

7

IL PROBLEMA DEI TRE CORPI

Il *problema dei tre corpi*, definito da Whittaker “*the most celebrated of all dynamical problems*”, si enuncia come segue:

Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.

Nell’ambito della Meccanica Celeste il problema dei tre corpi si presenta come lo schema più naturale in cui inquadrare, almeno in prima approssimazione, problemi quali: il moto dei pianeti interni all’orbita di Giove (Mercurio, Venere, Terra, Marte) o degli asteroidi quando si tenga conto dell’azione di Giove e del Sole; il moto degli oggetti transnettuniani; il moto della Luna; la dinamica della navicelle spaziali e così via.

Ma l’interesse non si ferma agli aspetti, per così dire applicativi, fin qui discussi. Basta scorrere le pagine del trattato *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*^[81] per rendersi conto di come Poincaré abbia fatto di questo problema il punto di riferimento costante per lo sviluppo della teoria generale dei sistemi dinamici in ambito Hamiltoniano. E non si deve neppure dimenticare la memoria [80] che valse a Poincaré il premio messo in palio dal Re di Svezia Oscar II, assegnatogli in considerazione del numero impressionante di nuovi risultati ivi raccolti.¹

Accanto al problema generale dei tre corpi possiamo senz’altro enunciare la versione semplificata: il *problema ristretto dei tre corpi*. È appena il caso di sottolineare che l’aggettivo “semplificata” non è da intendersi nel senso di “semplice”: si tratta, è vero, di una versione in cui il numero di gradi di libertà viene ridotto in modo drastico, ma ciò serve solo a ridurre la complessità del calcolo, e non le reali difficoltà che restano tutte ben presenti.

7.1 Il problema ristretto dei tre corpi

In un primo tempo prenderemo in esame la dinamica nel caso del cosiddetto *problema*

¹ Per una ricostruzione storica della vicenda del premio si veda [7].

ristretto dei tre corpi, che si enuncia come segue:

Due punti materiali, detti corpi primari, si muovono nello spazio su un'orbita Kepleriana (ellittica o circolare). Un terzo punto P di massa trascurabile rispetto ai primi due, detto planetoide, si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dai primari, senza influenzarne il movimento. Si chiede di studiare la dinamica del punto P .

In altre parole, si suppone che i primari si comportino come un sistema a due corpi la cui dinamica non viene influenzata dal planetoide. A sua volta, il planetoide si muove sotto l'azione di un ambiente esterno, rappresentato appunto dai primari.

Il problema ammette diverse varianti. Si distingue anzitutto il caso *circolare*, in cui i due primari ruotano a velocità uniforme rispetto al baricentro comune, dal caso *ellittico*. Si distingue poi il caso *piano*, in cui il planetoide è vincolato a muoversi nel piano dell'orbita dei primari, da quello *spaziale*. Combinando tra loro queste due scelte si hanno quattro casi possibili, e comunque tutti non integrabili (o, per essere pignoli, non integrati).

7.1.1 Scelta delle unità di misura

È uso comune, del resto conveniente, scegliere le unità di misura in modo da ricondurre il problema alla forma più semplice possibile. Come misura di lunghezza si sceglie il semiasse maggiore dell'orbita kepleriana dei primari, che nel caso circolare è la distanza tra i due. Si sceglie poi l'unità di massa pari alla somma delle masse dei primari (quella del planetoide è trascurabile), e si denota con μ la massa di uno dei due primari (solitamente la più piccola), sicché l'altra massa risulta essere $1 - \mu$. Infine si pone la costante di gravitazione $K_g = 1$, il che equivale a fissare l'unità di tempo.

Ricordiamo che per la soluzione Kepleriana del problema dei due corpi vale la relazione tra semiassi e periodi

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K_g(m_1 + m_2)}{4\pi^2},$$

dove m_1, m_2 sono le masse. Ne segue che nelle unità di misura che abbiamo scelto la soluzione Kepleriana circolare per il moto dei due primari ha periodo $T = 2\pi$, e dunque frequenza angolare $\omega = 1$.

7.1.2 L'Hamiltoniana e le equazioni canoniche nel caso circolare

Il procedimento tradizionale, ed in effetti anche il più comodo, consiste nel considerare un sistema di riferimento solidale coi primari, e quindi in moto rotatorio uniforme attorno al baricentro dei primari. In questo sistema di riferimento si pongono le due masse sull'asse x , con la massa maggiore dal lato positivo, come illustrato in figura 7.1. Dunque, la massa $1 - \mu$ occupa la coordinata μ e la massa μ occupa la posizione $-1 + \mu$ sull'asse x .

Consideriamo anzitutto un sistema di riferimento fisso, e denotiamo con ξ, η, ζ le coordinate cartesiane del planetoide. In un primo momento scriviamo in modo esplicito tutte le costanti, riservandoci di tener conto più avanti della scelta delle

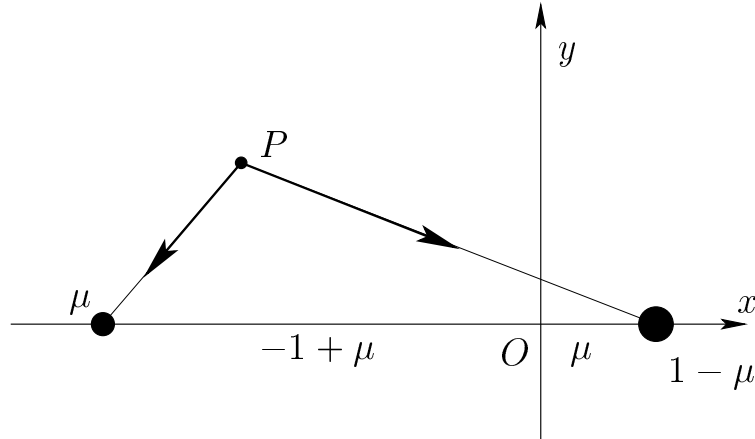


Figura 7.1. Ad illustrazione del problema dei tre corpi nel caso ristretto, circolare e piano.

unità di misura. L'Hamiltoniana si scrive

$$(7.1) \quad H(\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, t) = \frac{1}{2m}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + V(\xi, \eta, \zeta, t) .$$

L'energia potenziale è quella gravitazionale, e sarà la somma dei due termini dovuti all'interazione del planetoido con i primari, ossia

$$(7.2) \quad V = -\frac{K_g(1-\mu)m}{r_1} - \frac{K_g\mu m}{r_2}$$

dove r_1 è la distanza tra il planetoido ed il primario di massa $1 - \mu$ e r_2 la distanza dal secondo primario. La dipendenza dal tempo deriva dal movimento dei due primari nel sistema di riferimento assoluto. Qui non serve scrivere l'espressione esplicita della distanza: vedremo subito che nel sistema rotante la forma è alquanto più semplice, e si scrive in modo diretto.

Dette x, y, z le coordinate in un sistema di riferimento rotante uniformemente in senso antiorario intorno all'asse ζ con velocità angolare ω , e scegliendo l'origine del sistema rotante coincidente con quella del sistema fisso (sicché gli assi z e ζ coincidono) si hanno le relazioni geometriche

$$(7.3) \quad \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t , \quad \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t , \quad \zeta = z ,$$

e le relazioni inverse

$$x = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t , \quad y = -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t , \quad z = \zeta .$$

Si tratta di una trasformazione puntuale dipendente dal tempo, e possiamo estenderla a trasformazione canonica mediante la funzione generatrice

$$S(p_x, p_y, p_z, \xi, \eta, \zeta) = p_x(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t) + p_y(-\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) + p_z \zeta ,$$

ma dovremo ricordare che l'Hamiltoniana trasformata è $H + \frac{\partial S}{\partial t}$, come abbiamo visto nella proposizione 3.6. La trasformazione sui momenti si scrive

$$(7.4) \quad p_\xi = p_x \cos \omega t - p_y \sin \omega t , \quad p_\eta = p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t , \quad p_\zeta = p_z .$$

Dobbiamo poi calcolare

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \omega p_x(-\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) - \omega p_y(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t) = -\omega p_y x + \omega p_x y .$$

dove abbiamo sostituito la trasformazione (7.3) sulle coordinate.

