustificarsi osservando che una classe di sistemi estremamente ampia e rilevante dal punto di vista fisico ha un'Hamiltoniana che coincide con l'energia totale del sistema, $H = T + V$, e che l'energia cinetica T è quadratica, e dunque pari, nei momenti, mentre l'energia potenziale V dipende solo dalle coordinate; per tali sistemi l'ipotesi di reversibilità è soddisfatta. Un esempio di sistema non soddisfacente a questa ipotesi è invece quello del problema ristretto dei tre corpi, discusso nel paragrafo 7.4.1: l'uso di un sistema di riferimento ruotante uniformemente introduce nell'Hamiltoniana dei termini lineari nei momenti. Questo fatto non è particolarmente grave, perché la consistenza si può comunque dimostrare in modo indiretto.

La dimostrazione della proposizione 8.8 fa uso di alcuni elementi tecnici. Dirò che una funzione $f \in \mathcal{P}$ è pari nei momenti se vale $f(x, y) = f(x, -y)$, e che è dispari se vale $f(x, y) = -f(x, -y)$. Vale allora il

Lemma 8.9: Lo spazio \mathcal{P} delle serie formali è decomponibile in due sottospazi \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- delle funzioni, rispettivamente, pari e dispari.

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Lemma 8.10: *In caso di non risonanza il nucleo \mathcal{N} di L_{H_0} è un sottospazio di \mathcal{P}^+ .*

Dimostrazione. Per il corollario 8.7 il nucleo \mathcal{N} contiene tutte e sole le funzioni delle azioni, che sono a loro volta funzioni pari nei momenti. Q.E.D.

Lemma 8.11: *Le operazioni di derivazione, prodotto e parentesi di Poisson obbediscono alle regole seguenti*

- i. *la derivata rispetto ad una qualunque delle coordinate x mantiene la parità, la derivata rispetto ad uno qualunque dei momenti y la cambia.*
- ii. *il prodotto tra funzioni della stessa parità è pari; il prodotto tra funzioni di parità opposta è dispari.*
- iii. *la parentesi di Poisson tra funzioni della stessa parità è dispari; la parentesi di Poisson tra funzioni di parità opposta è pari.*

La dimostrazione di questo lemma è elementare ed è lasciata al lettore. È notevole il fatto che esso costituisca lo strumento principale per dimostrare il

Lemma 8.12: *Sotto le ipotesi della proposizione 8.8, data una qualunque $\tilde{\Phi} \in \mathcal{N}$ esiste un integrale primo Φ di H soddisfacente la condizione $\Phi - \tilde{\Phi} \in \mathcal{R}$; inoltre Φ è funzione pari dei momenti.*

Dimostrazione. Si considera lo sviluppo formale $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 + \tilde{\Phi}_1 + \dots$ con $\tilde{\Phi}_s \in \mathcal{N}_{k+s}$ con un k opportuno, e si costruisce un integrale primo $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$ con $\Phi_s \in \mathcal{P}_{k+s}$, e soddisfacente l'ulteriore condizione $\Phi_s - \tilde{\Phi}_s \in \mathcal{R}$ per $s \geq 1$. Che la costruzione sia consistente, lo si ottiene dimostrando che ad ogni passo Φ_s deve essere una funzione pari. Infatti per $s = 0$ questo è vero. Per induzione, si supponga che fino a $s - 1$ si sia costruita la funzione Φ con tutte le condizioni richieste, e si consideri l'equazione (8.17) per Φ_s . Il termine noto Ψ_s è costruito mediante parentesi di Poisson di funzioni pari, e dunque è $\Psi_s \in \mathcal{P}^-$; questo, per il lemma 8.10, implica $\Psi_s \in \mathcal{R}$, sicché l'equazione per Φ_s ammette soluzione. Grazie poi al fatto che L_{H_0} è diagonalizzabile, si può trovare una soluzione unica $\Phi_s \in \mathcal{R}$, e poiché $L_{H_0}\Psi_s$ deve essere dispari segue che Φ_s deve essere una funzione pari. Sommando $\tilde{\Phi}_s$ alla soluzione così ottenuta, si ricava un'altra soluzione pari Φ_s soddisfacente la condizione $\Phi_s - \tilde{\Phi}_s \in \mathcal{R}$ come richiesto. La componente dispari di Φ_s è necessariamente nulla, per il lemma 8.10. Questo completa l'induzione. Q.E.D.

Lemma 8.13: *Sotto le ipotesi della proposizione 8.8, siano Φ e Ψ due integrali primi formali di H . Allora Ψ e Φ sono in involuzione.*

Dimostrazione. Si considera lo sviluppo $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$, $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \dots$; basta dimostrare che per ogni $s \geq 0$ si ha $\sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} = 0$. Per $s = 0$ si osserva subito che si ha $\{\Phi_0, \Psi_0\} \in \mathcal{P}^-$, perché sia Φ_0 che Ψ_0 sono funzioni pari; d'altra parte si ha anche che $\{\Phi_0, \Psi_0\} \in \mathcal{N}$, perché $L_{H_0}\{\Phi_0, \Psi_0\} = \{L_{H_0}\Phi_0, \Psi_0\} + \{\Phi_0, L_{H_0}\Psi_0\} = 0$, e dunque $\{\Phi_0, \Psi_0\} = 0$ per il lemma 8.10. La dimostrazione si completa per induzione.

Si dimostra innanzitutto che $L_{H_0} \sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} = 0$. A tal fine si osserva che si ha:

$$L_{H_0} \sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} = \sum_{j=0}^s [\{L_{H_0} \Phi_j, \Psi_{s-j}\} + \{\Phi_j, L_{H_0} \Psi_{s-j}\}] .$$

Si calcola poi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s \{L_{H_0} \Phi_j, \Psi_{s-j}\} &= \sum_{j=1}^s \{L_{H_0} \Phi_j, \Psi_{s-j}\} \\ &= - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^j \{L_{H_k} \Phi_{j-k}, \Psi_{s-j}\} \\ &= - \sum_{k=1}^s \sum_{m=0}^{s-k} \{L_{H_k} \Phi_m, \Psi_{s-k-m}\} \\ &= - \sum_{k=1}^s L_{H_k} \sum_{m=0}^{s-k} \{\Phi_m, \Psi_{s-k-m}\} + \sum_{k=1}^s \sum_{m=0}^{s-k} \{\Phi_m, L_{H_k} \Psi_{s-m-k}\} \\ &= \sum_{m=0}^{s-1} \sum_{k=1}^{s-m} \{\Phi_m, L_{H_k} \Psi_{s-m-k}\} \\ &= - \sum_{m=0}^{s-1} \{\Phi_m, L_{H_0} \Psi_{s-m}\} . \end{aligned}$$

I passaggi di questo calcolo si svolgono nel modo seguente: 1) si usa $L_{H_0} \Phi_0 = 0$; 2) si usa l'equazione (8.17) per $L_{H_0} \Phi_j$; 3) si introduce l'indice $m = j - k$ al posto di j , osservando che $1 \leq j \leq s$, $1 \leq k \leq j$ è equivalente a $1 \leq k \leq s$, $0 \leq m \leq s - k$, e si scambiano le somme; 4) si usa l'identità di Jacobi (proprietà iv. del lemma 8.5); 5) per l'ipotesi induttiva è $\sum_{m=0}^{s-k} \{\Phi_m, \Psi_{s-k-m}\} = 0$, e quindi la prima somma si annulla; si scambiano poi le due somme rimanenti, osservando che $1 \leq k \leq s$, $0 \leq m \leq s - k$ è equivalente a $0 \leq m \leq s - 1$, $1 \leq k \leq s - m$; 6) si usa $L_{H_0} \Psi_{s-m} = - \sum_{k=1}^{s-m} L_{H_k} \Psi_{s-m-k}$ per l'equazione (8.17). Nell'ultima somma si può poi aggiungere il termine $m = s$, che è comunque nullo, e facendo ancora uso dell'identità di Jacobi si ottiene

$$\sum_{j=0}^s [\{L_{H_0} \Phi_j, \Psi_{s-j}\} + \{\Phi_j, L_{H_0} \Psi_{s-j}\}] = L_{H_0} \sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} = 0 ,$$

come affermato. È dunque $\sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} \in \mathcal{N}$. D'altra parte per il lemma 8.12 si ha $\Phi \in \mathcal{P}^+$, $\Psi \in \mathcal{P}^+$, e dunque è anche $\sum_{j=0}^s \{\Phi_j, \Psi_{s-j}\} \in \mathcal{P}^-$; per il lemma 8.10 questa espressione deve essere nulla, e ciò completa l'induzione. Q.E.D.

Gli ultimi due lemmi consentono di completare la

Dimostrazione della proposizione 8.8. Per il lemma 8.12, gli n integrali primi con $\Phi_0 = \frac{1}{2}(x_l^2 + y_l^2)$, $1 \leq l \leq n$ esistono, e possono essere costruiti con una scelta

del tutto arbitraria dei termini di spazio nullo agli ordini $s > 2$; per il lemma 8.13, essi sono in involuzione. L'indipendenza segue facilmente dal fatto che le azioni stesse sono indipendenti. Q.E.D.

Per il teorema di Arnold–Jost 4.9, si possono introdurre, sempre in modo formale, le variabili d'azione, e dunque il sistema considerato nella proposizione 8.8 è formalmente integrabile. Tuttavia non è particolarmente interessante, a questo punto, procedere alla costruzione esplicita: questa si ricaverà in modo più semplice dalla teoria della forma normale.¹³

8.3.2 Considerazioni algebriche generali

La discussione del problema di consistenza nel caso generale, incluso quello di risonanza, non è per nulla banale, e non esiste una dimostrazione di esistenza di integrali primi formali di semplicità paragonabile a quella della proposizione 8.8. Il resto di questo paragrafo mostra come un'analisi accurata del problema conduca, in modo più o meno spontaneo, a ritrovare un metodo indiretto per la costruzione delle serie, nel senso che non si risolve direttamente il sistema (8.17), ma si ricorre a delle funzioni ausiliarie. Questo metodo, a sua volta, risulta essere strettamente connesso ai metodi di forma normale. Lo sviluppo del calcolo è laborioso, ma ho scelto di includerlo in queste note perché ritengo interessante proprio l'aspetto che connette la ricerca diretta di integrali primi alla teoria delle forme normali costruite mediante serie di Lie, di cui parlerò più avanti. In effetti il paragrafo si conclude con una congettura che sarà verificata in modo dettagliato nel successivo paragrafo 8.4. Il lettore non particolarmente interessato a calcoli complessi potrà saltare direttamente a quel paragrafo.¹⁴

¹³ Per un esempio si veda il trattato di Whittaker [99], § 198. Si noti che la costruzione da lui proposta non poteva far uso del teorema di Arnold–Jost, dimostrato molti anni dopo; Whittaker pone invece l'accento sulla ricerca di soluzioni che siano scritte come serie contenenti il tempo in forma trigonometrica. Tecnicamente, il problema consiste nel determinare, ad ogni passo, il termine arbitrario di spazio nullo nella soluzione della (8.17) in modo che le Φ risultanti siano proprio le azioni. Naturalmente, lo schema qui illustrato non fornisce alcuna indicazione a priori sulla scelta di tali termini: è questo il maggiore difetto del metodo.

¹⁴ È interessante considerare lo sviluppo storico del problema. L'idea di sfruttare il sistema ricorsivo (8.17) per la costruzione di integrali primi è stata proposta da Whittaker^[97], che però non discute la consistenza del procedimento; si veda anche [99], cap. XVI. Della consistenza si occupò più tardi Cherry^{[16][17]}, che ideò una soluzione indiretta e mostrò l'applicabilità del suo procedimento in alcuni esempi, senza però pervenire ad un enunciato generale. Fu Birkhoff, pochi anni dopo^[10], a proporre un metodo generale per il caso non risonante; nel suo metodo il problema di consistenza non è risolto direttamente, ma aggirato facendo uso dei metodi di forma normale. Tali metodi erano già noti in precedenza (ad esempio erano già stati usati da Poincaré, [81], Tome I, cap. IX), ma l'uso particolarmente ampio ed elegante fattone da Birkhoff ha fatto comparire nella letteratura il termine “forma normale di Birkhoff”. Il metodo della forma normale è stato successivamente esteso anche al caso risonante da diversi autori; un esempio si trova in [41]. Si può quindi affermare che esiste un metodo *indiretto* per costruire gli integrali

Il procedimento risolutivo si fonda su una semplice osservazione, dovuta a Cherry. La soluzione dell'equazione $L_{H_0} \Phi_s = \Psi_s$ è possibile se è verificata la condizione di consistenza $\Psi_s \in \mathcal{R}$; d'altra parte però la soluzione Φ_s è determinata a meno di un termine arbitrario $\tilde{\Phi}_s \in \mathcal{N}$. Se si esamina l'espressione (8.18) di Ψ_s , si vede subito che l'inserimento di un termine arbitrario all'ordine $m < s$ modifica il termine noto Ψ agli ordini successivi. Si può dunque cercare di sfruttare questa arbitrarietà per rendere consistente la costruzione ad ogni ordine. Il resto di questo paragrafo sarà dedicato a mettere in evidenza la struttura algebrica necessaria per l'applicazione dell'idea di Cherry.

È utile anzitutto analizzare in dettaglio la struttura di \mathcal{N} . Si definisce il commutante $\mathcal{N}^{(0)}$ di \mathcal{N} come il sottinsieme formato dalle funzioni di \mathcal{N} che sono in involuzione con qualunque altra funzione di \mathcal{N} stesso; formalmente:

$$(8.21) \quad \mathcal{N}^{(0)} = \{f \in \mathcal{N} : L_f(\mathcal{N}) = \{0\}\} .$$

Si vede subito che $\mathcal{N}^{(0)}$ non è banale, perché per la definizione stessa di \mathcal{N} è $H_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$. Una caratterizzazione più completa è data dal

Lemma 8.14: *Valgono le seguenti proprietà:*

- i. $\mathcal{N}^{(0)}$ è un sottospazio di \mathcal{N} ;
- ii. se $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$, allora $\mathcal{N}^{(0)}$ coincide con \mathcal{N} ; se $\dim \mathcal{M}_\omega > 0$, allora $\mathcal{N}^{(0)}$ è sottospazio proprio di \mathcal{N} ;
- iii. in generale $\mathcal{N}^{(0)}$ contiene sempre e solo $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ funzioni indipendenti della forma $\Phi^{(\alpha)} = \sum_l \alpha_l (x_l^2 + y_l^2)/2$, con $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a \mathcal{M}_ω .

La dimostrazione di questo lemma si ottiene facilmente passando a variabili complesse mediante la trasformazione (8.20) e seguendo la traccia della dimostrazione del lemma 8.6. Il lettore potrà svolgerla come interessante ed utile esercizio.

È anche utile indagare il comportamento dei sottospazi $\mathcal{N}^{(0)}$, \mathcal{N} e \mathcal{R} nei confronti della parentesi di Poisson. Questo è il contenuto del seguente

primi formali. Del metodo diretto sembra non esservi altra traccia nella letteratura fino al 1959, quando viene ripreso da Littlewood^{[68][69]}. In una breve nota aggiunta ai lavori citati egli riconosce l'esistenza del problema di consistenza e lo risolve nel caso di due gradi di libertà, dichiarandosi però incapace di trovare una soluzione generale. Nel 1960 Contopoulos^[20] fu il primo a costruire esplicitamente le serie formali al calcolatore ed a farne ampio uso nello studio di sistemi a due gradi di libertà. Il caso formalmente integrabile discusso nel paragrafo precedente si trova in [32]. La discussione generale riportata in questo paragrafo e nei successivi riprende, con alcune modifiche tecniche, quella proposta in [33].

Lemma 8.15: Per la parentesi di Poisson vale la seguente tabella di composizione:

$\{\cdot, \cdot\}$	$\mathcal{N}^{(0)}$	\mathcal{N}	\mathcal{R}
$\mathcal{N}^{(0)}$	0	0	\mathcal{R}
\mathcal{N}	0	\mathcal{N}	\mathcal{R}
\mathcal{R}	\mathcal{R}	\mathcal{R}	\mathcal{P}

Dimostrazione. Le caselle con 0 si giustificano per la definizione stessa di $\mathcal{N}^{(0)}$. Se $f \in \mathcal{N}$ e $g \in \mathcal{N}$, allora per l'identità di Jacobi si ha $L_{H_0}\{f, g\} = \{L_{H_0}f, g\} + \{f, L_{H_0}g\} = 0$, e questo giustifica la casella con \mathcal{N} . Se $f \in \mathcal{N}$ e $g \in \mathcal{R}$, allora esiste $h \in \mathcal{R}$ tale che $g = L_{H_0}h$, e dunque $\{f, g\} = \{f, L_{H_0}h\} = L_{H_0}\{f, h\} \in \mathcal{R}$, e questo giustifica le caselle con \mathcal{R} . La casella con \mathcal{P} non richiede giustificazioni. *Q.E.D.*

A completamento della struttura algebrica è conveniente introdurre, accanto all'operatore L_{H_0} , altri tre operatori.