Otteniamo dunque l'Hamiltoniana del problema circolare ristretto nel sistema rotante (che con un piccolo abuso di notazione indicheremo ancora con H)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega x p_y + \omega y p_x \\ - \frac{K_g(1-\mu)m}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{K_g\mu m}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}} .$$

Nella scrittura dell'energia potenziale si è tenuto conto del fatto che nel sistema di riferimento solidale con i primari questi occupano due posizioni fisse, con la massa maggiore $1-\mu$ nel punto $(\mu, 0, 0)$ e la massa minore μ nel punto $(-1+\mu, 0, 0)$. Ora teniamo conto delle unità di misura che abbiamo scelto all'inizio, sicché porremo $K_g = 1$, $\omega = 1$. Infine possiamo eliminare la massa m mediante la trasformazione di scala

$$p_x = mp'_x, \quad p_y = mp'_y, \quad p_z = mp'_z,$$

e lasciando inalterate le coordinate x, y, z . La trasformazione non è canonica in senso stretto, ed occorre dividere per m l'Hamiltoniana trasformata (si veda il paragrafo 3.2.1). Nel nostro caso ciò corrisponde di fatto ad eliminare un fattore m comune a tutti i termini, sicché si ottiene (rimuovendo gli apici) la forma comunemente usata

$$(7.5) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x p_y + y p_x \\ - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}} .$$

Scriviamo infine le equazioni canoniche

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_x &= -p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_y &= p_x - \frac{(1-\mu)y}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} . \\ \dot{p}_z &= -\frac{(1-\mu)z}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu z}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} . \end{aligned}$$

Si vede subito che ponendo come dati iniziali $z(0) = 0$ e $p_z(0) = 0$, con dati arbitrari per le altre variabili, allora la terza e l'ultima equazione hanno la soluzione

banale $z(t) = 0, p_z(t) = 0$. In tal caso ci si riduce a considerare il problema piano, descritto dalle sole equazioni

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_x &= p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_y &= -p_x - \frac{(1-\mu)y}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} . \end{aligned}$$

7.2 Gli equilibri lagrangiani

Vogliamo ora cercare le soluzioni di equilibrio per il sistema (7.6). Dal momento che le equazioni per z, p_z ammettono $z = p_z = 0$ come unico punto di equilibrio potremo restringere la nostra attenzione al problema piano, come descritto dalle equazioni (7.7). Il lettore noterà che gli equilibri sono le posizioni in cui il planetoido sta fermo in un sistema di riferimento che ruota uniformemente. Nel sistema fisso si vedranno i tre corpi girare con velocità uniforme mantenendo la stessa posizione relativa.

7.2.1 Calcolo degli equilibri relativi

Occorre annullare i secondi membri delle equazioni. Ponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ otteniamo subito

$$p_x = -y, \quad p_y = x.$$

Le altre due equazioni diventano

$$(7.8) \quad \begin{aligned} x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} &= 0 \\ y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} &= 0 . \end{aligned}$$

dove

$$(7.9) \quad r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2$$

sono le distanze del planetoido dai due primari.

Per il seguito è conveniente anche fattorizzare x e y al numeratore, e riscrivere le equazioni nella forma

$$(7.10) \quad \begin{aligned} x \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) + \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0 \\ y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni di quest'ultima coppia di equazioni o, equivalentemente, delle (7.8) sono le posizioni di equilibrio cercate. Anticipiamo fin d'ora che, come scoperto da Lagrange,

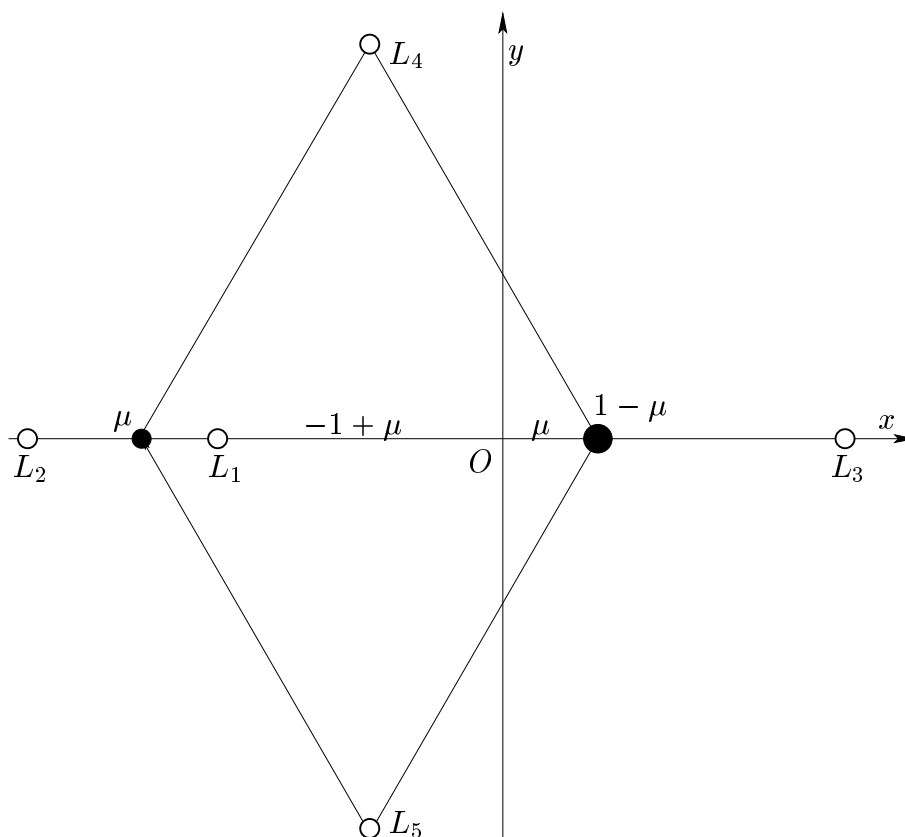


Figura 7.2. I cinque equilibri lagrangiani del problema ristretto dei tre corpi.

esistono 5 punti di equilibrio distinti, di cui tre giacciono sull'asse che congiunge i primari, e vengono detti *equilibri collineari*, e gli altri due sono disposti in modo da formare un triangolo equilatero con i due primari, e vengono detti *equilibri triangolari*. Gli equilibri sono rappresentati in figura 7.2.

7.2.2 Equilibri collineari

Iniziamo col porre $y = 0$ nella seconda delle (7.10). Per inciso, questo corrisponde proprio alla ricerca di soluzioni allineate coi primari. La prima delle (7.8) diventa

$$(7.11) \quad x = \frac{1 - \mu}{|x - \mu|(x - \mu)} + \frac{\mu}{|x + 1 - \mu|(x + 1 - \mu)}$$

(si presti attenzione al segno nelle semplificazioni). Per uno studio puramente qualitativo delle soluzioni si può far riferimento alla figura 7.3, che riporta l'andamento della funzione al secondo membro. Gli equilibri sono i punti di intersezione con la funzione identità che compare al primo membro. Si vede che esistono sempre tre soluzioni distinte, di cui una interna al segmento che congiunge i primari, e le altre due esterne, da lati opposti.² Si indica solitamente con L_1 la soluzione interna all'intervallo dei

² A prima vista le due soluzioni esterne all'intervallo $[-1 + \mu, \mu]$ possono lasciare perplessi.

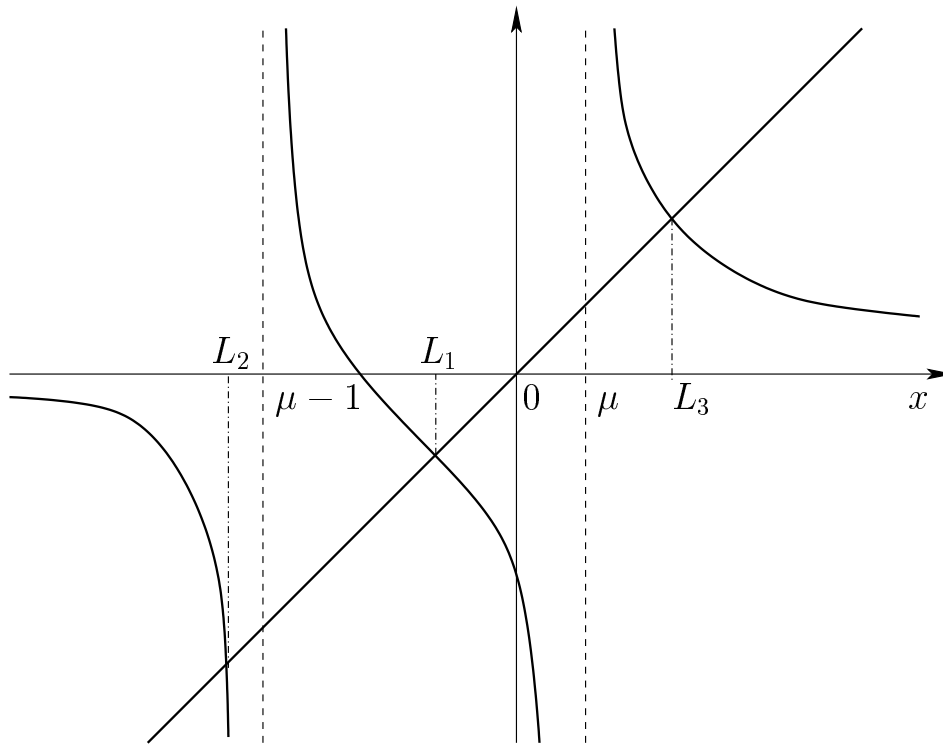


Figura 7.3. Studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione (7.11). I punti di equilibrio collineari sono le intersezioni tra la funzione identità al primo membro e la funzione al secondo membro, che ha l'andamento qualitativo illustrato in figura.

primari, L_2 la soluzione a sinistra del punto $-1 + \mu$ ed L_3 la soluzione a destra del punto μ .

Veniamo ora alla soluzione dell'equazione (7.11). Conviene introdurre la variabile δ definita come

$$(7.12) \quad \delta = x + 1 - \mu ,$$

ovvero come la distanza con segno del punto di equilibrio dalla posizione del corpo di massa μ . Avremo dunque $r_1 = |\delta|$ e $r_2 = |1 - \delta|$. Per sostituzione nella (7.11) si ricava

$$(7.13) \quad \delta + \mu - 1 = \frac{1 - \mu}{(\delta - 1)|\delta - 1|} + \frac{\mu}{\delta|\delta|} ,$$

ed è opportuno considerare separatamente tre casi

(i) $0 < \delta < 1$, ovvero il caso del punto L_1 . L'equazione (7.13) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = -\frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} + \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

Si ricordi però che il sistema di riferimento è in rotazione. Gli equilibri corrispondono ai punti in cui l'attrazione gravitazionale dei primari annulla la forza centrifuga dovuta alla rotazione.

e risolvendo rispetto a μ otteniamo

$$(7.14) \quad \mu = \frac{\delta^3(3 - 3\delta + \delta^2)}{1 - 2\delta + \delta^2 + 2\delta^3 - \delta^4} ,$$

(ii) $\delta < 0$, ovvero il caso del punto L_2 . L'equazione (7.13) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = -\frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} - \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

e risolvendo rispetto a μ otteniamo

$$(7.15) \quad \mu = -\frac{\delta^3(3 - 3\delta + \delta^2)}{1 - 2\delta + \delta^2 - 2\delta^3 + \delta^4} .$$

(iii) $\delta > 1$, ovvero il caso del punto L_3 . L'equazione (7.13) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = \frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} + \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

e risolvendo rispetto a μ otteniamo

$$(7.16) \quad \mu = -\frac{\delta^2(2 - 3\delta + 3\delta^2 - \delta^3)}{1 - 2\delta - \delta^2 + 2\delta^3 - \delta^4} .$$

Il grafico di μ in funzione di δ è riportato in figura 7.4.

Il lettore osserverà che la soluzione trovata ci dà μ come funzione di δ , e non, come sarebbe stato più desiderabile, δ oppure x come funzione di μ . Tuttavia la forma stessa delle equazioni lascia intendere che invertire le funzioni è laborioso, perché si tratta di risolvere equazioni algebriche di quinto grado. È però interessante calcolare, anche in modo approssimato, la posizione dei punti L_1 e L_2 per valori piccoli di μ , che è il caso di interesse per la dinamica planetaria. A tal fine si può procedere a sviluppare in serie di potenze le (7.14) e (7.15) nell'intorno di $\delta = 0$, e si ottiene, rispettivamente,

$$\mu = 3\delta^3 + 3\delta^4 + 4\delta^5 + O(\delta^6)$$

per il punto L_1 , e

$$\mu = -3\delta^3 - 3\delta^4 - 4\delta^5 + O(\delta^6)$$

per il punto L_2 . Le due ultime equazioni si possono risolvere in serie di potenze di $\mu^{1/3}$, e nell'approssimazione che abbiamo scelto per lo sviluppo otteniamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{3^{1/3}}{3}\mu^{1/3} - \frac{3^{2/3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + O(\mu^{4/3}) \quad \text{per } \delta \geq 0 , \quad \text{punto } L_1 , \\ \delta &= -\frac{3^{1/3}}{3}\mu^{1/3} - \frac{3^{2/3}}{9}\mu^{2/3} + \frac{1}{27}\mu + O(\mu^{4/3}) \quad \text{per } \delta < 0 , \quad \text{punto } L_2 . \end{aligned}$$

Si noti bene che occorre scrivere due sviluppi distinti a seconda del segno.