- i. L'inverso $L_{H_0}^{-1}$ di L_{H_0} definito in modo univoco mediante restrizione del dominio di L_{H_0} a \mathcal{R} ; precisamente, data $f \in \mathcal{R}$ si definisce $L_{H_0}^{-1}f$ come l'unica funzione $g \in \mathcal{R}$ soddisfacente $L_{H_0}g = f$.
- ii. L'operatore $\Pi_{\mathcal{R}}$ di proiezione su \mathcal{R} , definito come $\Pi_{\mathcal{R}} = L_{H_0}^{-1}L_{H_0}$.
- iii. L'operatore $\Pi_{\mathcal{N}}$ di proiezione su \mathcal{N} , definito come $\Pi_{\mathcal{N}} = \text{I} - \Pi_{\mathcal{R}}$, dove I è l'operatore identità.

Al fine di non appesantire inutilmente le notazioni, nel seguito denoterò la proiezione su \mathcal{N} o \mathcal{R} anche con un indice in alto anziché con l'operatore corrispondente; così, scriverò abitualmente $f^{\mathcal{N}}$ per $\Pi_{\mathcal{N}}f$ e $f^{\mathcal{R}}$ per $\Pi_{\mathcal{R}}f$.

Le proprietà algebriche di questi operatori sono riassunte nel seguente

Lemma 8.16: Siano $\varphi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$ (in particolare può ben essere $\varphi_0 = H_0$) e $\varphi \in \mathcal{N}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- i. $\Pi_{\mathcal{N}} + \Pi_{\mathcal{R}} = \text{I}$, $\Pi_{\mathcal{R}}\Pi_{\mathcal{N}} = \Pi_{\mathcal{N}}\Pi_{\mathcal{R}} = 0$;
- ii. $[L_{\varphi_0}, L_{\varphi}] = 0$;
- iii. $L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{R}} = \Pi_{\mathcal{R}}L_{\varphi_0} = L_{\varphi_0}$, $L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{N}} = \Pi_{\mathcal{N}}L_{\varphi_0} = 0$;
- iv. $[L_{\varphi}, \Pi_{\mathcal{N}}] = [L_{\varphi}, \Pi_{\mathcal{R}}] = 0$;
- v. $L_{\varphi_0}L_{H_0}^{-1}\Pi_{\mathcal{R}} = L_{H_0}^{-1}L_{\varphi_0}$;
- vi. $L_{\varphi}L_{H_0}^{-1}\Pi_{\mathcal{R}} = L_{H_0}^{-1}L_{\varphi}\Pi_{\mathcal{R}}$.

Dimostrazione. i: è una riscrittura del lemma 8.6, tenuto conto delle definizioni degli operatori di proiezione.

ii: per il lemma 8.5-v (o, equivalentemente, per l'identità di Jacobi).

iii. $L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{N}} = 0$ per il lemma 8.15; da questa si calcola $L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{R}} = L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{N}} + L_{\varphi_0}\Pi_{\mathcal{R}} = L_{\varphi_0}(\Pi_{\mathcal{N}} + \Pi_{\mathcal{R}}) = L_{\varphi_0}$; il resto segue dalla iv, che afferma che L_{φ_0} commuta sia con $\Pi_{\mathcal{N}}$ che con $\Pi_{\mathcal{R}}$.

iv: si ha

$$L_\varphi \Pi_{\mathcal{N}} - \Pi_{\mathcal{N}} L_\varphi = (\Pi_{\mathcal{N}} + \Pi_{\mathcal{R}}) L_\varphi \Pi_{\mathcal{N}} - \Pi_{\mathcal{N}} L_\varphi (\Pi_{\mathcal{N}} + \Pi_{\mathcal{R}}) = \Pi_{\mathcal{R}} L_\varphi \Pi_{\mathcal{N}} - \Pi_{\mathcal{N}} L_\varphi \Pi_{\mathcal{R}} ,$$

e quest'ultima espressione si annulla in virtù del lemma 8.15; la seconda equaglianza si ottiene da $[L_\varphi, \Pi_{\mathcal{R}}] = [L_\varphi, \mathbf{I} - \Pi_{\mathcal{N}}] = -[L_\varphi, \Pi_{\mathcal{N}}] = 0$.

v: basta mostrare la vi, e usare $L_{\varphi_0} \Pi_{\mathcal{R}} = L_{\varphi_0}$.

vi: per la iv, $L_\varphi L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} = \Pi_{\mathcal{R}} L_\varphi L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} = L_{H_0}^{-1} L_{H_0} L_\varphi L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} = L_{H_0}^{-1} L_\varphi \Pi_{\mathcal{R}}$. *Q.E.D.*

Si può ora tornare a considerare le equazioni (8.17) per gli integrali primi formali. Per rendere più esplicito il procedimento illustrato all'inizio del paragrafo conviene proiettare le equazioni su \mathcal{N} e \mathcal{R} . Si ottiene, per $s = 0$,

$$(8.22) \quad L_{H_0} \Phi_0^{\mathcal{N}} = 0 , \quad L_{H_0} \Phi_0^{\mathcal{R}} = 0 ,$$

e per $s > 0$ il sistema

$$(8.23) \quad \Pi_{\mathcal{N}} \Psi_s = 0 , \quad L_{H_0} \Phi_s^{\mathcal{R}} = \Pi_{\mathcal{R}} \Psi_s .$$

Qui occorre scrivere Ψ_s in forma più esplicita, facendo uso dell'espressione (8.18). L'equazione in \mathcal{N} assume allora la forma

$$(8.24) \quad \sum_{j=1}^s \{H_j^{\mathcal{N}}, \Phi_{s-j}^{\mathcal{N}}\} + \Pi_{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{s-1} \{H_j^{\mathcal{R}}, \Phi_{s-j}^{\mathcal{R}}\} = 0 .$$

L'equazione in \mathcal{R} si scrive invece

$$(8.25) \quad L_{H_0} \Phi_s^{\mathcal{R}} = - \sum_{j=1}^s \{H_j^{\mathcal{R}}, \Phi_{s-j}^{\mathcal{N}}\} - \sum_{j=1}^{s-1} \{H_j^{\mathcal{N}}, \Phi_{s-j}^{\mathcal{R}}\} + \Pi_{\mathcal{R}} \sum_{j=1}^{s-1} \{H_j^{\mathcal{R}}, \Phi_{s-j}^{\mathcal{R}}\} .$$

Quest'ultima espressione non presenta difficoltà particolari; il problema di consistenza è invece totalmente contenuto nell'equazione (8.24). Uno sguardo ingenuo può indurre a pensare che essa possa considerarsi come un'equazione in $\Phi_{s-1}^{\mathcal{N}}$ (che non è determinato dall'equazione al passo precedente); in effetti, è facile scriverla nella forma $\{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_{s-1}^{\mathcal{N}}\} = Q_s^{\mathcal{N}}$, con $Q_s^{\mathcal{N}}$ noto. Ma un'analisi più attenta mostra che il problema, in generale, si presenta arduo perché nulla sappiamo sulla forma di $H_1^{\mathcal{N}}$, che potrebbe anche essere nullo.

8.3.3 *Discussione euristica delle equazioni*

Per cercare qualche spiraglio nelle equazioni appena scritte, si può iniziare col procedere, in modo euristico, ordine per ordine.

Ordine 0

L'equazione $L_{H_0} \Phi_0^{\mathcal{R}} = 0$ impone la sola condizione $\Phi_0 \in \mathcal{N}$; è però utile imporre la condizione, solo apparentemente più forte,¹⁵ $\Phi_0 \in \mathcal{N}_k$ con k arbitrario, ossia che Φ_0 sia un polinomio omogeneo di ordine k , sicché sarà anche $\Phi_s \in \mathcal{P}_{s+k}$ per $s > 0$.

¹⁵ Scegliere Φ_0 non omogeneo equivale a determinare in modo opportuno i termini arbitrari nella soluzione ricorsiva del sistema, in virtù della linearità della parentesi di Poisson.

Ordine 1

L'equazione in \mathcal{N} diventa $\{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_0\} = 0$, ed impone un'ulteriore condizione su Φ_0 . Più in dettaglio, si possono distinguere due casi.

- i. Il caso apparentemente banale è $H_1^{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}^{(0)}$, in particolare $H_1^{\mathcal{N}} = 0$. In tal caso non vi sono restrizioni particolari su Φ_0 , né difficoltà per $s = 1$, ma basta considerare le equazioni degli ordini successivi per rendersi subito conto che il problema è solo rimandato.¹⁶
- ii. Il caso più generale è $0 \neq H_1^{\mathcal{N}} \notin \mathcal{N}^{(0)}$. In tal caso Φ_0 deve essere in involuzione con $H_1^{\mathcal{N}}$.

Nel seguito converrà assumere che si verifichi proprio il secondo caso; inoltre, per evitare ipotesi particolari sulla forma di $H_1^{\mathcal{N}}$, converrà imporre la condizione

$$(8.26) \quad \Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)} ,$$

sicché l'equazione in \mathcal{N} risulta sempre certamente soddisfatta all'ordine 1.

Venendo ora all'equazione in \mathcal{R} , dovrà essere

$$(8.27) \quad L_{H_0} \Phi_1^{\mathcal{R}} = L_{\Phi_0} H_1^{\mathcal{R}} .$$

È utile soffermarsi sulla forma della soluzione: per la proprietà vi del lemma 8.16 si può scrivere

$$(8.28) \quad \Phi_1^{\mathcal{R}} = L_{\chi_1} \Phi_0$$

avendo definito

$$(8.29) \quad \chi_1 = -L_{H_0}^{-1} H_1^{\mathcal{R}} .$$

Il fatto rilevante qui è che *la funzione χ_1 così definita non dipende dalla scelta di Φ_0 , ma solo da H .*

Si può aggiungere qualche altra considerazione riguardante l'Hamiltoniana. Essendo H un integrale primo sviluppato a partire da $H_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$, deve essere necessariamente

$$(8.30) \quad H_1^{\mathcal{R}} = L_{\chi_1} H_0 ;$$

in effetti, questa altro non è che una riscrittura della (8.29). Si potrà anche scrivere

$$(8.31) \quad H_1 = L_{\chi_1} H_0 + Z_1 ,$$

sicché $Z_1 = H_1^{\mathcal{N}}$ risulta essere il termine arbitrario da aggiungere a $H_1^{\mathcal{R}}$ per ottenere lo sviluppo di H . Per come è scritta, questa sembra essere una banale identità. È

¹⁶ Il lettore potrà osservare che per un'Hamiltoniana sviluppata in serie di potenze nella forma (8.14) si verifica in generale proprio il caso $H_1^{\mathcal{N}} = 0$. Infatti, il caso $H_1^{\mathcal{N}} \neq 0$ può verificarsi solo se il modulo di risonanza \mathcal{M}_ω contiene almeno un vettore k soddisfacente $|k| = 3$; in tal caso, non può essere $H_1^{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}^{(0)}$. Ma, come si è detto, cercare di sfruttare questo fatto serve solo a rimandare i problemi. Da qui la scelta, fatta poco più avanti, di considerare il caso apparentemente peggiore.

però interessante considerarla come un'equazione in cui le incognite sono χ_1 e Z_1 ; ciò risulta meglio evidente se la si riscrive nella forma

$$(8.32) \quad Z_1 - L_{H_0} \chi_1 = H_1 .$$

Si ottiene così un'equazione simile alla (8.17) per un integrale primo, ma con la notevole differenza che *la presenza dell'incognita Z_1 rimuove il problema della consistenza*: infatti, esiste sempre la soluzione¹⁷

$$(8.33) \quad Z_1 = \Pi_{\mathcal{N}} H_1 , \quad \chi_1 = -L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} H_1 .$$

Questa osservazione avrà un ruolo centrale nella soluzione del problema di consistenza.

Ordine 2

L'equazione in \mathcal{N} , ossia la (8.24), tenendo conto che è $\Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$, si scrive

$$(8.34) \quad \{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{N}}\} + \Pi_{\mathcal{N}} \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = 0 .$$

Occorre dunque separare le componenti di \mathcal{N} e \mathcal{R} in $\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\}$. Facendo uso della forma (8.28) di $\Phi_1^{\mathcal{R}}$ e dell'identità di Jacobi si ottiene

$$\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = L_{\Phi_0} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} - L_{\chi_1} L_{\Phi_0} H_1^{\mathcal{R}} ;$$

analogamente, per la forma (8.30) di $H_1^{\mathcal{R}}$, si ha

$$\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = -L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}} + L_{\chi_1} L_{H_0} \Phi_1^{\mathcal{R}} .$$

Sommando membro a membro queste due espressioni, e facendo uso dell'equazione (8.27) per l'ordine 1 si ottiene subito

$$(8.35) \quad \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = \frac{1}{2} (L_{\Phi_0} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} - L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}})$$

(si ricordi il lemma 8.16–iii), il cui secondo membro appartiene a \mathcal{R} . L'equazione (8.34) in \mathcal{N} si riduce dunque a

$$\{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{N}}\} = 0 ,$$

ed ammette la soluzione banale

$$(8.36) \quad \Phi_1^{\mathcal{N}} = 0 .$$

L'equazione in \mathcal{R} , ossia la (8.26), può ora scriversi, ricordando che per la (8.35) è $\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \in \mathcal{R}$,

$$(8.37) \quad L_{H_0} \Phi_2^{\mathcal{R}} = L_{\Phi_0} H_2^{\mathcal{R}} - \{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} - \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} .$$

Per la forma (8.28) di $\Phi_1^{\mathcal{R}}$ si potrà scrivere

$$-\{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = \{H_1^{\mathcal{N}}, L_{\Phi_0} \chi_1\} = L_{\Phi_0} \{H_1^{\mathcal{N}}, \chi_1\} ,$$

¹⁷ Non unica, ma naturale e del resto sufficiente per il seguito.

e facendo uso della (8.35) si potrà riscrivere la (8.37) come (si ricordi il lemma 8.16–iii)

$$L_{H_0} \Phi_2^{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}} + L_{\Phi_0} \left(H_2^{\mathcal{R}} + \{H_1^{\mathcal{N}}, \chi_1\} - \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} \right) .$$

È interessante il fatto che il termine noto abbia la forma $L_{H_0} f + L_{\Phi_0} g$, sicché diventa naturale scrivere la soluzione come (ricordando che per la (8.36) è $\Phi_1^{\mathcal{R}} = \Phi_1$)

$$(8.38) \quad \Phi_2^{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_1 + L_{\chi_2} \Phi_0 ,$$

avendo definito

$$(8.39) \quad \chi_2 = -L_{H_0}^{-1} \left(H_2^{\mathcal{R}} + \{H_1^{\mathcal{N}}, \chi_1\} - \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} \right) .$$

Anche qui, come per l'ordine 1, è interessante vedere come si possa ritrovare l'Hamiltoniana. Bisogna anzitutto osservare che la (8.36) non è più valida, perché si è supposto $H_1^{\mathcal{N}} \neq 0$. Occorre dunque indagare la forma della soluzione ove si supponga $\Phi_1^{\mathcal{N}} \neq 0$. Si vede subito che l'equazione (8.37) viene modificata per la sola aggiunta del termine $-\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{N}}\}$, che, grazie alla forma (8.30) di $H_1^{\mathcal{R}}$ ed al lemma 8.16–iv può scriversi

$$-\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{N}}\} = L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{N}} .$$

Di conseguenza la soluzione (8.38) viene modificata semplicemente dall'aggiunta di un termine $L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{N}}$. Questo termine *ha esattamente la forma che si otterrebbe dallo sviluppo al primo ordine di un integrale primo sviluppato a partire da $\Phi_1^{\mathcal{N}}$* . Questo induce a scrivere

$$(8.40) \quad H_2^{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} + L_{\chi_2} H_0 + L_{\chi_1} Z_1 ,$$

o, in modo equivalente ed a patto di definire in modo opportuno una funzione $Z_2 \in \mathcal{N}$,

$$(8.41) \quad H_2 = \frac{1}{2} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} + L_{\chi_2} H_0 + L_{\chi_1} Z_1 + Z_2 .$$

Analogamente a quanto si è fatto per l'ordine 1, questa può interpretarsi come un'equazione per χ_2 e Z_2 , e scriversi nella forma più comoda

$$(8.42) \quad Z_2 - L_{H_0} \chi_2 = -\frac{1}{2} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} - L_{\chi_1} Z_1 + H_2 .$$

La soluzione più semplice è

$$(8.43) \quad \begin{aligned} Z_2 &= -\frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} + H_2^{\mathcal{N}} \\ \chi_2 &= L_{H_0}^{-1} \left(\frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} + L_{\chi_1} Z_1 - H_2^{\mathcal{R}} \right) , \end{aligned}$$

sicché χ_2 ha esattamente la forma (8.39).