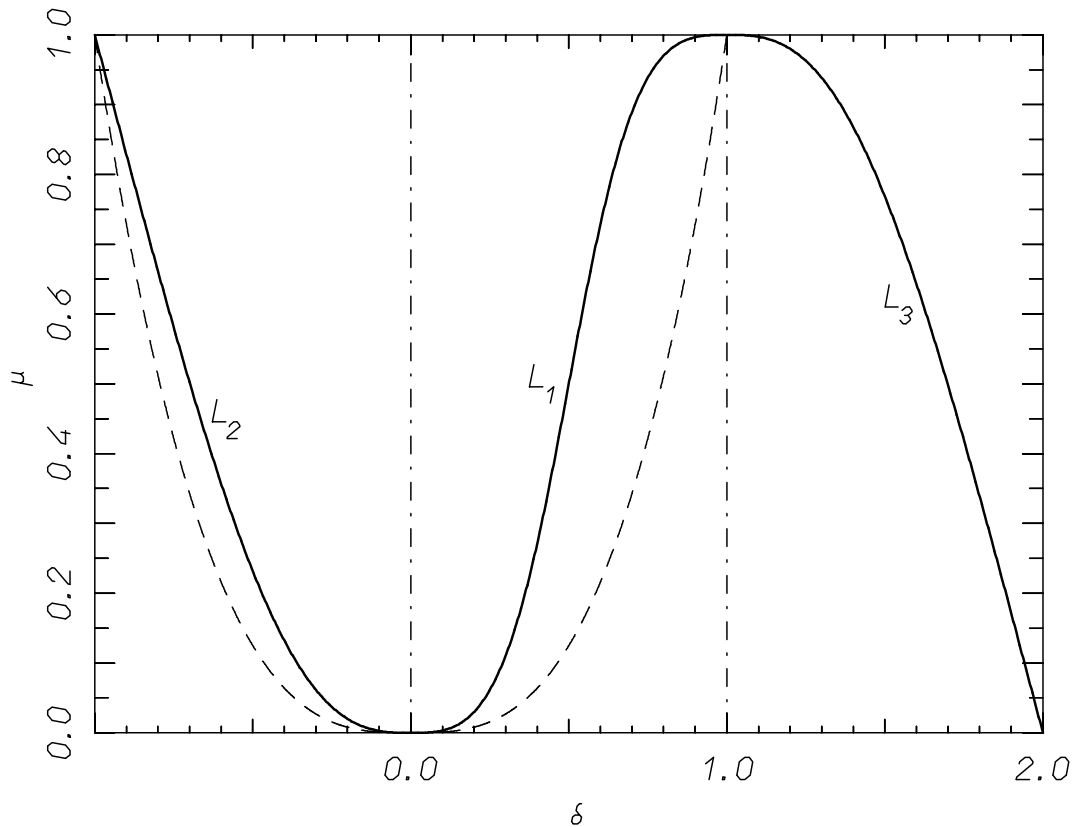


Figura 7.4. La posizione dei punti di equilibrio collineari rispetto ai primari al variare del parametro μ nell'intervallo $[0, 1]$ (in ordinate). Le curve continue danno le posizioni dei tre punti di equilibrio lagrangiani. Le curve tratteggiate sono il grafico della funzione $\mu = |\delta|^3$, che sarà utile più avanti, nel paragrafo 7.4.2, per discutere la stabilità degli equilibri. I segmenti verticali in tratto-punto rappresentano le posizioni dei primari.

7.2.3 Equilibri triangolari

Poniamo ora nella seconda delle (7.10)

$$(7.17) \quad 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 .$$

La prima delle (7.10) si riduce a $\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = 0$, il che implica $r_1 = r_2$. Per sostituzione nella (7.17) si trova allora $r_1 = r_2 = 1$, il che significa che i punti di equilibrio si devono trovare sull'intersezione di due circonferenze di raggio unitario centrate nei primari. Si ottengono così due punti distinti, ciascuno dei quali forma un triangolo equilatero coi primari. Le coordinate dei punti ed i rispettivi momenti sono

$$x = -\frac{1}{2} + \mu , \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad p_x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad p_y = x = -\frac{1}{2} + \mu .$$

Si denotano rispettivamente con L_4 e L_5 la soluzione con $y > 0$ e con $y < 0$.

7.3 Studio qualitativo del caso circolare ristretto

Per uno studio più generale della dinamica del problema circolare ristretto si fa uso della conoscenza di una costante del moto, che è l'Hamiltoniana (7.5). Questa viene detta *costante di Jacobi*.³ Il procedimento tradizionale consiste nel far uso della conoscenza di un integrale primo per mettere in evidenza le limitazioni al movimento del planetoido nello spazio delle configurazioni.

7.3.1 La costante di Jacobi come funzione di posizione e velocità

La prima operazione da compiere è la riscrittura della costante di Jacobi sostituendo le velocità ai momenti. Si vedrà in seguito l'utilità di tale operazione. Si parte dunque dall'Hamiltoniana (7.5), che riscriviamo per comodità

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}},$$

e si sostituiscono i momenti p_x, p_y, p_z con le velocità, facendo uso delle equazioni canoniche

$$\dot{x} = p_x + y, \quad \dot{y} = p_y - x, \quad \dot{z} = p_z.$$

Si ottiene così la funzione

$$(7.18) \quad \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}},$$

³ Il fatto di dare un nome particolare ad una tal costante del moto è certamente sorprendente per chi, avendo una certa consuetudine col formalismo hamiltoniano, considera acquisito il fatto che l'Hamiltoniana di un sistema autonomo sia un integrale primo. Se ne comprende invece la ragione se si considera lo sviluppo storico delle nostre conoscenze. Gli integrali primi classici del problema degli N corpi sono la quantità di moto o momento, il momento della quantità di moto o momento angolare, e l'energia. In generale non se ne conoscono altri. Nel caso del problema ristretto si è già tenuto conto della conservazione della quantità di moto e del momento angolare nella scelta del riferimento con origine nel baricentro e nella scelta di eliminare l'azione del planetoido sui primari, vincolando questi ultimi a muoversi su un'orbita kepleriana. Non vi è invece conservazione dell'energia, perché il sistema che si considera non è autonomo: il planetoido si muove sotto l'azione di due masse il cui moto è noto e del tutto indipendente dalla presenza del planetoido. Tale azione si concretizza in una dipendenza dal tempo nelle equazioni. L'esistenza di un integrale primo è quindi un risultato da stabilire in modo indipendente dalla conoscenza degli integrali primi classici. È invece connesso col fatto che nella formulazione lagrangiana della dinamica si può associare ad una Lagrangiana un integrale primo che solo nel caso di un sistema meccanico indipendente dal tempo è riconducibile direttamente all'energia. Nell'ambito del formalismo hamiltoniano tale fatto in qualche modo si banalizza, perché l'integrale primo altro non è che l'Hamiltoniana del sistema.

che è l'integrale primo di Jacobi nella forma in cui viene scritto abitualmente nei trattati di Meccanica Celeste.

7.3.2 Le superfici di Hill

La conoscenza dell'integrale di Jacobi ci mette in condizione di svolgere un primo studio generale di tipo qualitativo. Alla base di tale studio vi è l'osservazione che $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ non può essere negativo. Ciò implica che il movimento è possibile solo nelle regioni dello spazio in cui vale

$$\Phi \geq -\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}},$$

dove Φ viene determinato mediante i dati iniziali. Diventa quindi significativo considerare le superfici di livello descritte dall'equazione

$$(7.19) \quad \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}} = C.$$

Tali superfici sono quelle su cui si annulla la velocità del planetotide.

L'intersezione delle superfici di Hill col piano delle orbite dei primari è rappresentata in figura 7.5. La figura è significativa quando al planetotide si assegnino dati iniziali con posizione e velocità nel piano dei primari, in quanto in tal caso il movimento avviene nel piano stesso e ci si riconduce di fatto allo studio di un sistema a due gradi di libertà. Le zone con un tono di grigio più scuro corrispondono a valori più bassi, nelle quali l'orbita resta confinata. Passiamo a discutere alcuni aspetti rilevanti.

La forma delle superfici di Hill nello spazio si può immaginare osservando i vari riquadri della figura 7.6. Vi è rappresentata l'intersezione con diversi piani parametrizzati dalla coordinata z , ortogonale al piano dell'orbita.

Veniamo alla discussione della dinamica nel caso piano. Si osserva anzitutto che intorno ad ambedue i primari c'è una zona molto scura, che corrisponde a valori bassi della funzione. Si tratta di regioni in cui il moto è necessariamente confinato in prossimità dei primari: si usa talvolta il termine *sfera d'influenza*. Per comprenderne il significato si pensi ad esempio al sistema Terra-Luna, e si consideri il movimento di una navicella spaziale. In tal caso la Terra è il primario di massa maggiore rappresentato a destra nella figura, e la Luna si trova a sinistra. La navicella si trova inizialmente sulla superficie della Terra, e possiamo pensarla dotata di una determinata velocità iniziale (supponendo ad esempio di lanciarla, come nel romanzo di Jules Verne^[96], sparandola con un cannone). Il valore di C altro non è che quello della funzione $\Phi(x, y, 0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{0})$ data nella (7.18) (il lancio avviene con velocità iniziale nel piano dell'orbita Terra-Luna) con il raggio della Terra come dato iniziale e velocità assegnata. Supponiamo che la curva di livello corrispondente a quel valore di C abbia una componente connessa simile a quella che racchiude l'area più scura intorno al primario di massa maggiore (a destra nella figura). In tal caso la curva rappresenta la massima distanza dalla Terra raggiungibile dalla navicella: essa è costretta ad orbitare intorno alla Terra. Si osservi che a tale valore di C corrisponde anche una regione intorno alla Luna, in cui la navicella sarebbe confinata se partisse dalla superficie della Luna con lo stesso valore