Ordine 3

L'equazione in \mathcal{N} , tenuto conto che $\Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$ e che si è posto $\Phi_1^{\mathcal{N}} = 0$, si scrive

$$\{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_2^{\mathcal{N}}\} + \Pi_{\mathcal{N}}(\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} + \{H_2^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\}) .$$

Occorre dunque manipolare l'espressione tra parentesi al fine di rendere più esplicita la proiezione su \mathcal{N} e \mathcal{R} . Facendo uso della forma (8.28) di $\Phi_1^{\mathcal{R}}$ e (8.30) di $H_1^{\mathcal{R}}$, e procedendo come per l'ordine 2, si trova

$$(8.44) \quad \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} + \{H_2^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = L_{\Phi_0} L_{\chi_1} H_2^{\mathcal{R}} - L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_2^{\mathcal{R}} \\ + L_{\chi_1} (L_{H_0} \Phi_2^{\mathcal{R}} - L_{\Phi_0} H_2^{\mathcal{R}}) ;$$

in modo analogo, facendo uso delle espressioni (8.38) di $\Phi_2^{\mathcal{R}}$ e (8.40) di $H_2^{\mathcal{R}}$, si trova anche

$$(8.45) \quad \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} + \{H_2^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = L_{\Phi_0} L_{\chi_2} H_1^{\mathcal{R}} - L_{H_0} L_{\chi_2} \Phi_1^{\mathcal{R}} + \{Z_1, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ - \frac{1}{2} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}, H_1^{\mathcal{R}}\} - \frac{1}{2} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ + \frac{1}{2} L_{\chi_1} \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} + L_{\chi_1} \{Z_1, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} .$$

Se si moltiplica per 2 quest'ultima equazione, e la si somma alla (8.44) si vede che i soli termini che potrebbero avere componenti in \mathcal{N} sono quelli preceduti dall'operatore L_{χ_1} , e facendo uso dell'equazione (8.37) per l'ordine 2 si mantiene il solo termine $L_{\chi_1} \{Z_1, \Phi_1^{\mathcal{R}}\}$. Riutilizzando ancora una volta la forma (8.28) di $\Phi_1^{\mathcal{R}}$ si calcola

$$L_{\chi_1} \{Z_1, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = \{L_{\chi_1} Z_1, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} + \{Z_1, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ = -L_{\Phi_0} \{L_{\chi_1} Z_1, \chi_1\} - L_{\chi_1} L_{\Phi_0} L_{\chi_1} Z_1 + \{Z_1, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ = -L_{\Phi_0} \{L_{\chi_1} Z_1, \chi_1\} + L_{\chi_1} \{\Phi_1^{\mathcal{R}}, Z_1\} + \{Z_1, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} ;$$

confrontando il primo e l'ultimo membro di questa catena di eguaglianze si ricava

$$L_{\chi_1} \{Z_1, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = -\frac{1}{2} L_{\Phi_0} \{L_{\chi_1} Z_1, \chi_1\} + \{Z_1, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} .$$

Questa eguaglianza va sostituita nella somma della (8.44) con il doppio della (8.45), e si ricava finalmente (ricordando anche che $Z_1 = H_1^{\mathcal{N}}$)

$$(8.46) \quad \{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} + \{H_2^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = \frac{1}{3} L_{\Phi_0} \left(L_{\chi_1} H_2^{\mathcal{R}} + 2L_{\chi_2} H_1^{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} \{L_{\chi_1} Z_1, \chi_1\} \right) \\ - \frac{1}{3} L_{H_0} (L_{\chi_1} \Phi_2^{\mathcal{R}} + 2L_{\chi_2} \Phi_1^{\mathcal{R}}) - \frac{1}{2} \{H_1^{\mathcal{N}}, L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ + \frac{1}{3} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}, H_1^{\mathcal{R}}\} - \frac{1}{3} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} .$$

Proiettando su \mathcal{N} , e sostituendo nell'equazione in \mathcal{N} si ottiene infine l'equazione

$$(8.47) \quad \{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_2^{\mathcal{N}}\} - \{H_1^{\mathcal{N}}, \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = 0 ,$$

la cui soluzione più semplice è

$$(8.48) \quad \Phi_2^{\mathcal{N}} = \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}} .$$

L'aspetto sorprendente di questo risultato è che, se si riprende l'espressione (8.38) di $\Phi_2^{\mathcal{R}}$, si scopre che *per garantire la consistenza del procedimento all'ordine 3 basta rimuovere dalla (8.38) le proiezioni su \mathcal{R} , scrivendo semplicemente*

$$(8.49) \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} L_{\chi_1} \Phi_1 + L_{\chi_2} \Phi_0 .$$

Sembra dunque naturale *congetturare che si possa determinare una successione di funzioni χ_1, χ_2, \dots , dipendenti solo da H , che consenta di scrivere lo sviluppo formale di un integrale primo*. Ciò che non è ancora completamente evidente è che forma abbiano i termini della successione: per questo occorre trovare un'espressione per $\Phi_3^{\mathcal{R}}$.

L'equazione in \mathcal{R} , per la (8.26), si scrive

$$(8.50) \quad \begin{aligned} L_{H_0} \Phi_3^{\mathcal{R}} = & -\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{N}}\} - \{H_3^{\mathcal{R}}, \Phi_0\} - \{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} - \{H_2^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ & - \Pi_{\mathcal{R}} (\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} + \{H_2^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\}) . \end{aligned}$$

In questa equazione occorre sostituire la (8.46), ma soprattutto è interessante scriverne la soluzione in una forma che metta in evidenza, se possibile, l'intervento di una funzione χ_3 opportunamente definita. A tal fine occorre, come per l'ordine 2, porre il termine noto dell'equazione nella forma $L_{\Phi_0} f + L_{H_0} g$, e per questo è necessario modificare un po' la forma di alcuni termini.

i. Nella (8.44) compare il termine

$$\frac{1}{3} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}, H_1^{\mathcal{R}}\} = \frac{1}{3} L_{H_0} L_{\chi_1} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}} = \frac{2}{3} L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_2^{\mathcal{N}} .$$

ii. Sempre nella (8.44) compare il termine

$$-\frac{1}{3} \{\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = -\frac{1}{3} L_{\Phi_0} L_{\chi_1} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} .$$

iii. Nella (8.50) compare il termine

$$-\{H_1^{\mathcal{R}}, \Phi_2^{\mathcal{N}}\} = L_{H_0} L_{\chi_1} \Phi_2^{\mathcal{N}} .$$

iv. Sempre nella (8.50) compare il termine

$$\begin{aligned} \{H_1^{\mathcal{N}}, \Phi_2^{\mathcal{R}}\} &= -\{Z_1, L_{\Phi_0} \chi_2\} + \frac{1}{2} \{H_1^{\mathcal{N}}, \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} \\ &= L_{\Phi_0} L_{\chi_2} Z_1 + \frac{1}{2} \{H_1^{\mathcal{N}}, \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_1^{\mathcal{R}}\} . \end{aligned}$$

v. Infine, nella (8.50) compare il termine

$$\{H_2^{\mathcal{N}}, \Phi_1^{\mathcal{R}}\} = L_{\Phi_0} L_{\chi_1} H_2^{\mathcal{N}} .$$

Sostituendo la (8.46) nella (8.50), sostituendovi poi le cinque espressioni appena ricavate, e tenendo conto anche della (8.49) si ottiene infine

$$L_{H_0} \Phi_3^{\mathcal{R}} = L_{H_0} \left(\frac{1}{3} L_{\chi_1} \Phi_2 + \frac{2}{3} L_{\chi_2} \Phi_1 \right) + L_{\Phi_0} \left(H_3^{\mathcal{R}} - L_{\chi_2} Z_1 - L_{\chi_1} H_2^{\mathcal{N}} - \frac{2}{3} L_{\chi_2} H_1^{\mathcal{R}} + \frac{1}{2} \{L_{\chi_1} Z_1, \chi_1\} + \frac{1}{3} L_{\chi_1} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1^{\mathcal{R}} \right).$$

È dunque immediato scrivere la soluzione nella forma

$$(8.51) \quad \Phi_3^{\mathcal{R}} = \frac{1}{3} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_2 + \frac{2}{3} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_2} \Phi_1 + L_{\chi_3} \Phi_0,$$

dove χ_3 viene definito semplicemente applicando l'operatore $L_{H_0}^{-1}$ al termine soggetto a L_{Φ_0} nell'equazione in \mathcal{R} .

Per completare lo schema della discussione agli ordini precedenti si potrebbe ricavare l'espressione di χ_3 facendo uso dell'Hamiltoniana. Tuttavia, la complessità sempre crescente del calcolo lascia chiaramente intendere che non è realistico pensare di proseguire ancora a lungo con queste considerazioni euristiche. È invece più utile, a questo punto, raccogliere i risultati rilevanti, e tentare di ricavarne una congettura sulla forma della soluzione generale.

8.3.4 Una congettura sul superamento del problema della consistenza

Le considerazioni del paragrafo 8.3.3 sembrano dare le seguenti indicazioni:

- i. data una qualunque funzione $\Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$ esiste un integrale primo formale $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$ il cui sviluppo è determinato da una successione di funzioni χ_1, χ_2, \dots dipendenti solo da H ;
- ii. la successione χ_1, χ_2, \dots può determinarsi sfruttando il fatto che l'Hamiltoniana H stessa è un integrale primo.

Per dare a queste indicazioni una forma più precisa, e concretamente utilizzabile per una costruzione esplicita, occorre ripercorrere sinteticamente i risultati ottenuti cercando di effettuare euristicamente la costruzione fino all'ordine 3.

Si è visto che è possibile determinare delle funzioni χ_1 , χ_2 e χ_3 in modo che i primi termini dello sviluppo di un integrale primo abbiano la forma

$$\begin{aligned} \Phi_1^{\mathcal{R}} &= L_{\chi_1} \Phi_0, & \Phi_1^{\mathcal{N}} &= 0 \\ \Phi_2^{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_1 + L_{\chi_2} \Phi_0, & \Phi_2^{\mathcal{N}} &= \frac{1}{2} \Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} \Phi_1 \\ \Phi_3^{\mathcal{R}} &= \frac{1}{3} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} \Phi_2 + \frac{2}{3} \Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_2} \Phi_1 + L_{\chi_3} \Phi_0. \end{aligned}$$

Si può sperare che $\Phi_3^{\mathcal{N}}$ possa determinarsi semplicemente sostituendo $\Pi_{\mathcal{R}}$ con $\Pi_{\mathcal{N}}$

nell'espressione di $\Phi_3^{\mathcal{R}}$, come si è verificato agli ordini precedenti. Si avrebbe così

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_{\chi_1} \Phi_0 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} L_{\chi_1} \Phi_1 + L_{\chi_2} \Phi_0 \\ \Phi_3 &= \frac{1}{3} L_{\chi_1} \Phi_2 + \frac{2}{3} L_{\chi_2} \Phi_1 + L_{\chi_3} \Phi_0 .\end{aligned}$$

Sperando che questo sia vero, diventa spontaneo congetturare la forma generale

$$(8.52) \quad \Phi_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} \Phi_{s-j} ,$$

che per $s = 1, 2, 3$ coincide le espressioni sopra riportate.

Accettando per il momento questa congettura, resta da determinare la successione χ_1, χ_2, \dots . A tal fine si può osservare che per $s = 1, 2$ si è sfruttato il fatto che H è un integrale primo, e ci si è ricondotti a risolvere un'equazione della forma generale

$$(8.53) \quad Z_s - L_{H_0} \chi_s = \Psi_s ,$$

ove Ψ_s è un termine noto, χ_s e Z_s sono le incognite, e Z_s è soggetta alla condizione $Z_s \in \mathcal{N}$. Che questa equazione ammetta sempre la soluzione

$$(8.54) \quad Z_s = \Pi_{\mathcal{N}} \Psi_s , \quad \chi_s = -L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} \Psi_s$$

lo si è già osservato, così come si è osservato che la presenza di Z_s è l'elemento essenziale che rimuove il problema della consistenza. Qui, si può notare che l'aggiunta a χ_s di un termine arbitrario $\tilde{\chi}_s \in \mathcal{N}$ può ben modificare, in linea di principio, il resto della costruzione, ma non sembra, allo stato attuale, influire sulla consistenza. Resterebbe da trovare la forma esplicita del termine noto Ψ_s , ma questo è parte della dimostrazione della correttezza del procedimento.

Si può dunque chiudere questa discussione enunciando la seguente *congettura*.

Ad un'Hamiltoniana della forma (8.14) si possono sempre associare due successioni di polinomi χ_1, χ_2, \dots e Z_0, Z_1, Z_2, \dots , con $Z_0 = H_0$, $\chi_s \in \mathcal{P}_{s+2}$ e $Z_s \in \mathcal{N}_{s+2}$, in modo che:

- i. per ogni $\Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$ esiste un integrale primo formale di H della forma $\Phi = \sum_{s \geq 0} \Phi_s$, dove Φ_s per $s > 0$ è definito in modo ricorsivo come

$$(8.55) \quad \Phi_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} \Phi_{s-j} ;$$

- ii. per ogni $s > 0$ le funzioni χ_s e Z_s sono soluzione di un'equazione della forma

$$(8.56) \quad Z_s - L_{H_0} \chi_s = \Psi_s ,$$

dove Ψ_s è una funzione nota e Z_s è soggetta alla sola condizione $Z_s \in \mathcal{N}$.

8.4 Costruzione indiretta degli integrali primi

È ora tempo di abbandonare le considerazioni euristiche, e di passare ad una dimostrazione della correttezza della congettura enunciata alla fine dell'ultimo paragrafo. La dimostrazione procede in due passi: in un primo tempo si mettono in evidenza le proprietà algebriche della trasformazione di funzioni definita dalla (8.56); in un secondo tempo si ricava la forma del termine noto Ψ_s che compare nella (8.53).

8.4.1 Un operatore sullo spazio delle serie formali

È comodo introdurre un operatore $T_\chi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ definito come segue: data una successione $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ di funzioni $\chi_s \in \mathcal{P}_{s+2}$ ed una qualunque $f \in \mathcal{P}$ si definisce formalmente

$$(8.57) \quad T_\chi f = f_0 + f_1 + \dots ,$$

dove

$$(8.58) \quad f_0 = f , \quad f_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} f_{s-j} \quad \text{per } s > 0 .$$

Questa definizione altro non è che la (8.52), generalizzata ad una qualunque funzione $f \in \mathcal{P}$, senza neppure richiedere che f sia omogenea. Le proprietà rilevanti al fine della discussione che segue sono raccolte nel

Lemma 8.17: *L'operatore T_χ definito dalle (8.57) e (8.58) è lineare ed invertibile, e conserva le parentesi di Poisson ed i prodotti, ossia*

$$T_\chi\{f, g\} = \{T_\chi f, T_\chi g\} , \quad T_\chi(fg) = (T_\chi f)(T_\chi g) .$$

Dimostrazione. Linearità: l'operatore T_χ è costruito mediante applicazioni successive di operatori lineari; la sua linearità si mostra facilmente per induzione.

Invertibilità: basta dimostrare che $T_\chi f = 0$ implica $f = 0$; questo è evidente dalla definizione.

Conservazione della parentesi di Poisson: questa proprietà richiede qualche calcolo. Estendendo la notazione usata nella definizione, si scrive

$$T_\chi\{f, g\} = \{f, g\}_0 + \{f, g\}_1 + \dots ;$$

basta allora dimostrare che per ogni $r \geq 0$ si ha

$$\{f, g\}_r = \sum_{l=0}^r \{f_l, g_{r-l}\} .$$

Per $r = 0$ questa è una banale identità; per $r > 0$ si procede induttivamente:

$$\{f, g\}_r = \sum_{j=1}^r \frac{j}{r} L_{\chi_j} \{f, g\}_{r-j} = \sum_{j=1}^r \sum_{l=0}^{r-j} \frac{j}{r} L_{\chi_j} \{f_l, g_{r-j-l}\}$$

(qui ho fatto uso prima della definizione di T_χ , e poi dell'ipotesi induttiva); procedendo con calcoli elementari si trasforma l'ultima espressione come segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^r \sum_{l=0}^{r-j} \frac{j}{r} \left(\{L_{\chi_j} f_{r-j-l}, g_l\} + \{f_l, L_{\chi_j} g_{r-j-l}\} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-l} \frac{j}{r} \left(\{L_{\chi_j} f_{r-j-l}, g_l\} + \{f_l, L_{\chi_j} g_{r-j-l}\} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{r-1} \frac{r-l}{r} (\{f_{r-l}, g_l\} + \{f_l, g_{r-l}\}) \\
&= \sum_{l=1}^r \frac{l}{r} \{f_l, g_{r-l}\} + \sum_{l=0}^{r-1} \frac{r-l}{r} \{f_l, g_{r-l}\} \\
&= \sum_{l=0}^r \{f_l, g_{r-l}\} ;
\end{aligned}$$

qualche dettaglio sui singoli passaggi: 1) si fa uso dell'identità di Jacobi e della simmetria degli indici $l, r-j-l$; 2) si scambiano le somme, osservando che $1 \leq j \leq r$, $0 \leq l \leq r-j$ è equivalente a $0 \leq l \leq r-1$, $1 \leq j \leq r-l$; 3) si usa la definizione (8.58); 4) nel primo termine della somma si scambiano gli indici l e $r-l$, cambiando in modo consistente gli estremi della somma; 5) si aggiungono i termini, comunque nulli, $l=0$ nella prima somma e $l=r$ nella seconda, e si fattorizza. La conservazione della parentesi di Poisson è così dimostrata.

Per la conservazione del prodotto si esegue esattamente lo stesso calcolo, sostituendo il prodotto alla parentesi di Poisson e la proprietà $L_\chi(fg) = (L_\chi f)g + f(L_\chi g)$ all'identità di Jacobi. Q.E.D.

Le proprietà dell'operatore T_χ consentono un'estensione naturale della struttura algebrica dello spazio \mathcal{P} e dei suoi sottospazi \mathcal{R}, \mathcal{N} e $\mathcal{N}^{(0)}$. Per effettuare tale estensione si definiscono i sottospazi $\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*, \mathcal{N}_*^{(0)}$ di \mathcal{P} definiti come

$$(8.59) \quad \mathcal{R}_* = T_\chi(\mathcal{R}), \quad \mathcal{N}_* = T_\chi(\mathcal{N}), \quad \mathcal{N}_*^{(0)} = T_\chi(\mathcal{N}^{(0)}) .$$

Questi sottospazi soddisfano proprietà analoghe a quelle dei sottospazi \mathcal{R}, \mathcal{N} e $\mathcal{N}^{(0)}$. Vale infatti il seguente:

Lemma 8.18: *I sottospazi $\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*, \mathcal{N}_*^{(0)}$ soddisfano le seguenti proprietà:*

- i. $\mathcal{R}_* \cap \mathcal{N}_* = \{0\}$, $\mathcal{R}_* \oplus \mathcal{N}_* = \mathcal{P}$;
- ii. in \mathcal{N}_* esistono $n + \dim \mathcal{M}_\omega$ funzioni indipendenti;
- iii. $\mathcal{N}_*^{(0)}$ è il commutante di \mathcal{N}_* , e in $\mathcal{N}_*^{(0)}$ esistono $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ funzioni indipendenti della forma $T_\chi \Phi^{(\alpha)}$, con $\Phi^{(\alpha)} = \sum_{l=1}^n \alpha_l (x_l^2 + y_l^2)/2$ e $\mathbb{R}^n \ni \alpha \perp \mathcal{M}_\omega$.

Dimostrazione. La prima proprietà è immediata conseguenza della linearità di T_χ ; il trasporto della dipendenza funzionale in \mathcal{P} richiede l'uso della conservazione

del prodotto, oltre che della linearità, e da qui seguono immediatamente la seconda e parte della terza; infine, che $\mathcal{N}_*^{(0)}$ sia il commutante di \mathcal{N}_* segue dalla conservazione della parentesi di Poisson. Q.E.D.

8.4.2 Esistenza e costruzione di integrali primi formali

Il risultato generale riguardante l'esistenza di integrali primi è stabilito dalla seguente

Proposizione 8.19: *Sia $H \in \mathcal{P}$ un'Hamiltoniana della forma (8.14). Allora H ammette sempre $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ integrali primi formali indipendenti ed in involuzione della forma (8.16), sviluppati a partire da $\Phi_0 = \sum_l \alpha_l (x_l^2 + y_l^2)/2$, dove $\alpha \in \mathbb{R}^n$ è un qualunque vettore ortogonale a \mathcal{M}_ω . Inoltre:*

- i. *se $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ l'Hamiltoniana può esprimersi come funzione degli n integrali primi indipendenti sviluppati a partire dalle azioni armoniche $I_l = (x_l^2 + y_l^2)/2$, $1 \leq l \leq n$;*
- ii. *se $\dim \mathcal{M}_\omega > 0$ esistono almeno $n - \dim \mathcal{M}_\omega + 1$ integrali primi formali indipendenti ed in involuzione;*
- iii. *i casi $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ e $\dim \mathcal{M}_\omega = 1$ sono formalmente integrabili.*

Alla dimostrazione conviene premettere il seguente

Lemma 8.20: *Per un'Hamiltoniana della forma (8.14) è sempre possibile determinare una successione di polinomi omogenei $\chi = \{\chi_s\}_{s \geq 1}$ ed una funzione $Z = \sum_{s \geq 0} Z_s$ con $\chi_s \in \mathcal{P}_{s+2}$ e $Z_s \in \mathcal{P}_{s+2}$ tali che si abbia $Z \in \mathcal{N}$ e $T_\chi Z = H$. La successione χ e la funzione Z sono determinate risolvendo ricorsivamente il sistema di equazioni*

$$(8.60) \quad Z_0 = H_0, \quad Z_s - L_{H_0} \chi_s = \Psi_s \quad \text{per } s > 0,$$

con Ψ_s definito come

$$(8.61) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= H_1, \\ \Psi_s &= H_s - \sum_{l=1}^{s-1} \frac{l}{s} L_{\chi_l} Z_{0,s-l} - \sum_{l=1}^{s-1} Z_{l,s-l} \quad \text{per } s > 1, \end{aligned}$$

e con $Z_{l,s-l}$ definito come

$$(8.62) \quad Z_{l,0} = Z_l, \quad Z_{l,s} = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} Z_{l,s-j}.$$

Inoltre, la successione χ è unica se si impone l'ulteriore condizione $\chi_s \in \mathcal{R}$ per $s \geq 1$.

Dimostrazione. Si considera l'equazione $T_\chi Z = H$ con le incognite Z e χ . Per la linearità dell'operatore T_χ si ottiene subito l'equazione

$$(8.63) \quad T_\chi Z_0 + T_\chi Z_1 + T_\chi Z_2 + \dots = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

Denotiamo

$$T_\chi Z_l = Z_{l,0} + Z_{l,1} + Z_{l,2} + \dots,$$

dove, secondo la definizione di T_χ , $Z_{l,s}$ è definito dalla (8.62). Eguagliando nella (8.63) i termini dello stesso grado si ottiene il sistema di equazioni

$$(8.64) \quad H_0 = Z_0, \quad H_s = \sum_{j=0}^s Z_{j,s-j} \quad \text{per } s > 0.$$

Per $s = 0$ si ottiene proprio la prima delle (8.60). Per $s = 1$ la seconda delle (8.64) si riduce a

$$H_1 = Z_{0,1} + Z_1,$$

sicché le (8.60)–(8.61) si ottengono da $Z_{0,1} = L_{\chi_1} Z_0 = L_{\chi_1} H_0 = -L_{H_0} \chi_1$. La soluzione si ottiene ponendo $Z_1 = \Pi_{\mathcal{N}} H_1$ e $\chi_1 = -L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} H_1$, ed è univocamente determinata a meno di un termine arbitrario $\tilde{\chi}_1 \in \mathcal{N}_3$. Per $s > 1$ si procede per induzione. Supponendo di aver determinato χ_r per $1 \leq r < s$, si isolano nella somma i termini $j = 0$ e $j = s$, e si riscrive la seconda delle (8.64) come

$$(8.65) \quad H_s = Z_{0,s} + \sum_{j=1}^{s-1} Z_{j,s-j} + Z_s.$$

Si osserva ora che il calcolo della somma richiede la conoscenza di Z_r e χ_r con $1 \leq r < s$, e dunque il risultato è noto. Si calcola poi

$$Z_{0,s} = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{l}{s} L_{\chi_l} Z_{0,s-l} + L_{\chi_s} Z_0;$$

Anche qui, la somma contiene termini noti, e l'incognita χ_s compare solo nell'ultimo termine $L_{\chi_s} Z_0 = -L_{H_0} \chi_s$. Per sostituzione nella (8.65) si ottiene

$$Z_s - L_{H_0} \chi_s = H_s - \sum_{l=1}^{s-1} \frac{l}{s} L_{\chi_l} Z_{0,s-l} - \sum_{l=1}^{s-1} Z_{l,s-l},$$

e questa non è altro che la (8.60), con Ψ_s definita come nella (8.61). La soluzione si ottiene ponendo $Z_s = \Pi_{\mathcal{N}} \Psi_s$ e $\chi_s = -L_{H_0}^{-1} \Pi_{\mathcal{R}} \Psi_s$, ed è univocamente determinata a meno di un termine arbitrario $\tilde{\chi}_s \in \mathcal{N}_s$. Questo completa l'induzione. *Q.E.D.*

Dimostrazione della proposizione 8.19. Per il lemma 8.20 esiste una successione χ ed una funzione $Z \in \mathcal{N}$ tali che $T_\chi Z = H$, quindi per definizione di \mathcal{N}_* si ha $H \in \mathcal{N}_*$. Ogni funzione $\Phi \in \mathcal{N}_*^{(0)}$ è in involuzione con H , per definizione di $\mathcal{N}_*^{(0)}$, e dunque è un integrale primo di H . Per il lemma 8.18, in $\mathcal{N}_*^{(0)}$ esistono $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ funzioni indipendenti, e quindi tanti sono gli integrali primi formali di H . Se $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ si ha $\mathcal{N}^{(0)} = \mathcal{N}$ (lemma 8.14), e dunque $Z \in \mathcal{N}^{(0)}$ può scriversi come serie di potenze nelle sole azioni; per le proprietà di T_χ , anche $H = T_\chi Z$ può scriversi come serie di potenze nelle n funzioni $\Phi^{(l)} = T_\chi I_l$, e quindi H è funzione degli integrali primi trovati, come asserito in i. In generale si ha $Z \in \mathcal{N}$, ma non $Z \in \mathcal{N}^{(0)}$, e dunque $H \in \mathcal{N}_*$ ma non $H \in \mathcal{N}_*^{(0)}$; in tal caso H non può esprimersi come funzione degli $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ integrali primi indipendenti in $\mathcal{N}_*^{(0)}$; nel caso eccezionale $H \in \mathcal{N}_*^{(0)}$ si

ha che qualunque funzione in \mathcal{N}_* è in involuzione con H , e quindi gli integrali primi indipendenti diventano ben $n + \dim \mathcal{M}_\omega$; questo dimostra l'asserzione ii. Per le prime due asserzioni, nei casi $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ e $\dim \mathcal{M}_\omega = 1$ esistono certamente n integrali primi indipendenti ed in involuzione, e basta applicare il teorema di Liouville; questo dimostra la iii. Q.E.D.

8.4.3 Una nota sul problema della consistenza della costruzione diretta

Il paragrafo 8.4.2 illustra una soluzione del problema della costruzione di integrali primi, e quindi, implicitamente, supera il problema di come risolvere in modo consistente il sistema di equazioni (8.17). Si può però osservare che la costruzione è *indiretta*: in realtà, non si risolve il sistema (8.17) per costruire un integrale primo $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$, ma il sistema (8.60) per costruire la successione χ e la funzione Z , e poi, tramite χ , si costruisce una funzione $T_\chi \Phi_0$ che è soluzione delle (8.17). Il problema della consistenza è stato dunque aggirato.

È spontaneo chiedersi se non si possa effettuare la costruzione risolvendo direttamente il sistema (8.17), così come si è fatto nel caso non risonante e reversibile. Benché questo non sia particolarmente importante ai fini dello sviluppo teorico, può tuttavia avere un'utilità pratica non trascurabile se si vuol procedere ad una costruzione *esplicita* degli integrali primi.¹⁸

La prima osservazione che si può fare è che la proposizione 8.19 mostra che *esiste una scelta dei termini arbitrari in \mathcal{N} che rende consistente la costruzione di integrali primi tramite le (8.17)*; però le stesse equazioni non contengono nessuna indicazione immediata su quali siano questi termini da aggiungere, e sembra essere necessario ricorrere ad informazioni ausiliarie,¹⁹ ad esempio la conoscenza della successione χ . Il solo sospetto che può nascere, alla luce dei risultati del paragrafo 8.3.1 nel caso non risonante e reversibile, è che in realtà tutto diventi automaticamente consistente semplicemente ignorando i termini arbitrari. Nel resto di questo paragrafo mostrerò che questo è vero per il caso non risonante, anche rimuovendo l'ipotesi di reversibilità, ma certamente non lo è per il caso risonante.

Per indagare ulteriormente il problema conviene introdurre, accanto ai sottospazi

¹⁸ Non è in gioco la possibilità di svolgere effettivamente il calcolo, perché il procedimento indiretto è costruttivo così come quello diretto, ma il tempo necessario per svolgerlo: per farsene un'idea, si provi a valutare il numero di parentesi di Poisson da calcolarsi con i due diversi metodi, ed il vantaggio del metodo diretto risulterà immediatamente evidente.

¹⁹ A rigore, resta la possibilità di procedere per determinazione dei singoli coefficienti dello sviluppo lasciando indeterminati, ad un certo ordine s , quelli corrispondenti ai termini di \mathcal{N} , e poi determinarli, quando se ne presenta la necessità, per rendere consistente l'equazione ad un ordine $s' > s$. In effetti, questo è proprio il metodo suggerito da Cherry, ed utilizzato esplicitamente da Contopoulos su alcuni modelli. Dal punto di vista costruttivo il metodo funziona (se ne può trovare una descrizione dettagliata in [21] e [22]) ma richiede di riesaminare continuamente gli ordini precedenti, e questo vanifica i vantaggi, in termini di tempo e di semplicità, della costruzione diretta.

\mathcal{R} , \mathcal{N} e $\mathcal{N}^{(0)}$ di \mathcal{P} , anche il sottospazio $\mathcal{R}^{(0)}$ univocamente definito dalla relazione $\mathcal{R}^{(0)} \oplus \mathcal{N}^{(0)} = \mathcal{P}$; è chiaro che se $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ allora $\mathcal{R}^{(0)}$ coincide con \mathcal{R} , altrimenti $\mathcal{R}^{(0)}$ sarà un sottinsieme proprio di \mathcal{R} . Si mostra facilmente che ad ogni $\Phi_0 \in \mathcal{N}^{(0)}$ corrisponde un unico integrale primo Φ soddisfacente la condizione $\Phi - \Phi_0 \in \mathcal{R}^{(0)}$ (si noti l'analogia col lemma 8.12). Per rendersene conto, si cominci col considerare $\Phi = T_\chi \Phi_0 = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$; in generale Φ_1 avrà una componente non nulla in $\mathcal{N}^{(0)}$. Denotando con $\tilde{\Phi}_1$ tale componente, si sostituisca Φ con $\Phi' = \Phi - T_\chi \tilde{\Phi}_1$; il problema si sposta così all'ordine 2, e procedendo in questo modo ordine per ordine si costruisce l'integrale primo cercato.

Nel caso non risonante, $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$, questo significa che qualunque sia la scelta di $\Phi_0 \in \mathcal{N}_k$, polinomio omogeneo, si può sempre costruire un integrale primo della forma $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$ soddisfacente l'ulteriore condizione $\Phi_j \in \mathcal{R}$ per $j \geq 1$. Dunque nel caso non risonante si può sempre risolvere il sistema di equazioni (8.17) con qualunque scelta dei termini arbitrari da aggiungere a ciascun ordine, in particolare non aggiungendo nulla. Questo mostra che in tutto il paragrafo 8.3.1 si può rimuovere l'ipotesi di reversibilità della proposizione 8.8.