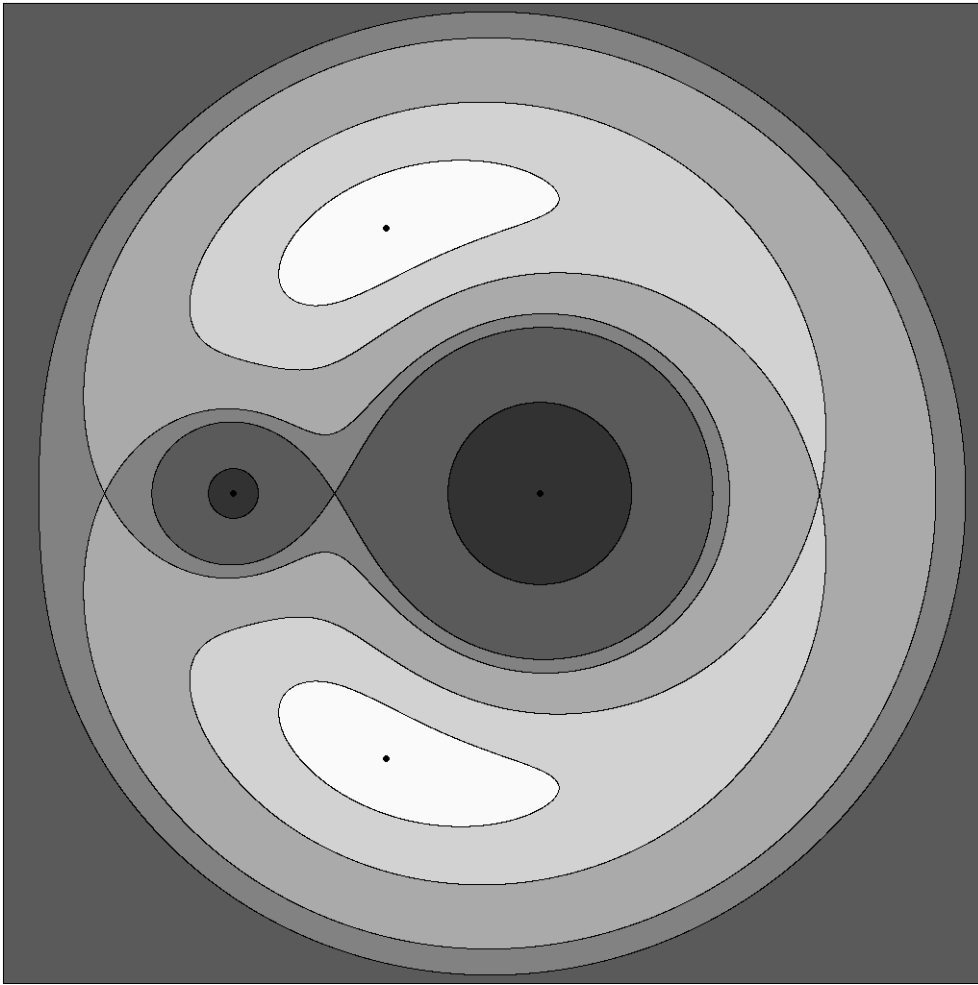
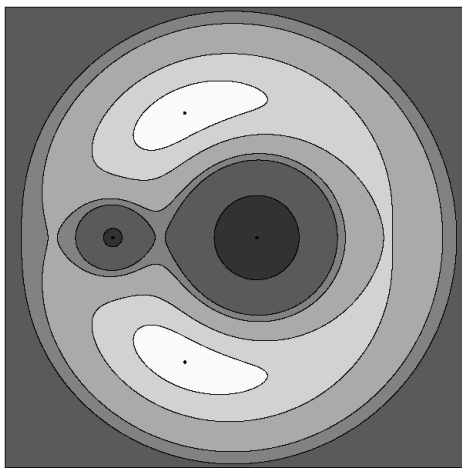


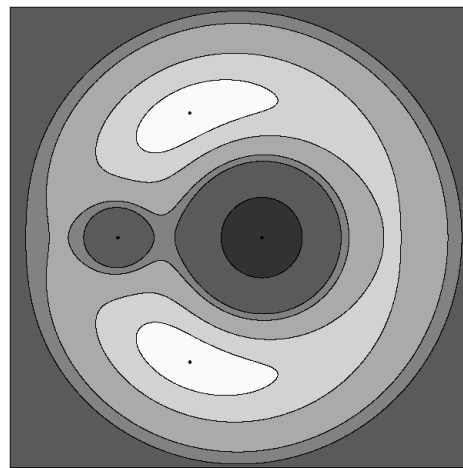
Figura 7.5. Le intersezioni delle superfici di Hill con il piano delle orbite dei primari. Al fine di rendere intelligibile la figura ho scelto $\mu = 0.15$, decisamente alto rispetto a quanto si presenta effettivamente nel nostro sistema solare. I toni di grigio più scuri corrispondono ai valori più bassi della funzione. Nel grafico sono marcate con dei punti le posizioni dei primari e quelle dei punti L_4 e L_5 ; questi ultimi corrispondono a dei massimi per la funzione che stiamo considerando. I punti di equilibrio collineari sono quelli in cui le curve di livello si intersecano trasversalmente.

di C . Le due regioni sono disgiunte, sicché non vi è modo di passare dall'una all'altra restando nel piano dell'orbita Terra-Luna.

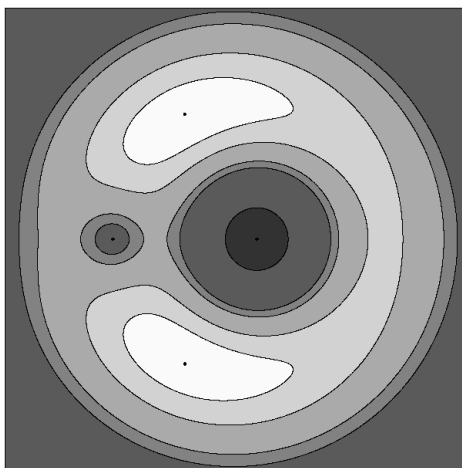
Per un valore maggiore di C si ha la curva a forma di 8 con un punto di autointersezione in corrispondenza al punto di equilibrio lagrangiano L_1 (compreso tra la Terra e la Luna). Tale curva delimita le regioni di influenza dei due primari. Il passaggio da un'orbita terrestre ad una lunare è possibile se C ha un valore appena più elevato di quello corrispondente a questa curva, e dunque se la velocità iniziale è sufficientemente elevata. Sulla base di questa descrizione si può immaginare che un volo spaziale dalla Terra alla luna, spiegato in termini alquanto rozzi, richieda tre fasi: (i) l'immissione