Nel caso risonante, $\dim \mathcal{M}_\omega > 0$, la situazione è più delicata: non è difficile vedere che la condizione $\Phi - \Phi_0 \in \mathcal{R}^{(0)}$ non può restringersi ulteriormente a $\Phi - \Phi_0 \in \mathcal{R}$, sicché l'aggiunta di termini in \mathcal{N} sembra essere essenziale per risolvere il sistema (8.17). Si potrebbe solo sperare in qualche meccanismo miracoloso, ed ignoto, di cancellazione, ma il controesempio che segue mostra che questo non può accadere, in generale. Si consideri un'Hamiltoniana non risonante; si ha certamente $H_1 \in \mathcal{R}$, perché \mathcal{N} , essendo formato da funzioni delle sole azioni, non può contenere termini di grado dispari. Si costruisca ora $T_\chi H_0 = H_0 + L_{\chi_1} H_0 + \frac{1}{2} L_{\chi_1}^2 H_0 + L_{\chi_2} H_0 + \dots$. I primi termini arbitrari compaiono all'ordine 2, e precisamente in $\Pi_{\mathcal{N}} L_{\chi_1} H_1$. Nel caso non risonante questo non rappresenta un problema, perché trattandosi di termini in $\mathcal{N}^{(0)}$ potrebbero comunque essere rimossi. Si consideri invece $\Pi_{\mathcal{R}} L_{\chi_1} H_1$: in generale questo termine non sarà nullo. Per accertarsene senza alcun dubbio basta scrivere, genericamente,

$$H_1 = \sum_{j,k} c_{jk} \xi^j \eta^k$$

(in variabili complesse) e calcolare di conseguenza

$$\chi_1 = - \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{i \langle (k-j), \omega \rangle} \xi^j \eta^k ;$$

si trova così

$$L_{\chi_1} H_1 = \sum_{j,k,j',k'} \sum_{l=1}^n \frac{(j_l k'_l - j'_l k_l) c_{jk} c_{j'k'}}{i \langle (j-k), \omega \rangle} \cdot \frac{\xi^{j+j'} \eta^{k+k'}}{\xi_l \eta_l} .$$

È evidente che una scelta opportuna dei coefficienti c_{jk} in H_1 consentirà di trovare nell'ultima espressione un monomio $\xi^{j+j'} \eta^{k+k'}$ con $j + j' \neq k + k'$ il cui coefficiente non sia nullo. Se ora si cambiano le frequenze ω in modo che compaia una risonanza di ordine 4 si potrà certamente fare in modo che quel monomio sia in \mathcal{N} , ma non in

$\mathcal{N}^{(0)}$. Questo monomio non sarà dunque eliminabile senza ledere la consistenza del procedimento (Non si può invocare la possibile cancellazione con un termine di H_2 , perché non si sono fatte ipotesi su H_2). Se ne conclude che l'aggiunta di termini in \mathcal{N} è vitale per la consistenza della costruzione, e pertanto nel caso risonante il ricorso ad un metodo indiretto per la costruzione di integrali primi è praticamente inevitabile.

8.5 Studio quantitativo degli integrali primi nell'intorno di un punto ellittico.

Veniamo ora allo studio quantitativo della serie ottenute mediante la costruzione diretta di integrali primi per l'Hamiltoniana nell'intorno di un equilibrio ellittico. Benché non si tratti del caso generale, lo studio è ugualmente interessante, perché consente di ottenere risultati significativi pur facendo uso di pochi strumenti tecnici. Lo schema formale è quello discusso nel paragrafo 8.3.1, ricordando che nel caso di frequenze non risonanti la consistenza della costruzione è sempre assicurata, come ho mostrato nel paragrafo 8.4.3. Lo scopo che mi prefiggo qui è di completare quello schema mediante uno studio quantitativo.

8.5.1 Il contesto analitico.

Questo paragrafo ha lo scopo di introdurre dei domini e delle norme che consentono di studiare le proprietà analitiche degli integrali primi troncati. Gli elementi rilevanti sono:

- i. l'introduzione di domini in \mathbb{R}^{2n} adattati alla dinamica del sistema in studio, ossia un sistema di oscillatori perturbati;
- ii. l'introduzione di una norma opportuna sugli spazi \mathcal{P}_s dei polinomi omogenei;
- iii. l'uso della norma per limitare superiormente le funzioni scrivibili come somme di polinomi, o eventualmente come serie formali.

Per introdurre i domini è conveniente ricordare che per il sistema di oscillatori armonici disaccoppiati

$$(8.66) \quad H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_l \omega_l (x_l^2 + y_l^2)$$

la proiezione dell'orbita su ciascuno dei piani x_l, y_l è una circonferenza. Si procede poi come segue. Fissato un vettore $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^n$, con componenti positive, ed un parametro reale $\varrho > 0$ si definisce

$$(8.67) \quad \Delta_{\varrho R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x_l^2 + y_l^2 \leq \varrho^2 R_l^2, 1 \leq l \leq n\}$$

Si tratta, come si vede, del prodotto di n dischi di raggi $\varrho R_1, \dots, \varrho R_n$ positivi nei piani di ciascuno degli oscillatori²⁰.

²⁰ Può essere opportuno insistere ancora brevemente sulla motivazione di questa scelta. Nello studio della stabilità di un punto di equilibrio si cerca tipicamente di confinare l'orbita in un opportuno dominio che contenga il punto stesso. Se si considera

Per quanto riguarda l'introduzione della norma, si comincia con lo scrivere un polinomio omogeneo $f \in \mathcal{P}_s$ nella forma

$$(8.68) \quad f(x, y) = \sum_{|j+k|=s} f_{jk} x^j y^k$$

con $f_{jk} \equiv f_{j_1, \dots, j_n, k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{R}$, e $x^j y^k = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$. Si definisce allora la norma, parametrizzata da R ,

$$(8.69) \quad \|f\|_R = \sum_{j,k} |f_{jk}| R^{j+k}$$

con $R^{j+k} = R_1^{j_1+k_1} \dots R_n^{j_n+k_n}$. Si noti che, essendo $f \in \mathcal{P}_s$, la norma è sempre definita, perché nella somma compare un numero finito di termini. Inoltre, la definizione ha senso anche se $(x, y) \in \mathbb{C}^{2n}$ e $f_{jk} \in \mathbb{C}$.

È facile verificare che si ha

$$(8.70) \quad |f(x, y)| \leq \varrho^s \|f\|_R \quad \forall (x, y) \in \Delta_{\varrho R};$$

quindi la norma (8.69) permette di stimare facilmente il massimo di qualunque polinomio $f \in \mathcal{P}_s$ nel dominio $\Delta_{\varrho R}$, con $\varrho > 0$ arbitrario.²¹ Se invece si ha a che fare con una serie formale $f = \sum_{s \geq 0} f_s$, con $f_s \in \mathcal{P}_s$, e si suppone che siano note le norme $\|f_s\|_R$, o almeno delle maggiorazioni, per $s \geq 0$, lo studio della convergenza assoluta della serie si riconduce a quello della serie di potenze $\sum_{s \geq 0} \varrho^s \|f_s\|_R$. Di questo farò uso in seguito.

8.5.2 Richiamo dello schema formale.

Se si ripercorre lo schema formale del paragrafo 8.2 per la costruzione di un integrale primo si vede che si può applicare lo schema seguente.

i. Partendo dall'Hamiltoniana

$$(8.71) \quad H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y) + \dots, \quad H_s \in \mathcal{P}_{s+2},$$

l'Hamiltoniana (8.66), si vede subito che, se all'istante $t = 0$ si ha $(x(0), y(0)) \in \Delta_{\varrho R}$ per una opportuna scelta di ϱ, R , si ha anche $(x(t), y(t)) \in \Delta_{\varrho R}$ per qualunque t . In questo senso la scelta del dominio è adattata al sistema imperturbato.

²¹ La (8.70) consente di far uso della norma (8.69) per maggiorare la norma uniforme

$$|f|_{\varrho R} = \sup_{(x,y) \in \Delta_{\varrho R}} |f(x, y)|,$$

che sembrerebbe più naturale. I motivi della scelta fatta qui sono diversi, ma può valere la pena di metterne in evidenza due. Il primo è che alcune stime tecniche risultano migliori (ad esempio, quella riguardante l'inversione dell'operatore L_{H_0}). Il secondo motivo, è che in un eventuale calcolo diretto degli integrali primi, ovviamente troncati, il calcolo della norma $\|f\|_R$ è elementare, mentre quello di $|f|_{\varrho R}$ creerebbe maggiori difficoltà.

con

$$(8.72) \quad H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_l \omega_l (x_l^2 + y_l^2)$$

si effettua la trasformazione a variabili complesse

$$(8.73) \quad x_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_l + i\eta_l), \quad y_l = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi_l - i\eta_l), \quad 1 \leq l \leq n$$

ii. Detta

$$(8.74) \quad I_l = \frac{1}{2}(x_l^2 + y_l^2) = i\xi_l\eta_l, \quad 1 \leq l \leq n$$

l'azione di uno qualunque degli oscillatori, si pone $\Phi_0 = I_l$, e si determina l'integrale primo $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$, con $\Phi_s = \mathcal{P}_{s+2}$, risolvendo ricorsivamente il sistema

$$(8.75) \quad L_{H_0}\Phi_s = \Psi_s, \quad s \geq 1$$

con

$$(8.76) \quad \Psi_s = \sum_{j=1}^{s-1} \{\Phi_j, H_{s-j}\} + \{I_l, H_s\};$$

la soluzione si rende unica imponendo la condizione

$$(8.77) \quad \Phi_s \in \mathcal{R}, \quad s \geq 1,$$

dove \mathcal{R} è il range dell'operatore L_{H_0} (paragrafo 8.2.2).

iii. Si effettua su Φ la trasformazione, inversa delle (8.73),

$$(8.78) \quad \xi_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l - iy_l), \quad \eta_l = \frac{i}{\sqrt{2}}(x_l + iy_l),$$

per tornare a variabili reali.

Per sviluppare una teoria quantitativa occorre dedurre da questo schema formale uno schema di stime sulle norme dei vari termini Φ_1, Φ_2, \dots dallo sviluppo dell'integrale primo. A questo scopo servono i lemmi tecnici del prossimo paragrafo. Prima però è necessario esaminare in maggior dettaglio il problema dei piccoli denominatori, che si presenta nel risolvere l'equazione (8.75).

Ricordando che in variabili complesse ξ, η l'operatore L_{H_0} è in forma diagonale (lemma 8.6), si vede subito che se si scrive Ψ nella forma

$$(8.79) \quad \Psi_s = i \sum_{j,k} c_{jk} \xi^j \eta^k,$$

con coefficienti c_{jk} noti, allora la soluzione $\Phi_s \in \mathcal{R}$ della (8.75) è

$$(8.80) \quad \Phi_s = \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{\langle (k-j), \omega \rangle} \xi^j \eta^k,$$

con $k \neq j$. Si nota però anche che all'ordine s si ha $|k - j| \equiv s \pmod{2}$. Quindi si può assumere che esista una successione $\{\alpha_s\}_{s \geq 2}$ di numeri reali positivi tali che si abbia

$$(8.81) \quad |\langle k, \omega \rangle| \geq \alpha_s \quad \text{per} \quad 0 < |k| \leq s, \quad |k| \equiv s \pmod{2}$$

Un'espressione analitica per questa successione, tenuto conto della discussione del paragrafo C.1, può essere

$$\alpha_s = \gamma(s+2)^{-\tau}, \quad \gamma > 0, \quad \tau > n-1;$$

in questo caso restano da determinare solo le costanti γ e τ . Nel caso in cui le frequenze siano assegnate però tale determinazione non è agevole, salvo nel caso di due gradi di libertà. Un modo più diretto consiste nel calcolare esplicitamente, al calcolatore, la successione (8.81); ciò è possibile, in linea di principio, se si decide comunque di fermarsi ad ordine finito.

8.5.3 Espressione del resto.

Supponiamo ora di aver costruito, col procedimento formale illustrato, un integrale primo troncato ad ordine r fissato (e quindi approssimato), che denoterò con

$$\Phi^{(r)} = \Phi_0 + \dots + \Phi_r.$$

Dal momento che non si tratta di un integrale primo esatto, sarà utile avere un'espressione per la derivata temporale $\dot{\Phi}^{(r)}$, che verrà chiamata brevemente *resto*.

Ricordando che è

$$\dot{\Phi}^{(r)} = \{\Phi^{(r)}, H\},$$

e che la costruzione di $\Phi^{(r)}$ si effettua proprio in modo da cancellare tutti i termini fino all'ordine r (o di grado $r+2$) nel membro di destra, si ricava facilmente l'espressione esplicita

$$(8.82) \quad \dot{\Phi}^{(r)} = \sum_{j=1}^r \sum_{s>r} \{\Phi_j, H_{s-j}\} + \sum_{s>r} \{I_l, H_s\}.$$

Riordinando i termini si ottiene l'espressione formalmente equivalente, ma più comoda per le stime analitiche,

$$(8.83) \quad \dot{\Phi}^{(l,r)} = \sum_{s>r} Q_s^{(l)},$$

con $Q_s^{(l)}$ definito come

$$(8.84) \quad Q_s^{(l)} = \sum_{j=1}^r \left\{ \Phi_j^{(l)}, H_{s-j} \right\} + \{I_l, H_s\}$$

8.5.4 *Stime tecniche generali.*

Questo paragrafo riporta alcuni lemmi tecnici necessari per ottenere stime quantitative.

Il primo lemma tiene conto del fatto che la norma $\|\cdot\|_R$ definita dalla (8.69) non è invariante per trasformazioni di coordinate.

Lemma 8.21: *Sia $f(x, y) \in \mathcal{P}_s$, e sia $f'(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_s$ il trasformato di f in variabili complesse mediante le (8.73). Allora si ha*

$$\|f'\|_R \leq 2^{s/2} \|f\|_R$$

Analogamente, sia $g'(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_s$, e sia $g(x, y) \in \mathcal{P}_s$ il trasformato di g' mediante la (8.78). Allora si ha

$$\|g\|_R \leq 2^{s/2} \|g'\|_R.$$

Dimostrazione. Si scriva $f(x, y) = \sum_{|j+k|=s} f_{jk} x^j y^k$, e si trasformi. Si otterrà

$$f'(\xi, \eta) = \sum_{j,k} i^{|k|} 2^{-s/2} f_{jk} (\xi + i\eta)^j (\xi - i\eta)^k$$

Sviluppando le parentesi, si vede che ciascun addendo della somma ne genera 2^s , perché ciascuno contiene s prodotti di espressioni della forma $\xi_l \pm i\eta_l$. Ignorando le cancellazioni (del resto imprevedibili), il calcolo della norma dà dunque

$$\|f'\|_R \leq 2^s \sum_{j,k} 2^{-s/2} |f_{jk}| R^{j+k}$$

e quindi l'asserto. Il calcolo per g, g' è analogo.

Q.E.D.

Il secondo lemma riguarda la parentesi di Poisson, necessaria per determinare il termine noto della (8.75).

Lemma 8.22: *Siano $f \in \mathcal{P}_s, g \in \mathcal{P}_r$. Allora si ha*

$$\|\{f, g\}\|_R \leq sr\Lambda^2 \|f\|_R \|g\|_R,$$

dove

$$(8.85) \quad \Lambda = \frac{1}{\min_l R_l};$$

La disuguaglianza vale sia in variabili reali che complesse.

Dimostrazione. Si scriva $f = \sum_{j,k} f_{jk} x^j y^k$ e $g = \sum_{j',k'} g_{j'k'} x^{j'} y^{k'}$. Si verifica subito che si ha

$$\{f, g\} = \sum_{j,k,j',k'} f_{jk} g_{j'k'} x^{j+j'} y^{k+k'} \sum_{l=1}^n \frac{j_l k'_l - j'_l k_l}{x_l y_l}.$$

Evitando di sviluppare e risommare, si può sovrastimare la norma come

$$\begin{aligned} \|\{f, g\}\|_R &\leq \sum_{j,k,j',k'} |f_{jk}| |g_{j'k'}| R^{j+j'+k+k'} \sum_{l=1}^n \frac{|j_l k'_l - j'_l k_l|}{R_l^2} \\ &\leq \Lambda^2 \sum_{jk} |f_{jk}| R^{j+k} \sum_{j'k'} |g_{j'k'}| R^{j'+k'} \sum_{l=1}^n |j_l k'_l - j'_l k_l|. \end{aligned}$$

Ricordando che $|j+k| = s$ e $|j'+k'| = r$, sicché $|j'_l| \leq r$, $|k'_l| \leq r$, si stima

$$\sum_{l=1}^n |j_l k'_l - j'_l k_l| \leq r \sum_{l=1}^n |j_l + k_l| = sr.$$

Sostituendo nella disuguaglianza precedente si ottiene

$$\|\{f, g\}\|_R \leq sr \Lambda^2 \left(\sum_{jk} |f_{jk}| R^{j+k} \right) \left(\sum_{j'k'} |g_{j'k'}| R^{j'+k'} \right),$$

da cui segue facilmente l'asserto. Q.E.D.

Nel caso di parentesi di Poisson con una delle azioni $I_l = (x_l^2 + y_l^2)/2$ si ha una stima migliore.

Lemma 8.23: *Sia $f \in \mathcal{P}_s$. Allora si ha*

$$\|\{I_l, f\}\|_R \leq s \|f\|_R,$$

sia in variabili reali che complesse.

Dimostrazione. In variabili reali si ha

$$\{I_l, f\} = \sum_{jk} \left(k_l \frac{x_l}{y_l} - j_l \frac{y_l}{x_l} \right) f_{jk} x^j y^k,$$

e quindi la norma si stima

$$\|\{I_l, f\}\|_R \leq \sum_{j,k} |k_l + j_l| |f_{jk}| R^{j+k} \leq s \sum_{jk} |f_{jk}| R^{j+k};$$

l'asserto segue immediatamente. In variabili complesse si ha $I_l = i \xi_l \eta_l$, e si calcola

$$\{I_l, f\} = i \sum_{j,k} (k_l - j_l) f_{jk} \xi^j \eta^k;$$

si stima subito

$$\|\{I_l, f\}\|_R \leq \sum_{j,k} |k_l - j_l| |f_{jk}| R^{j+k} \leq s \sum_{j,k} |f_{jk}| R^{j+k},$$

da cui segue l'asserto. Q.E.D.

Occorre ora dare una stima dell'inversione dell'operatore L_{H_0} che compare nella stessa equazione.

Lemma 8.24: *Assegnata la successione $\{\alpha_s\}_{s \geq 1}$ soddisfacente la condizione (8.81), la soluzione della (8.75), resa unica con la condizione $\Phi_s \in \mathcal{R}$, è stimata da*

$$\|\Phi_s\|_R \leq \frac{1}{\alpha_s} \|\Psi_s\|_R .$$

Dimostrazione. La soluzione ha la forma (8.80), e si ottiene dividendo ciascun coefficiente c_{jk} dello sviluppo di Ψ_s in variabili complesse per il corrispondente piccolo divisore $\langle k - j, \omega \rangle$. Per come è definita la successione $\{\alpha_s\}_{s \geq 1}$, i coefficienti dello sviluppo di Φ_s sono maggiorati da $|c_{jk}|/\alpha_s$, e da qui segue l'asserto. *Q.E.D.*

Grazie agli ultimi due lemmi, si può ora ricavare una stima ricorsiva per i termini Φ_s dell'integrale primo, basandosi sul sistema di equazioni (8.75) e (8.76).

8.5.5 Un caso particolarmente semplice

Lo schema di migliorazioni necessario per trattare il caso generale è abbastanza complesso. Per questa ragione premetto la discussione di un caso particolare che si può trattare in modo sostanzialmente semplice. Il lettore che abbia compreso il procedimento da seguire in questo caso si renderà conto che il calcolo completo, svolto nei paragrafi successivi, introduce un certo numero di difficoltà tecniche ma non richiede nessun concetto nuovo.

Restringiamo la nostra attenzione ad un'Hamiltoniana della forma

$$(8.86) \quad H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y) ,$$

con

$$(8.87) \quad H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (x_l^2 + y_l^2) .$$

A differenza del caso generale qui il contributo perturbativo si limita ad un polinomio omogeneo di terzo grado. Assumiamo poi che le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_n$ soddisfino la *condizione diofantea*²²

$$(8.88) \quad |\langle k, \omega \rangle| \geq \alpha_s \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}^n \quad , \quad 0 < |k| \leq s + 2 .$$

Dunque possiamo costruire lo sviluppo formale degli integrali primi $\Phi^{(l)}(x, y) = I_l + \Phi_1^{(l)} + \dots$, $1 \leq l \leq n$, con $I_l = \frac{1}{2}(x_l^2 + y_l^2)$. Supponiamo anche che le serie così costruite soddisfino la condizione $\Phi_s^{(l)} \in \mathcal{R}$ per $s \geq 1$, sicché il procedimento costruttivo è univoco.

Passiamo ora alla parte quantitativa. L'equazione da risolversi ad ogni ordine dello sviluppo si riduce a

$$(8.89) \quad \{H_0, \Phi_s^{(l)}\} = \Psi_s^{(l)} ,$$

²² Tale condizione è soddisfatta dalla maggioranza delle frequenze, nel senso della misura. Si veda a questo proposito l'appendice C.

con

$$(8.90) \quad \Psi_s^{(l)} = \begin{cases} -\{H_1, I_l\} & \text{per } s = 1 \\ -\{H_1, \Phi_{s-1}^{(l)}\} & \text{per } s > 1 \end{cases}$$

Mi propongo di trasformare questo sistema ricorsivo di equazioni in uno scheme di stime ricorsive per le norme delle funzioni $\Phi_s^{(l)}$ e $\Psi_s^{(l)}$. A tal fine si fa uso dei lemmi 8.26–8.26 procedendo nel modo seguente. Assumiamo che in variabili reali valga $\|H_3\| \leq E$; la costnte E si calcola facilmente se si conosce l'espressione esplicita dell'Hamiltoniana. Dalle formule ricorsive (8.89) e (8.90) abbiamo le stime

$$(8.91) \quad \|\Psi_s^{(l)}\| \leq A_s, \quad \|\Phi_s^{(l)}\| \leq \frac{A_s}{\alpha_s}, \quad s \geq 1,$$

dove $\{A_s\}_{s \geq 1}$ è la successione di numeri reali definita come

$$(8.92) \quad \begin{aligned} A_1 &= 24E \\ A_s &= 12E(12\Lambda^2 E)^{s-1} \frac{(s+1)!}{\prod_{l=1}^{s-1} \alpha_l}, \quad s \geq 1. \end{aligned}$$

Infatti per $s = 1$ basta applicare il lemma 8.23. Per $s > 1$ si procede per ricorrenza assumendo che la (8.91) valga fino ad $s - 1$ ed applicando il lemma 8.22, e si trova

$$\|\Psi_s^{(l)}\| = \|\{H_1, \Phi_{s-1}^{(l)}\}\| \leq 3(s+1)\Lambda^2 \mathcal{E} A_{s-1} / \alpha_{s-1} = A_s$$

avendo posto $\mathcal{E} = 2^{3/2}E$ per tener conto della trasformazione di H_1 a variabili complesse. Da qui, per il lemma 8.24, si ottiene $\|\Phi_s^{(l)}\| \leq A_s / \alpha_s$, che è quanto affermato. I fattori numerici tengono conto della trasformazione a variabili complesse da effettuarsi all'inizio del procedimento e della trasformazione a variabili reali da effettuarsi alla fine.

Venendo poi all'espressione del resto per un integrale primo troncato la (8.83) si riduce in questo caso a $\dot{\Phi}^{(l,r)} = \{\Phi_r^{(l)}, H_1\}$, e si ha

$$\|\{\Phi_r^{(l)}, H_1\}\|_R \leq 12E(12\Lambda^2 E)^r \frac{(r+2)!}{\alpha_1 \cdots \alpha_r}.$$

A questo punto il lettore che volesse evitare i calcoli tecnici necessari per trattare il caso generale potrà saltare direttamente agli enunciati del lemma 8.27 e del corollario 8.30, per passare poi alle stime di stabilità esponenziale del paragrafo 8.6.2.

8.5.6 Lo schema quantitativo per il caso generale

I lemmi sulla parentesi di Poisson consentono di stimare la norma del membro di destra, Ψ_s , nell'equazione (8.75).

Lemma 8.25: *Sia, in variabili complesse, $\|H_j\|_R \leq D_j$, dove $\{D_j\}_{j \geq 1}$ è una successione di numeri reali non negativi. Allora i polinomi Ψ_s e Φ_s generati dal sistema di equazioni (8.75) e (8.76) sono stimati, in variabili complesse, da*

$$\|\Psi_s\|_R \leq \alpha_s B_s, \quad \|\Phi_s\|_R \leq B_s, \quad s \geq 1$$

dove $\{B_s\}_{s \geq 1}$ è una successione definita ricorsivamente da

$$B_1 = \frac{3D_1}{\alpha_1}$$

$$B_s = \frac{\Lambda^2}{\alpha_s} \sum_{j=1}^{s-1} (j+2)(s-j+2)D_j B_{s-j} + \frac{(s+2)}{\alpha_s} D_s ,$$

e $\{\alpha_s\}_{s \geq 1}$ è una successione soddisfacente la condizione (8.81).

Dimostrazione. Per $s = 1$, dalla (8.76) e dal lemma 8.23 si ricava $\|\Psi_1\|_R \leq 3D_1$, e la stima per Φ_1 segue dal lemma 8.24. Per induzione, supponendo che le stime trovate valgono fino a $s - 1$, si applicano i lemmi 8.22 e 8.23 all'espressione (8.76) di Ψ_s , e si ottiene

$$\|\Psi_s\|_R \leq \sum_{j=1}^{s-1} (j+2)(s-j+2)\Lambda^2 D_j B_{s-j} + (s+2)D_s ;$$

il secondo membro, diviso per α_s , altro non è che l'espressione di B_s , sicché dal lemma 8.24 segue l'asserto. Q.E.D.

Da ultimo, è utile ricavare anche una stima ricorsiva per l'espressione del resto, data dalle (8.83) e (8.84). Assumendo di aver già determinato le norme dei termini $\Phi_1 \dots \Phi_r$ dell'integrale primo troncato, si ha il seguente

Lemma 8.26: *Sia, in variabili reali, $\|H_s\|_R \leq C_s$ per $s \geq 1$ e $\|\Phi_s\|_R \leq A_s$ per $1 \leq s \leq r$, con $\{C_s\}_{s \geq 1}$ e $\{A_s\}_{1 \leq s \leq r}$ successioni di numeri reali non negativi. Allora per i polinomi Q_s definiti dalle (8.84) vale la stima*

$$\|Q_s\|_R \leq \Lambda^2 \sum_{j=1}^r (j+2)(s-j+2)A_j C_{s-j} + (s+2)C_s, \quad s > r .$$

La dimostrazione richiede solo l'applicazione dei lemmi 8.22 e 8.23, ed è lasciata al lettore.

8.6 Stabilità su tempi esponenzialmente lunghi

Le stime ricorsive ricavate nei lemmi 8.25 e 8.26 verranno usate più avanti per un calcolo numerico esplicito, ma non sono molto comode per valutare con strumenti analitici l'utilità degli integrali primi troncati. A questo scopo, è necessario semplificare le stime. Il modo più semplice consiste nel sostituire le numerose costanti che compaiono negli enunciati dei lemmi con espressioni che coinvolgano un numero minimo di costanti. Precisamente:

- i. Si assume che le norme dell'Hamiltoniana soddisfino la condizione ²³

$$(8.93) \quad \|H_s\| \leq h^{s-1} E ,$$

²³ Questa condizione non è particolarmente pesante: se H è analitica in un dominio $\Delta_{\varrho^* R}$ è sempre possibile trovare due costanti h, E tali che la (8.93) sia soddisfatta.

- con due costanti reali $E > 0$ e $h \geq 0$;
 ii. per i piccoli denominatori si assume

$$(8.94) \quad \alpha_s = \gamma(s+2)^{-\tau}$$

con due costanti reali $\gamma > 0$ e $\tau > n - 1$.

Assumendo valide queste ipotesi, si inizia col fissare in modo arbitrario un ordine r a cui vengono troncati gli sviluppi degli integrali primi. In un secondo tempo si adatta la scelta dell'ordine r di troncamento ai dati iniziali, in modo da eliminare dalle stime tutti gli elementi arbitrari. Il risultato di questo procedimento è che, nonostante la non convergenza, *gli integrali primi troncati descrivono in modo attendibile il comportamento del sistema per un intervallo di tempo che cresce esponenzialmente con l'inverso del parametro ϱ che controlla la grandezza del dominio contenente i dati iniziali.*

8.6.1 Stime analitiche dipendenti dall'ordine di troncamento

Con le ipotesi enunciate sopra si dimostra anzitutto il

Lemma 8.27: *Con l'ipotesi (8.93), le norme dei polinomi Ψ_s e Φ_s determinati ricorsivamente dalle equazioni (8.75) sono stimate, in variabili reali, da*

$$(8.95) \quad \|\Psi_s\|_R \leq A_s, \quad \|\Phi_s\|_R \leq \frac{A_s}{\alpha_s}, \quad s \geq 1$$

dove la successione $\{A_s\}_{s \geq 1}$ è definita come

$$(8.96) \quad A_1 = 24E$$

$$A_s = 12E \left[12\Lambda^2 E + \frac{8}{9} \max(\alpha_1, \alpha_2) \right]^{s-1} \frac{(s+1)!}{\prod_{l=1}^{s-1} \alpha_l}.$$

Con l'ulteriore ipotesi (8.94) si ha inoltre la stima per Φ_s

$$(8.97) \quad \|\Phi_s\|_R \leq \frac{3E}{2^{\tau-2}\gamma(s+2)} \cdot \frac{[(s+2)!]^{\tau+1}}{\varrho_*^{s-1}},$$

dove

$$(8.98) \quad \varrho_* = \frac{\gamma}{4} \left(3\Lambda^2 E + \frac{2h\gamma}{3^{\tau+2}} \right)^{-1}.$$

Dimostrazione. Seguendo lo schema formale del paragrafo 8.5.2, si comincia col trasformare l'Hamiltoniana in variabili complesse, sicché, per il lemma 8.21, vale l'ipotesi del lemma 8.25 con $D_j = \beta^{j-1}\mathcal{E}$, ove $\beta = 2^{1/2}h$ e $\mathcal{E} = 2^{3/2}E$. Sostituendo nella successione $\{B_s\}_{s \geq 1}$ del lemma 8.25 si ricava

$$B_1 = \frac{3\mathcal{E}}{\alpha_1}$$

$$B_s = \frac{\Lambda^2 \mathcal{E}}{\alpha_s} \sum_{j=1}^{s-1} (j+2)(s-j+2)\beta^{s-j-1} B_j + (s+2)\beta^{s-1} \frac{\mathcal{E}}{\alpha_s}$$

Si tratta ora di semplificare l'espressione di B_s . A tal fine, supponendo $s \geq 3$, si riscrive questa espressione isolando il termine $j = s - 1$ nella somma, si da ottenere

$$\alpha_s B_s = 3(s+1)\Lambda^2 \mathcal{E} B_{s-1} + \Lambda^2 \mathcal{E} \beta \sum_{j=1}^{s-2} (j+2)(s-j+2)\beta^{s-j-2} B_j + (s+2)\beta^{s-1} \mathcal{E} ;$$

confrontando ora il membro di destra di questa espressione, escluso il primo termine, con B_{s-1} , come si ricava dalla formula ricorsiva del lemma 8.25, e osservando che per $s \geq 2$ e $0 \leq j \leq s - 2$ vale la diseuguaglianza $s - j + 2 \leq \frac{4}{3}(s - j + 1)$, si ottiene che l'intera espressione è maggiorata da

$$\left[3(s+1)\Lambda^2 \mathcal{E} + \frac{4}{3}\beta\alpha_{s-1} \right] B_{s-1} < (s+1) \left(3\Lambda^2 \mathcal{E} + \frac{4}{9}\beta \max(\alpha_1, \alpha_2) \right) B_{s-1} ;$$

quest'ultima diseuguaglianza si ottiene osservando che $\max(\alpha_1, \alpha_2)$ maggiora tutti i termini della successione $\{\alpha_s\}_{s \geq 1}$ (per definizione), e che $s + 1 \geq 3$ (il che spiega il fattore $4/9$). Si ha dunque, per $s \geq 3$,

$$\alpha_s B_s \leq (s+1) \left[3\Lambda^2 \mathcal{E} + \frac{4}{9}\beta \max(\alpha_1, \alpha_2) \right] B_{s-1} .$$

Con un calcolo elementare si verifica anche che la stessa diseuguaglianza vale per $s = 2$, sicché, ricordando l'espressione di B_1 , si ricava facilmente

$$\alpha_s B_s \leq \frac{3}{2} \mathcal{E} \left[3\Lambda^2 \mathcal{E} + \frac{4}{9}\beta \max(\alpha_1, \alpha_2) \right]^{(s-1)} \cdot \frac{(s+1)!}{\prod_{l=1}^{s-1} \alpha_l} .$$

Quest'ultima espressione fornisce una maggiorazione di $\|\Psi_s\|_R$, e dividendo per α_s anche di Φ_s , in variabili complesse. Per tornare a variabili reali si deve moltiplicare ancora per un fattore $2^{s/2}$, e sostituire l'espressione esplicita di β e \mathcal{E} data sopra. Si ricava così l'espressione di A_s . Questo dimostra le (8.95) e (8.96). Sostituendo in quest'ultima espressione α_s dato dalla (8.94), e raccogliendo in ϱ_* i termini che compaiono con una potenza $s - 1$ si ottiene immediatamente la (8.97). Q.E.D.