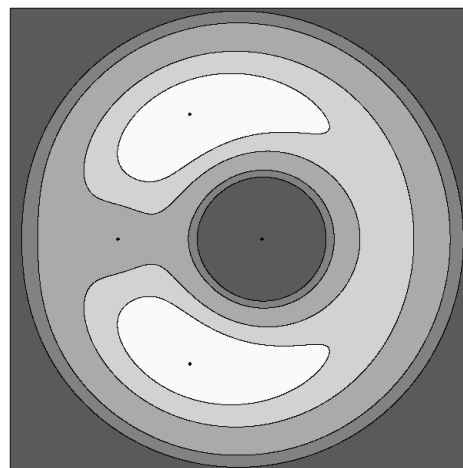
(a) $z = 0.05$



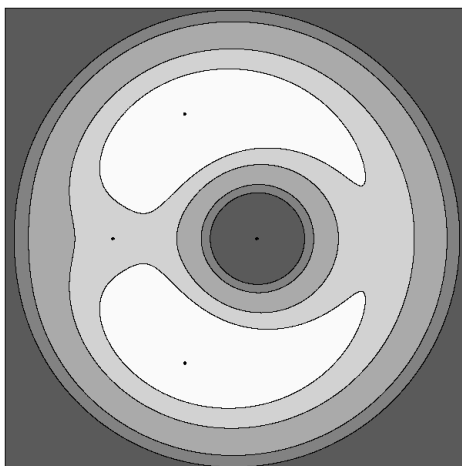
(b) $z = 0.1$



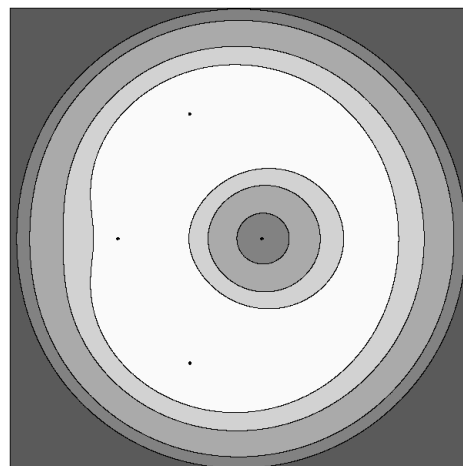
(c) $z = 0.2$



(d) $z = 0.3$



(e) $z = 0.4$



(f) $z = 0.5$

Figura 7.6. Le curve di Hill a diverse altezze nello spazio, per $\mu = 0.15$. I livelli tracciati ed i toni di grigio corrispondono a quelli della figura 7.5.

dopo il lancio in un'orbita terrestre; (ii) un incremento di velocità che consenta il superamento del punto lagrangiano L_1 ; (iii) un decremento di velocità che immetta la navicella in orbita lunare. Questo, in effetti, è lo schema che è stato seguito in passato per l'immissione di satelliti in orbita lunare.⁴

Se poi si considera, nella figura, il punto lagrangiano L_2 (a sinistra della Luna) si osserva una curva di livello che si autointerseca proprio in quel punto, e delimita una regione di influenza del sistema Terra–Luna che una ipotetica navicella potrebbe abbandonare solo a condizione di avere velocità sufficientemente elevata rispetto al sistema di riferimento rotante. Infine, un fenomeno analogo si ha per il punto collineare L_3 (a destra della Terra).

I punti di equilibrio triangolari corrispondono a dei massimi per la funzione Φ .

7.4 La dinamica nell'intorno dei punti lagrangiani

Veniamo ora ad una trattazione analitica del problema dei punti di equilibrio lagrangiani. Il procedimento più immediato consiste nello sviluppare l'Hamiltoniana in serie di potenze nell'intorno degli equilibri. Nel paragrafo 7.4.1 procederemo a porre le basi necessarie per tale sviluppo.

Si passa poi allo studio della stabilità in approssimazione lineare. Precisamente si introduce un'approssimazione che consiste nel considerare solo la parte quadratica dell'Hamiltoniana, il che equivale a linearizzare le equazioni nell'intorno degli equilibri. Questa parte è ormai da considerarsi classica, e conduce alla conclusione che i punti collineari sono instabili, mentre i punti triangolari risultano essere stabili se il parametro μ è abbastanza piccolo.

L'approssimazione lineare si rivela insufficiente per dimostrare la stabilità effettiva dei punti triangolari. Il problema è tutt'altro che semplice: avremo bisogno di diversi strumenti tecnici che svilupperemo solo nei capitoli successivi. Anticipo fin d'ora che il problema della stabilità non lineare dei punti triangolari è questione a tutt'oggi irrisolta.

7.4.1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana nell'intorno dell'equilibrio

Riscriviamo anzitutto l'Hamiltoniana del problema ristretto nella sua forma più semplice, ossia la (7.5) che riscriviamo per comodità nella forma

$$(7.20) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

⁴ In tempi più recenti, grazie anche all'evoluzione delle nostre conoscenze sugli aspetti generali della dinamica, si è compreso che si possono seguire orbite che sfruttano le varietà stabili ed instabili dei punti lagrangiani collineari, inclusi quelli del sistema Terra–Sole, in modo da diminuire il salto di energia necessario per passare dalla sfera di influenza della Terra a quella della Luna. Ciò consente un considerevole risparmio di energia, e quindi di carburante necessario per effettuare la missione, a patto di accettare tempi di viaggio decisamente più lunghi. Non mi soffermerò su questi aspetti, pur interessanti.

dove

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

sono le distanze tra il planetoido ed i primari. Denotiamo poi con $x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}}$ le coordinate del punto di equilibrio. Dai paragrafi 7.2.1—7.2.3 sappiamo che:

- (i) vi sono tre equilibri collineari L_1, L_2, L_3 sulla retta $y_{\text{eq}} = z_{\text{eq}} = 0$, per i quali x_{eq} è una radice dell'equazione (7.11), che riscriviamo per comodità

$$x = \frac{1 - \mu}{|x - \mu|(x - \mu)} + \frac{\mu}{|x + 1 - \mu|(x + 1 - \mu)}.$$

- (ii) vi sono due equilibri triangolari nei punti di coordinate $z_{\text{eq}} = 0$ e

$$\begin{aligned} x_{\text{eq}} &= -\frac{1}{2} + \mu, & y_{\text{eq}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{per } L_4, \\ x_{\text{eq}} &= -\frac{1}{2} + \mu, & y_{\text{eq}} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{per } L_5. \end{aligned}$$

- (iii) i momenti nei punti di equilibrio sono $p_x = -y_{\text{eq}}, p_y = x_{\text{eq}}$ e $p_z = 0$.

Eseguiamo anzitutto una traslazione che porti l'equilibrio nell'origine

$$\begin{aligned} x' &= x - x_{\text{eq}}, & p'_x &= p_x + y_{\text{eq}}, \\ y' &= y - y_{\text{eq}}, & p'_y &= p_y - x_{\text{eq}}, \\ z' &= z, & p'_z &= p_z, \end{aligned}$$

sicché le variabili z, p_z restano immutate. La trasformazione è evidentemente canonica, e l'Hamiltoniana trasformata si scrive, rimuovendo gli apici per semplificare le notazioni ed ignorando i termini costanti,

$$(7.21) \quad H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - xx_{\text{eq}} - yy_{\text{eq}} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2},$$

dove r_1, r_2 sono ancora le distanze tra il planetoido ed i primari, che in queste coordinate si scrivono

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x_{\text{eq}} - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 + 2x(x_{\text{eq}} - \mu) + 2yy_{\text{eq}} + x^2 + y^2 + z^2, \\ r_2^2 &= (x_{\text{eq}} + 1 - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 + 2x(x_{\text{eq}} + 1 - \mu) + 2yy_{\text{eq}} + x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Denotiamo

$$(7.22) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varrho_1^2 = (x_{\text{eq}} - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2, \quad \varrho_2^2 = (x_{\text{eq}} + 1 - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2,$$

e riscriviamo r_1 e r_2 nella forma

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \varrho_1^2 \left[1 - 2 \frac{r}{\varrho_1} \cdot \frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} + \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^2 \right], \\ r_2^2 &= \varrho_2^2 \left[1 - 2 \frac{r}{\varrho_2} \cdot \frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} + \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

In tal modo si vede che gli inversi delle distanze si sviluppano in serie di potenze mediante i polinomi di Legendre⁵ $P_k(\cdot)$, ossia

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\varrho_1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^k P_k\left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1}\right),$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\varrho_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^k P_k\left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2}\right).$$

È bene fermarsi a riflettere un momento su queste ultime espressioni per rendersi conto che sia $\left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^k P_k\left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1}\right)$ che $\left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^k P_k\left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2}\right)$ sono polinomi omogenei di grado k nelle variabili x, y, z , sicché abbiamo effettivamente a che fare con uno sviluppo in serie di potenze. Ricordiamo infatti che $P_k(\zeta)$ è un polinomio di grado k nel suo argomento ζ e che contiene solo potenze della stessa parità di k . Allora, riducendo all'essenziale la forma delle espressioni in modo da tener conto delle sole quantità variabili x, y, r , otteniamo una somma di termini della forma

$$r^k \left(\frac{x - y}{r}\right)^{k-2j} = r^{2j} (x - y)^{k-2j}, \quad j = 0, \dots, \lfloor k/2 \rfloor.$$

Poiché r compare sempre con una potenza pari questa espressione è un polinomio omogeneo di grado k in x, y, z , come asserito.