In modo analogo si ricava anche una stima per la norma delle espressioni Q_s , $s > r$, che entrano nell'espressione di $\Phi^{(l,r)}$.

Lemma 8.28: *Con l'ipotesi (8.93), le norme dei polinomi Q_s definiti dalla (8.84) sono stimate, in variabili reali, da*

$$(8.99) \quad \|Q_s\|_R \leq \frac{2}{3}(s-r)h^{s-r-1}A_{r+1}, \quad s > r ,$$

dove A_{r+1} è definito dalla (8.96). Con l'ulteriore ipotesi (8.94) si ha anche

$$(8.100) \quad \|Q_s\|_R \leq \frac{E(s-r)}{2^{\tau-1}\gamma(r+3)} \cdot \frac{h^{s-r-1}(r+2)!}{\varrho_*^r},$$

con ϱ_* definito dalla (8.98).

Dimostrazione. Per $s = r + 1$, confrontando l'espressione (8.84) con la (8.76) si vede subito che $Q_{r+1} = \Psi_{r+1}$, e dunque, per il lemma 8.27, $\|Q_{r+1}\|_R \leq A_{r+1}$. Per

$s > r + 1$ si fa uso della stima ricorsiva del lemma 8.26. Osservando che per $r \geq 1$ e $0 \leq j \leq r \leq s - 2$ vale

$$\frac{s - j + 2}{r - j + 3} \leq \frac{2}{3}(s - r) ,$$

si ricava la stima

$$D_s \leq \frac{2}{3}(s - r)h^{s-r-1}A_{r+1} ,$$

e da qui si ottiene subito la (8.99). Sostituendo l'espressione esplicita di A_{r+1} e l'ipotesi (8.94) si ottiene facilmente la (8.100). Q.E.D.

Con queste stime si può già ottenere un risultato interessante, anche se non ancora completamente soddisfacente. Se si considerano gli integrali primi troncati

$$(8.101) \quad \Phi^{(l,r)} = I_l + \Phi_1^{(l)} + \dots + \Phi_r^{(l)} , \quad 1 \leq l \leq n ,$$

vale la

Proposizione 8.29: *Sia data l'Hamiltoniana*

$$H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y) + \dots ,$$

con

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (x_l^2 + y_l^2) , \quad H_s \in \mathcal{P}_{s+2} ;$$

dati R_1, \dots, R_n positivi si supponga che esistano due costanti $h \geq 0$ e $E > 0$ tali che

$$\|H_s\| \leq h^{s-1}E \text{ per } s \geq 1 ;$$

si supponga inoltre che le frequenze ω soddisfino le condizioni di non risonanza

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \alpha_s \text{ per } 0 \leq |k| \leq s + 2 , \quad |k| \equiv s \pmod{2} .$$

Allora per ogni intero positivo r esistono n integrali primi troncati della forma (8.101) per cui vale la seguente affermazione: esistono due costanti $\sigma_r = \sigma_r(h, E, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e $C_r = C_r(h, E, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tali che per ogni $(x, y) \in \Delta_{\varrho R}$ con $\varrho < 1/h$ valgono le stime

$$(8.102) \quad \begin{aligned} |(\Phi^{(l,r)} - I_l)(x, y)| &< \frac{24E}{\alpha_1} \varrho^3 \cdot \frac{1 - (\sigma_r \varrho)^r}{1 - \sigma_r \varrho} \\ |\dot{\Phi}^{(l,r)}(x, y)| &< C_r \varrho^{r+3} \cdot \frac{1}{(1 - h\varrho)^2} . \end{aligned}$$

I valori delle costanti sono

$$(8.103) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 1 , \\ \sigma_r &= \left(12\Lambda^2 E + \frac{8}{9} h \max(\alpha_1, \alpha_2) \right) \left[\frac{(r+1)!}{\prod_{l=2}^r \alpha_l} \right]^{1/(r-1)} , \quad r > 1 \\ C_r &= 8E \left(12\Lambda^2 E + \frac{8}{9} h \max(\alpha_1, \alpha_2) \right)^r \cdot \frac{(r+2)!}{\prod_{l=1}^r \alpha_l} . \end{aligned}$$

Corollario 8.30: Nelle ipotesi della proposizione 8.29, e con l'ulteriore ipotesi

$$\alpha_s = \gamma(s+2)^{-\tau}, \quad \gamma > 0, \quad \tau \geq n-1, \quad s \geq 1$$

valgono le stime

$$(8.104) \quad \begin{aligned} |(\Phi^{(l,r)} - I_l)(x, y)| &< \frac{8 \cdot 3^{\tau+1} E}{\gamma} \varrho^3 \cdot \frac{1 - (\sigma_r \varrho)^r}{1 - \sigma_r \varrho} \\ |\dot{\Phi}^{(l,r)}(x, y)| &< C_r \varrho^{r+3} \cdot \frac{1}{(1 - h\varrho)^2}. \end{aligned}$$

con le costanti

$$(8.105) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 1 \\ \sigma_r &= \frac{1}{6^\tau \varrho_*} [(r+2)!]^{(\tau+1)/(r-1)} \\ C_r &= \frac{2^{3-\tau} E}{\varrho_*^r} [(r+2)!]^{\tau+1} \\ \varrho_* &= \frac{\gamma}{4} \left(3\Lambda^2 E + \frac{2\gamma h}{3^{\tau+2}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dimostrazione della proposizione 8.29. Per la definizione della norma e del dominio $\Delta_{\varrho R}$ si stima immediatamente

$$\left| (\Phi^{(l,r)} - I_l)(x, y) \right| < \sum_{s=1}^r \|\Phi_s^{(l)}\|_R \varrho^{s+2}.$$

Facendo uso delle stime (8.95) e (8.96) del lemma 8.27 si ottiene, per $1 \leq s \leq r$,

$$\|\Phi_s^{(l)}\|_R \leq \frac{24E}{\alpha_1} \sigma_r^{s-1},$$

con σ_r definito dalla (8.103). Sostituendo nella stima precedente si ha

$$\left| (\Phi^{(l,r)} - I_l)(x, y) \right| < \frac{24E}{\alpha_1} \varrho^3 \sum_{s=1}^r (\sigma_r \varrho)^{s-1},$$

e la prima delle (8.102) segue dall'espressione della somma parziale della serie geometrica. Richiamando ora l'espressione (8.83) di $\dot{\Phi}^{(l,r)}$, e facendo uso della (8.99), si calcola

$$\begin{aligned} |\dot{\Phi}^{(l,r)}(x, y)| &\leq \sum_{s>r} \|Q_s^{(l)}\|_R \varrho^{s+2} \\ &< \frac{2}{3} A_{r+1} \varrho^{r+3} \sum_{s>r} (s-r)(h\varrho)^{s-r-1}. \end{aligned}$$

L'ultima somma si calcola osservando che vale

$$\sum_{s>r} (s-r)z^{s-r-1} = \sum_{k>0} kz^{k-1} = \frac{d}{dz} \sum_{k \geq 0} z^k = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

infine, la seconda delle (8.102) si ricava sostituendo l'espressione di A_{r+1} data dalla (8.96). Q.E.D.

La dimostrazione del corollario 8.30 si ottiene direttamente per sostituzione dell'espressione esplicita di α_s , e raccogliendo in ϱ_* tutti i termini che compaiono con una potenza r in C_r .

8.6.2 Scelta dell'ordine di troncamento e stima esponenziale del resto

La proposizione 8.29 ed il corollario 8.30 forniscono delle stime interessanti, ma non ancora completamente soddisfacenti dal punto di vista matematico. In effetti, si osserva subito che i parametri che entrano nelle stime sono i seguenti:

- i. le costanti $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (nella proposizione) o γ e τ (nel corollario) che dipendono dalle frequenze armoniche;
- ii. le costanti h ed E che dipendono dai termini perturbativi dell'Hamiltoniana;
- iii. i raggi R_1, \dots, R_n ed il parametro ϱ che descrivono il dominio ove si vuol studiare la dinamica, e possono essere adattati ai dati iniziali dell'orbita che si vuol considerare;
- iv. l'ordine di troncamento r .

Ora, le costanti che descrivono le frequenze e la perturbazione sono determinate da quantità che compaiono direttamente nell'Hamiltoniana, e quindi non sono modificabili. La scelta dei raggi, ovvero della forma dei domini, è arbitraria, ma anch'essa determinata dal sistema stesso ove si adattino i domini al dato iniziale. L'ordine di troncamento è invece totalmente arbitrario, e appare come un elemento del tutto estraneo al sistema. In questa forma, le stime date non sono inutili, perché la scelta dell'ordine di troncamento può essere dettata dalla possibilità effettiva di calcolare gli sviluppi, ma sono insoddisfacenti dal punto di vista concettuale.

La scelta dell'ordine di troncamento come funzione dei parametri che governano il sistema stesso può effettuarsi col criterio seguente. Guardando la (8.104) si osserva che l'ordine r compare solo nella stima del resto (la derivata temporale di $\Phi^{(l,r)}$); poiché lo scopo dello sviluppo perturbativo è quello di costruire una funzione il cui valore cambi il più lentamente possibile nel tempo, si vorrebbe rendere il resto il più piccolo possibile; avendo a disposizione una stima esplicita del resto, si cerca almeno di scegliere r in modo che la stima sia il più piccola possibile, adattando la scelta di r al valore degli altri parametri che compaiono nel sistema, in particolare al valore di ϱ .

Prima di passare ad una stima precisa, è conveniente mettere in evidenza il procedimento, di per sé semplice. Si osserva subito che nella stima (8.104) il termine rilevante è $(\varrho/\varrho_*)^r [(r+2)!]^{\tau+1}$. Per semplificare la discussione, si ponga per il momento $\tau = 0$, e si sostituisca $r+2$ con r ; si ottiene così la stima²⁴

$$|\dot{\Phi}^{(l,r)}| \simeq r! \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right)^r .$$

²⁴ È interessante osservare che si ricade proprio nel caso illustrato da Poincaré nella discussione sulla convergenza delle serie, riportata all'inizio del capitolo.

Mettendo in evidenza la dipendenza da r in forma ricorsiva, si scriva il membro di destra nella forma

$$B_0 = 1, \quad B_r = r \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right) B_{r-1};$$

per $\varrho < \varrho_*$ la successione B_r è dapprima decrescente, poi crescente oltre ogni limite, ed il valore minimo viene raggiunto (trascurando per un momento il fatto che r dovrebbe essere intero)

$$r = \left(\frac{\varrho_*}{\varrho} \right).$$

Si sostituisca ora questo valore di r nella stima del resto, facendo anche uso della formula di Stirling $r! \simeq r^r e^{-r}$; si ottiene

$$|\dot{\Phi}^{(l,r)}| \simeq e^{-r} r^r \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right)^r = e^{-\varrho_*/\varrho} \left(\frac{\varrho_*}{\varrho} \right)^r \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right)^r = e^{-\varrho_*/\varrho}.$$

Il risultato è che una scelta accurata di r può rendere il resto esponenzialmente piccolo con $1/\varrho$.²⁵

Un calcolo più preciso delle varie costanti conduce alla

²⁵ Mette conto spendere qualche parola in più su questo risultato. L'atteggiamento tipico del meccanico celeste è stato sintetizzato da Birkhoff nel concetto di *stabilità completa* ([10], cap. IV, § 2 e § 4), che può esprimersi come segue. Se costruisco gli integrali primi fino ad un ordine r fissato, il resto è di ordine $O(\varrho^{r+3})$; considerato che l'azione armonica, prima approssimazione degli integrali primi, è di ordine $O(\varrho^2)$, posso accettare una variazione degli integrali primi di ordine $O(\varrho^3)$; quindi i calcoli eseguiti sulla base degli integrali primi troncati sono attendibili per un intervallo di tempo di ordine $O(1/\varrho^r)$; in altre parole, facendo variare ϱ l'intervallo di tempo su cui i miei calcoli sono accettabili cresce come una potenza di $1/\varrho$. Fin qui arrivava Birkhoff, ma l'argomento si può migliorare scrivendo la stima del resto più correttamente nella forma $C_r \varrho^{r+3}$. Tutto dipende dal comportamento del coefficiente C_r , che nella teoria di Birkhoff non era valutato, e che potrebbe crescere così rapidamente da vanificare completamente il guadagno dovuto alla potenza di ϱ . Ciò che le stime quantitative rivelano è che l'argomento di Birkhoff è legittimo a condizione di non spingersi troppo avanti con l'ordine. Anzi, la sua conclusione è pessimistica: l'intervallo di tempo di validità del calcolo fondato sugli sviluppi troncati cresce in realtà più rapidamente di qualunque potenza di $1/\varrho$. Questo fatto può apparire alquanto misterioso, ma diventa comprensibile se si ragiona come segue. Per un fissato valore di ϱ , diciamo ϱ_1 , lo sviluppo perturbativo è conveniente fino ad un certo ordine r_1 , ove si raggiunge il minimo del resto, e questo dà risultati validi per un tempo $O(1/\varrho_1^{r_1})$; se si prende $\varrho = \varrho_2 < \varrho_1$, ossia si prende il dato iniziale dell'orbita più vicino al punto di equilibrio, si può anche, in linea di principio, proseguire lo sviluppo fino ad un ordine $r_2 > r_1$; l'intervallo di tempo diventa allora $O(1/\varrho_2^{r_2})$, che è maggiore del precedente non solo perché ϱ_2 è più piccolo di ϱ_1 (il che farebbe crescere il tempo come una potenza di $1/\varrho$), ma anche perché l'esponente r_2 è maggiore di r_1 ; pertanto, la lunghezza dell'intervallo di tempo cresce più rapidamente di una potenza, come si è detto. L'informazione data dalle stime esplicite è che la crescita è addirittura esponenziale, e dunque estremamente rapida.

Proposizione 8.31: *Sia data l'Hamiltoniana*

$$H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y) + \dots ,$$

con

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (x_l^2 + y_l^2) , \quad H_s \in \mathcal{P}_{s+2} ;$$

dati R_1, \dots, R_n positivi e $\Lambda = (\min_l R_l)^{-1}$, si supponga che esistano due costanti $h \geq 0$ e $E > 0$ tali che

$$\|H_s\| \leq h^{s-1} E \text{ per } s \geq 1 ;$$

si supponga inoltre che le frequenze ω soddisfino le condizioni di non risonanza

$$\alpha_s = \gamma(s+2)^{-\tau} , \quad \gamma > 0 , \quad \tau \geq n-1 , \quad s \geq 1 .$$

Allora esistono n integrali primi approssimati $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)}$ per cui vale la seguente affermazione: esistono delle costanti $\varrho_* = \varrho_*(h, E, \Lambda, \gamma, n)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}(h, E, \Lambda, \gamma, n)$ tali che per ogni $\varrho < 3^{-(\tau+1)} \varrho_*$ e per ogni $(x, y) \in \Delta_{\varrho R}$ valgono le stime

$$(8.106) \quad \begin{aligned} \left| (\Phi^{(l)} - I_l)(x, y) \right| &< \frac{8 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \varrho_*} \varrho^3 \\ \left| \dot{\Phi}^{(l)}(x, y) \right| &< \mathcal{A} \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right)^{1/2} \exp \left[-(\tau+1) \left(\frac{\varrho}{\varrho_*} \right)^{1/(\tau+1)} \right] . \end{aligned}$$

I valori delle costanti sono

$$(8.107) \quad \begin{aligned} \varrho_* &= \frac{\gamma}{4} \left(3\Lambda^2 E + \frac{2\gamma h}{3^{\tau+2}} \right)^{-1} \\ \mathcal{A} &= 3 \cdot 2^4 \left(\frac{e^2}{2} \right)^{\tau+1} E \varrho_*^3 . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Considerando la stima di $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ del corollario 8.30, si osserva anzitutto che la condizione $\varrho \leq 3^{-(\tau+1)} \varrho_*$, inserendo il valore esplicito di ϱ_* dato dalla (8.105), dà $\varrho < 3/(8h)$, e da qui segue $(1-h\varrho)^{-2} < 3$. Si cerca poi un valore r_{opt} di r che minimizzi l'espressione $(\varrho/\varrho_*)^r [(r+2)!]^{\tau+1}$; questo si ottiene scegliendo r_{opt} come l'unico intero soddisfacente

$$(8.108) \quad \left(\frac{\varrho_*}{\varrho} \right) - 1 < r_{\text{opt}} + 2 \leq \left(\frac{\varrho_*}{\varrho} \right) .$$