Riscriviamo ora la forma completa dello sviluppo dell'Hamiltoniana in polinomi di Legendre, ossia

$$(7.23) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - xx_{\text{eq}} - yy_{\text{eq}} \\ - \frac{(1 - \mu)}{\varrho_1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^k P_k\left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1}\right) \\ - \frac{\mu}{\varrho_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^k P_k\left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2}\right).$$

Questa è già, di fatto, una serie di potenze, e dobbiamo solo riordinarla per polinomi omogenei, per una questione di comodità. Ora, il contributo di grado zero è un termine costante che possiamo ignorare, ed i termini di grado 1 si devono necessariamente annullare, perché stiamo trattando lo sviluppo nell'intorno di un equilibrio dove tutte le derivate di H si annullano. Restano dunque i termini di secondo grado, che raccogliamo in

$$(7.24) \quad H_0(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x \\ - \frac{(1 - \mu)}{\varrho_1} \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^2 P_2\left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1}\right) \\ - \frac{\mu}{\varrho_2} \left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^2 P_2\left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2}\right)$$

⁵ Per una breve esposizione, sufficiente agli scopi di queste note, si veda l'appendice B.

ed i termini di grado superiore al secondo, che denotiamo

$$(7.25) \quad H_s(x, y, z) = -\frac{(1-\mu)}{\varrho_1} \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^s P_s\left(\frac{x(\mu-x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1}\right) - \frac{\mu}{\varrho_2} \left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^s P_s\left(-\frac{x(\mu-x_{\text{eq}}-1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2}\right).$$

Concludiamo così che l'Hamiltoniana del problema circolare ristretto può svilupparsi in serie di potenze nell'intorno di un punto di equilibrio lagrangiano nella forma

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

dove H_0 è un'espressione quadratica in x, y, z, p_x, p_y, p_z e H_s , per $s \geq 1$ è un polinomio omogeneo di grado $s+2$ nelle sole coordinate x, y, z .

Per il calcolo esplicito dello sviluppo dell'Hamiltoniana, almeno per i termini di ordine più basso, si può far uso delle espressioni dei polinomi di Legendre riportate in appendice B, § B.1.4. Riporto qui solo il calcolo per la parte quadratica, in quanto in questo momento non è di grande utilità scrivere un'espressione più esplicita per i termini di ordine superiore.

$$(7.26) \quad H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + Cxy + \frac{D}{2}z^2$$

dove

$$(7.27) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \frac{3(1-\mu)(\mu-x_{\text{eq}})^2}{\varrho_1^5} - \frac{3\mu(\mu-x_{\text{eq}}-1)^2}{\varrho_2^5} \\ B &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \frac{3(1-\mu)y_{\text{eq}}^2}{\varrho_1^5} - \frac{3\mu y_{\text{eq}}^2}{\varrho_2^5} \\ C &= \frac{3(1-\mu)(\mu-x_{\text{eq}})y_{\text{eq}}}{\varrho_1^5} + \frac{3\mu(\mu-x_{\text{eq}}-1)y_{\text{eq}}}{\varrho_2^5} \\ D &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} \end{aligned}$$

Da questa espressione vediamo immediatamente che l'Hamiltoniana si disaccoppia in due parti, una che coinvolge le variabili x, y, p_x, p_y , l'altra che coinvolge solo z, p_z . Questa seconda parte poi ha la forma alquanto semplice

$$(7.28) \quad H_0^{(z)} = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{D}{2}z^2.$$

Poiché D è certamente positivo, per come è definito nella (7.27), vediamo immediatamente che mediante la trasformazione canonica

$$(7.29) \quad z = \frac{\zeta}{\sqrt{\omega_z}}, \quad p_z = \sqrt{\omega_z}p_\zeta, \quad \omega_z = \sqrt{D}$$

l'Hamiltoniana (7.28) si trasforma in

$$H_0^{(z)} = \frac{\omega_z}{2}(\zeta^2 + p_\zeta^2),$$

che riconosciamo immediatamente come descrivente il moto di un oscillatore armonico di frequenza ω_z . Questo si applica a tutti i punti di equilibrio lagrangiani.

Resta invece da studiare la dinamica della parte restante dell'Hamiltoniana quadratica, ossia

$$(7.30) \quad H_0^{(x,y)} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + Cxy .$$

Questo studio verrà svolto nei prossimi paragrafi da 7.4.2 a 7.4.5. Nel successivo paragrafo 7.4.6 torneremo a considerare l'Hamiltoniana completa (7.26) per il modello in tre dimensioni.

7.4.2 L'approssimazione lineare nell'intorno dei punti di equilibrio lagrangiani

Lo studio dell'Hamiltoniana (7.30) viene tipicamente affrontato scrivendo le equazioni di Hamilton ed applicando i metodi classici, che risalgono a Lagrange⁶, per ridurre il sistema lineare ad una forma normale. In vista degli sviluppi successivi preferisco però porre il problema della riduzione dell'Hamiltoniana quadratica ad una *forma normale* che ne renda semplice lo studio. Si tratta di un problema ben noto; il lettore troverà nell'appendice A una discussione dettagliata quanto basta per gli scopi di queste note.

Raccogliamo le variabili canoniche in un unico vettore $\mathbf{z} = (x, y, p_x, p_y)$, sicché l'Hamiltoniana quadratica si scrive⁷

$$H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{C} \mathbf{z} ,$$

dove \mathbf{C} è la matrice simmetrica

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A & C & 0 & -1 \\ C & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in cui compaiono le costanti A, B, C definite nella (7.27). Le equazioni di Hamilton assumono la forma $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}$ dove

$$(7.31) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -A & -C & 0 & 1 \\ -C & -B & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Conviene anche scrivere una volta per tutte il polinomio caratteristico (denotando con \mathbf{I} la matrice identità)

$$(7.32) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^4 + (2 + A + B)\lambda^2 + (1 - A)(1 - B) - C^2 .$$

⁶ Si veda [57], § 30–35.

⁷ Uso il formalismo in cui si considera \mathbf{z} come un vettore colonna ed il suo trasposto \mathbf{z}^\top è un vettore riga, sicché la forma quadratica si scrive come prodotto righe per colonne di vettori e matrici.

Occorre ora sostituire in questo polinomio le coordinate dei punti di equilibrio, e calcolarne le radici al fine di classificare i diversi equilibri. Per questo, al fine di semplificare il calcolo, converrà separare lo studio dei punti collineari da quello dei punti triangolari.

7.4.3 Stabilità dei punti collineari

Osserviamo subito che basta studiare la stabilità dei punti L_1 ed L_2 , permettendo a μ di assumere qualunque valore nell'intervallo aperto $(0, 1)$. Ciò è dovuto alla simmetria: studiare la stabilità del punto L_3 per un dato μ è equivalente a studiare la stabilità di L_2 per $1 - \mu$.