La stima di $\dot{\Phi}^{(l)}$ in forma esponenziale si ottiene sostituendo r_{opt} al posto di r nella seconda delle (8.104), con C_r dato dalla (8.105), e facendo uso della nota disuguaglianza $s! < s^{s+1/2} e^{-(s-1)}$. Questo dimostra la seconda delle (8.104). Per ricavare la prima, occorre prima di tutto mostrare che vale $(1 - (\sigma_{r_{\text{opt}}} \varrho)^{r_{\text{opt}}}) (1 - \sigma_{r_{\text{opt}}} \varrho) < 4$. Per $r = 1$ questo è banale; per $r \geq 2$ occorre procedere con un po' di attenzione: facendo uso

dell'espressione (8.105) di σ_r e sostituendovi il valore r_{opt} dato dalla (8.108) (che viene qui indicato ancora con r per brevità) si calcola

$$\varrho\sigma_r = \frac{\varrho}{\varrho_*} \left[(r+1)! \left(\frac{(r+2)!}{6} \right)^\tau \right]^{\frac{1}{r-1}} \leq \frac{[(r+1)!]^{\frac{1}{r-1}}}{r+2} \left[\frac{(r+2)!}{6(r+2)^{r-1}} \right]^{\frac{\tau}{r-1}}.$$

Per $\tau \geq 0$ e per $r \geq 1$ questa è chiaramente una funzione non crescente di τ , sicché si ha $[1 - (\sigma_r \varrho)^r] (1 - \sigma_r \varrho)^{-1} < (1 - \psi_r^r)(1 - \psi_r)^{-1}$, con $\psi_r = [(r+1)!]^{1/(r-1)}/(r+2)$; La funzione ψ_r è a sua volta una funzione decrescente di r , e si calcola facilmente $\psi_2 = 3/2$, $\psi_3 < 1$, $\psi_4 < 1$ e $\psi_r < 3/4$ for $r \geq 5$; in tal modo la diseuguaglianza si ricava in modo diretto per $r \leq 4$, mentre per $r \geq 5$ si trova $(1 - \psi_r^r)(1 - \psi_r)^{-1} < (1 - \psi_r)^{-1} < 4$. Il calcolo del coefficiente si completa osservando che per come è definito ϱ_* vale la diseuguaglianza $12E/\gamma < 1/(\Lambda^2 \varrho_*)$, e questo completa la stima. *Q.E.D.*

8.6.3 Considerazioni qualitative fondate sugli integrali primi

Il calcolo effettivo degli integrali primi troncati è, evidentemente, impresa impegnativa dal punto di vista del calcolo. Tuttavia, la conoscenza delle stime ricavate fin qui consente già di ricavare informazioni interessanti sulla dinamica nell'intorno dell'origine.

Partendo dal presupposto che, in generale, le sole quantità facilmente calcolabili (o osservabili) sono le azioni armoniche del sistema, diventa naturale domandarsi quanto la dinamica del sistema perturbato possa cambiare il valore iniziale delle azioni armoniche.²⁶ Per rispondere a questa domanda si fa uso della diseuguaglianza, ovvia ma utilissima,

$$(8.109) \quad |I_l(t) - I_l(0)| \leq \left| I_l(t) - \Phi^{(l,r)}(t) \right| + \left| \Phi^{(l,r)}(t) - \Phi^{(l,r)}(0) \right| + \left| \Phi^{(l,r)}(0) - I_l(0) \right|.$$

Il termine di destra in questa diseuguaglianza può stimarsi grazie alla proposizione 8.31. Per semplificare la discussione, si cominci col supporre che gli integrali costruiti siano esatti, ossia che $\dot{\Phi}^{(l)} = 0$, sicché il sistema è integrabile. Questo non è vero in generale, ma può ben verificarsi per sistemi particolari. Se si osserva che le azioni armoniche sono di ordine $O(\varrho^2)$, e che la differenza tra integrali primi e azioni armoniche è stimata da $\delta_r(\varrho) = O(\varrho^3)$, si vede subito che, almeno in un intorno dell'origine, il sistema perturbato ammette dei tori invarianti che sono prossimi a quelli imperturbati. Su ciascuno di questi tori, le orbite del sistema descrivono traiettorie quasi periodiche con n frequenze $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ distinte, ed è ragionevole aspettarsi che queste frequenze siano a loro volta

²⁶ Nel caso di sistemi Hamiltoniani più generali il posto delle azioni armoniche viene preso dalle azioni del sistema imperturbato. Così, ad esempio, nel caso del sistema solare le quantità interessanti sono le azioni di Delaunay, direttamente collegate a semiassi maggiori, eccentricità ed inclinazioni delle orbite dei pianeti. In tal caso le quantità direttamente osservabili sono, di fatto, gli elementi orbitali, e non le eventuali costanti del moto che si ottengono perturbando le azioni, e che, in generale, non sono nemmeno note in forma analitica esplicita. Si vede dunque come sia rilevante in generale ottenere stime sulle azioni del sistema imperturbato.

prossime a quelle del sistema imperturbato.²⁷ Qualunque funzione dello stato del sistema risulterà dunque essere, in generale, una funzione quasiperiodica del tempo; ciò è vero in particolare per le azioni armoniche del sistema imperturbato. La descrizione della dinamica risulta essere la seguente: assegnati valori iniziali $I_1(0), \dots, I_n(0)$ delle azioni armoniche, e per qualunque scelta dei valori iniziali delle fasi, le evolute temporali $I_1(t), \dots, I_n(t)$ delle azioni armoniche sono funzioni quasiperiodiche del tempo, e la loro variazione è limitata per tutti i tempi da

$$I_{l,\min} \leq I_l(t) \leq I_{l,\max}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

con valori opportuni di $I_{l,\min}$ e $I_{l,\max}$ che possono stimarsi grazie alla proposizione 8.31. Questo fenomeno verrà descritto nel seguito come *deformazione*.²⁸ Si osservi bene che la deformazione è presente anche se il sistema è integrabile, e risulta essere di ordine $O(\varrho^3)$; inoltre, l'effetto della deformazione si manifesta in tempi brevi, in quanto la derivata temporale delle azioni armoniche risulta essere comunque di ordine $O(\varrho^3)$.

Si deve ora tener conto del fatto che gli integrali primi sono solo approssimati. In questo caso il secondo termine a destra nella stima (8.109) non è più nullo, ma può variare nel tempo in un modo che la teoria svolta fin qui non consente di prevedere in modo dettagliato. La stima della proposizione 8.31 però consente di garantire che, almeno fin che l'orbita resta limitata in un dominio $\Delta_{\varrho R}$ sufficientemente piccolo, tale variazione è estremamente lenta. Si può infatti stimare *a priori*

$$\left| \Phi^{(l)}(t) - \Phi^{(l)}(0) \right| \simeq |t| \exp \left[\left(\frac{\varrho_*}{\varrho} \right)^{1/(\tau+1)} \right].$$

²⁷ A rigore, quest'ultima affermazione non segue immediatamente da quanto è stato fin qui dimostrato: occorrerebbe mostrare che le variabili d'azione e angolo del sistema sono ancora perturbazioni delle azioni armoniche, ma questo può ottenersi solo da un calcolo esplicito delle variabili d'azione e angolo. Come si possa svolgere tale calcolo è descritto ad esempio in Whittaker, 1937, §198. Come si possa svolgere il calcolo in generale è illustrato dalla teoria delle forme normali, che verrà discussa in seguito; qui basti osservare che in effetti le azioni vengono costruite come sviluppi in serie della stessa forma degli integrali primi considerati qui, ma con una scelta ben particolare dei termini di spazio nullo che compaiono a ciascun ordine. L'Hamiltoniana trasformata risulta essere funzione delle sole azioni, e precisamente una serie di potenze nelle nuove azioni I'_1, \dots, I'_n della forma $H(I'_1, \dots, I'_n) = \sum_l \omega_l I'_l + \sum_{l,m} a_{lm} I'_l I'_m + \dots$, con opportuni coefficienti a_{lm} . Le nuove frequenze sono a loro volta serie di potenze della forma $\omega'_l = \omega_l + 2 \sum_m a_{lm} I'_m + \dots$, e quindi differiscono poco, in un intorno dell'origine, dalle frequenze imperturbate.

²⁸ L'origine di questo termine sta nell'interpretazione geometrica della dinamica del sistema perturbato, che può descriversi come segue: i tori invarianti del sistema imperturbato vengono deformati dalla perturbazione, ma non distrutti; la proiezione dei nuovi tori sui piani x_l, y_l di ciascuno degli oscillatori non è più una circonferenza, come per il sistema imperturbato, ma le stime date assicurano che è comunque compresa in una corona circolare (almeno per valori abbastanza piccoli delle azioni); la quasi periodicità delle azioni armoniche è conseguenza del fatto che la dinamica dell'orbita sui nuovi tori invarianti risente delle deformazioni indotte dalla perturbazione.

A questa componente della dinamica si farà riferimento in seguito come ad una *deriva*.²⁹ Se si accetta che la deriva possa provocare un effetto paragonabile a quello della deformazione, ossia di ordine $O(\varrho^3)$, che risulterebbe comunque difficilmente distinguibile dalla deformazione stessa, si calcola facilmente che ciò richiede un tempo che cresce esponenzialmente con $1/\varrho$. Pertanto, a tutti gli effetti, il calcolo svolto con gli integrali primi approssimati può risultare assai preciso anche per tempi enormemente lunghi rispetto ai tempi propri del sistema in istudio.

Naturalmente, la descrizione qui data è valida finché si considera un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, ovvero ϱ sufficientemente piccolo. Per valori grandi di ϱ i metodi perturbativi non danno nessuna informazione, e sembra lecito attendersi che il sistema presenti un comportamento difficilmente identificabile con quello di un sistema integrabile, o almeno non identificabile con quello di un sistema di oscillatori. Questo, del resto, è in accordo con i fenomeni comunemente osservati nella simulazione numerica.

8.6.4 Stabilità dell'equilibrio e congelamento delle azioni armoniche

Un primo risultato che si può dedurre dalla proposizione 8.31 riguarda la stabilità del punto di equilibrio. Facendo riferimento ai domini $\Delta_{\varrho R}$ fin qui usati, il problema può porsi nel modo seguente: fissati i raggi R_1, \dots, R_n , e dato $\varrho > 0$, si cerca ϱ_0 tale che qualunque orbita con dato iniziale $(x, y) \in \Delta_{\varrho_0 R}$ resti confinata in $\Delta_{\varrho R}$. La definizione consueta di stabilità richiede che questa proprietà valga per tutti i tempi, ma i metodi attualmente noti per lo studio della stabilità consentono di risolvere il problema (peraltro in modo semplice e senza nessun ricorso alla teoria perturbativa) solo se i segni delle frequenze sono tutti concordi; il problema diventa decisamente arduo se le frequenze hanno segni diversi. Si può invece arrivare ad un risultato interessante se si accetta di ridurre la richiesta, accontentandosi di un tempo finito, ma estremamente lungo.³⁰

Un secondo risultato riguarda l'analisi dettagliata del comportamento delle azioni armoniche. La discussione qualitativa del paragrafo precedente mette in evidenza il

²⁹ Ho usato il termine *deriva* per tradurre il termine inglese *drift* che viene comunemente usato in letteratura. Anche qui si capisce la scelta del nome se si fa riferimento ad una descrizione geometrica della dinamica: gli integrali primi approssimati $\Phi^{(l)}$ determinano comunque delle superfici di livello che costituiscono una foliazione continua in tori; Questi tori però non sono più invarianti, perché il resto provoca un passaggio estremamente lento dell'orbita da un toro all'altro.

³⁰ Il risultato può sembrare banale, ma lo è solo in apparenza. In effetti, un enunciato del tipo "qualunque orbita con dato iniziale in $\Delta_{\varrho_0 R}$ resta confinata in $\Delta_{\varrho R}$ per $|t| < T$ " è insignificante se non si specifica come T dipenda da ϱ_0 (o da ϱ): la continuità dell'orbita basta ad assicurare che l'affermazione vale per qualche T . L'interesse sta nel fatto che si riesca a dimostrare che T cresce esponenzialmente con $1/\varrho_0$. Per rendersene conto, si consideri l'equazione $\dot{x} = x$, con $x \in \mathbb{R}$. Se si impone la condizione iniziale $x(0) = x_0 \leq \varrho_0$, e si sceglie $\varrho = 1$ si vede subito che si potrà garantire $x(t) < \varrho$ solo per $t < \ln(1/\varrho_0)$, che è un tempo estremamente breve. La crescita logaritmica del tempo con $1/\varrho_0$ rende il risultato scarsamente interessante dal punto di vista della stabilità.

fatto che in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, ossia per valori iniziali sufficientemente piccoli delle azioni armoniche, l'evoluzione dinamica del sistema provoca una variazione limitata delle azioni per tempi molto lunghi. Questo fatto risulta essere di interesse anche per un sistema con frequenze tutte dello stesso segno, in quanto l'informazione che si ottiene è molto più forte della semplice stabilità.

Un enunciato preciso dei risultati discussi è contenuto nella seguente

Proposizione 8.32: *Sia data un'Hamiltoniana soddisfacente le ipotesi della proposizione 8.31, e sia ϱ_* la costante ivi definita; sia μ un numero reale positivo, e siano*

$$T = \frac{\mu}{9\Lambda^2 E \varrho_*} \left(\frac{6}{e^2}\right)^{\tau+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_*}\right)^{5/2} \exp \left[(\tau+1) \left(\frac{\varrho_*}{\varrho}\right)^{1/(\tau+1)} \right]$$

$$I_{l,\max} = \frac{1}{2} \varrho^2 R_l^2 ,$$

$$I_{l,\min} = \left[1 - \frac{64 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 R_l^2} (1+\mu) \frac{\varrho}{\varrho_*} \right] I_{l,\max} , \quad 1 \leq l \leq n .$$

Allora:

i. per ogni $\varrho < [32 \cdot 3^\tau (1+\mu)]^{-1} \varrho_*$ e ogni dato iniziale soddisfacente

$$I_l(0) \leq \left[1 - \frac{32 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 R_l^2} (1+\mu) \frac{\varrho}{\varrho_*} \right] I_{l,\max}$$

si ha $I_l(t) < I_{l,\max}$ per tutti i $|t| \leq T$;

ii. per ogni $\varrho < [64 \cdot 3^\tau (1+\mu)]^{-1} \varrho_*$ e ogni dato iniziale soddisfacente

$$I_l(0) = \left[1 - \frac{32 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 R_l^2} (1+\mu) \frac{\varrho}{\varrho_*} \right] I_{l,\max}$$

si ha $I_{l,\min} < I_l(t) < I_{l,\max}$ per tutti i $|t| \leq T$.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla diseuguaglianza (8.106), la deformazione si stima grazie alla prima delle (8.104), che dà

$$|I_l(t) - I_l(0)| \leq \frac{16 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \varrho_*} \varrho^3 = \frac{32 \cdot 3^\tau \varrho}{\Lambda^2 R_l^2 \varrho_*} I_{l,\max} .$$

Anche ignorando l'effetto di deriva, la condizione $I_l(t) \leq I_{l,\max}$ richiede comunque

$$I_l(0) \leq \left(1 - \frac{32 \cdot 3^\tau \varrho}{\Lambda^2 R_l^2 \varrho_*} \right) I_{l,\max}$$

per $1 \leq l \leq n$; questo dà la condizione $\varrho < \varrho_*/(32 \cdot 3^\tau)$, che è più forte della condizione $\varrho \leq 3^{-(\tau+1)} \varrho_*$ richiesta dalla proposizione 8.31, sicché la proposizione si può applicare. Se ora si accetta che l'effetto della deriva sia μ volte quello della deformazione si si trova la condizione $|\dot{\Phi}^{(l)}| T < 16 \cdot 3^\tau \mu \varrho^3 (\Lambda^2 \varrho_*)$; il valore di T si ricava immediatamente grazie alla stima (8.106) per $\dot{\Phi}^{(l)}$. Per tener conto della deriva si deve però restringere ulteriormente il dato iniziale di un fattore $1 + \mu$, e questo prova l'affermazione i. Il risultato più forte contenuto nella ii si ottiene ancora dalla (8.106), imponendo anche

un limite inferiore a $I_l(t)$, nella forma $I_l(t) \geq I_{l,\min}$. Questo è possibile a condizione che si abbia $I_{l,\min} > 0$, il che è vero se si impone la condizione $\varrho < [64 \cdot 3^r (1 + \mu)]^{-1} \varrho_*$; inoltre si deve anche imporre che il dato iniziale corrisponda a valori delle azioni esattamente a metà tra $I_{l,\min}$ e $I_{l,\max}$, che è la condizione richiesta. *Q.E.D.*