Sostituiamo ora $y_{\text{eq}} = 0$ sia nell'espressione (7.22) di ϱ_1, ϱ_2 , da cui otteniamo

$$\varrho_1 = |x_{\text{eq}} - \mu|, \quad \varrho_2 = |x_{\text{eq}} + 1 - \mu|,$$

sia, unitamente a queste due ultime espressioni, nelle (7.27), ed abbiamo

$$(7.33) \quad B = \frac{1 - \mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}, \quad A = -2B, \quad C = 0,$$

sicché la matrice (7.31) del sistema di equazioni lineari diventa

$$(7.34) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2B & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -B & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ed il polinomio caratteristico (7.32) si trasforma in

$$\lambda^4 + (2 - B)\lambda^2 + (1 + 2B)(1 - B).$$

Nell'espressione (7.33) di B dobbiamo ora sostituire i valori di μ e x_{eq} che corrispondono agli equilibri. Conviene anche sostituire x_{eq} con la quantità

$$\delta = x_{\text{eq}} + 1 - \mu$$

come abbiamo già fatto nella (7.12), sicché abbiamo

$$(7.35) \quad B = \frac{1 - \mu}{|\delta - 1|^3} + \frac{\mu}{|\delta|^3}.$$

Ricordiamo anche che μ e δ risultano legati tra loro dalle relazioni (7.14) per L_1 e (7.15) per L_2 .

Veniamo alla discussione dell'equazione caratteristica, che è di fatto un'equazione biquadratica, e consideriamo λ^2 come incognita. Mostriamo che l'equazione caratteristica per L_1 e L_2 ammette due radici $-\omega^2, \lambda^2$ reali e di segno opposto per tutti i valori di $\mu \in (0, 1)$. A tal fine basta mostrare che l'ordinata all'origine del polinomio caratteristico è negativa, ovvero che $(1 + 2B)(1 - B) < 0$. Infatti, dalla (7.35) si evince che ambedue i termini che contribuiscono a B danno contributo positivo, e basta mostrare che vale certamente $\mu/|\delta|^3 > 1$. Per piccoli valori di $|\delta|$ ciò è vero, essendo per le (7.14) e (7.15) $\mu = 3|\delta|^3 + O(|\delta|^4)$. Per mostrare che la stessa disuguaglianza vale su tutto l'intervallo $|\delta| < 1$ si può ricorrere al tracciamento del grafico mediante

calcolo numerico; si ottiene così la figura 7.4 ove è riportato in tratteggio il grafico della funzione $|\delta|^3$, che giace sempre al di sotto del grafico di $\mu(\delta)$.

Con un breve calcolo possiamo anche ricavare gli autovalori, o meglio i loro quadrati, nella forma

$$\omega^2 = \frac{B - 2 - \sqrt{B(9B - 8)}}{2}, \quad \lambda^2 = \frac{B - 2 + \sqrt{B(9B - 8)}}{2}$$

Possiamo così concludere che per tutti i $\mu \in (0, 1)$ i punti collineari del problema ristretto circolare dei tre corpi nell'approssimazione lineare ammettono una coppia di autovalori $i\omega$, $-i\omega$ immaginari puri, ed una coppia di autovalori λ , $-\lambda$ reali. Di conseguenza il sistema lineare può rappresentarsi come il prodotto di un centro con una sella, ed è instabile. Ciò è sufficiente per concludere che anche il sistema non lineare è instabile.

7.4.4 Stabilità lineare per i punti triangolari

Qui restringeremo il nostro studio a valori di μ nell'intervallo $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, che basta per discutere il problema in modo completo. Occorre anzitutto sostituire nelle espressioni A , B , C date dalle (7.27) le coordinate degli equilibri che abbiamo ricavato nel paragrafo 7.2.3, ossia $x_{\text{eq}} = -\frac{1}{2} + \mu$, $y_{\text{eq}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Osservando che dalle (7.22) abbiamo $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, otteniamo

$$(7.36) \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{5}{4}, \quad C = \pm \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right),$$

dove il segno positivo e negativo si applicano rispettivamente ai punti L_4 ed L_5 .

Sostituendo questi valori nell'espressione (7.30) dell'Hamiltoniana otteniamo

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}y^2 + Cxy,$$

Le matrice A del sistema di equazioni lineari per il punto L_4 diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & -C & 0 & 1 \\ -C & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove C è la costante definita nella (7.36), sicché si tiene conto implicitamente anche del segno. L'equazione secolare si trasforma in

$$(7.37) \quad \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - C^2 = 0,$$

ovvero, sostituendo a C il suo valore in funzione di μ ,

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

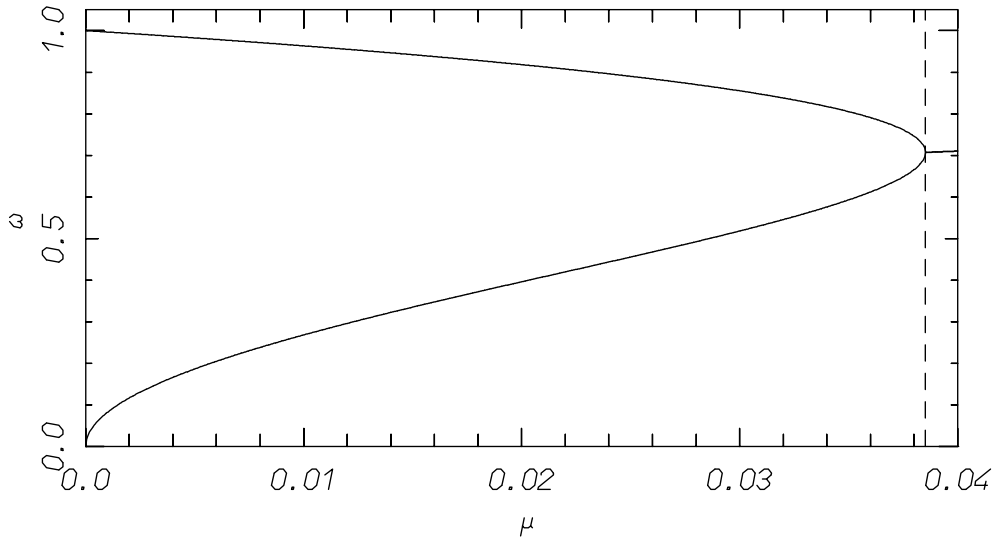


Figura 7.7. Le due frequenze di oscillazione ω_1, ω_2 in prossimità dei punti di equilibrio triangolari L_4 e L_5 per $0 \leq \mu \leq \mu^* \simeq 0.0385208965$. La retta tratteggiata verticale corrisponde al valore μ^* .

L'equazione è la stessa per ambedue i punti, ed è biquadratica. Risolvendola rispetto a λ^2 otteniamo

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} .$$

Osserviamo che vale $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1$. Il segno del discriminante $\Delta = 1 - 27\mu(1 - \mu)$ ci permette di distinguere due casi.

Per

$$(7.38) \quad 27\mu(1 - \mu) < 1, \quad 0 < \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.0385208965$$

l'equazione in λ^2 ha due radici reali ed ambedue negative. Di conseguenza il sistema linearizzato ammette due coppie di autovalori $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ immaginari puri. Nell'approssimazione lineare il sistema può rappresentarsi come il prodotto di due centri, e la dinamica è una combinazione di due oscillazioni di frequenze

$$(7.39) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}} .$$

Il sistema è dunque stabile nell'approssimazione lineare. Il grafico delle frequenze in funzione di μ è riportato in figura 7.7.

Per $27\mu(1 - \mu) > 1$, ovvero $\mu > \mu^*$, l'equazione in λ^2 ha due radici complesse coniugate, con parte reale negativa. L'equazione caratteristica ha quattro autovalori della forma $\pm\sigma \pm i\omega$, con

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{27\mu(1 - \mu)} - 1} , \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{27\mu(1 - \mu)} + 1} .$$

Nell'approssimazione lineare lo spazio delle fasi si decompone nel prodotto di due piani corrispondenti alle coppie di autovalori $\sigma \pm i\omega$ e $-\sigma \pm i\omega$. La dinamica sul primo piano

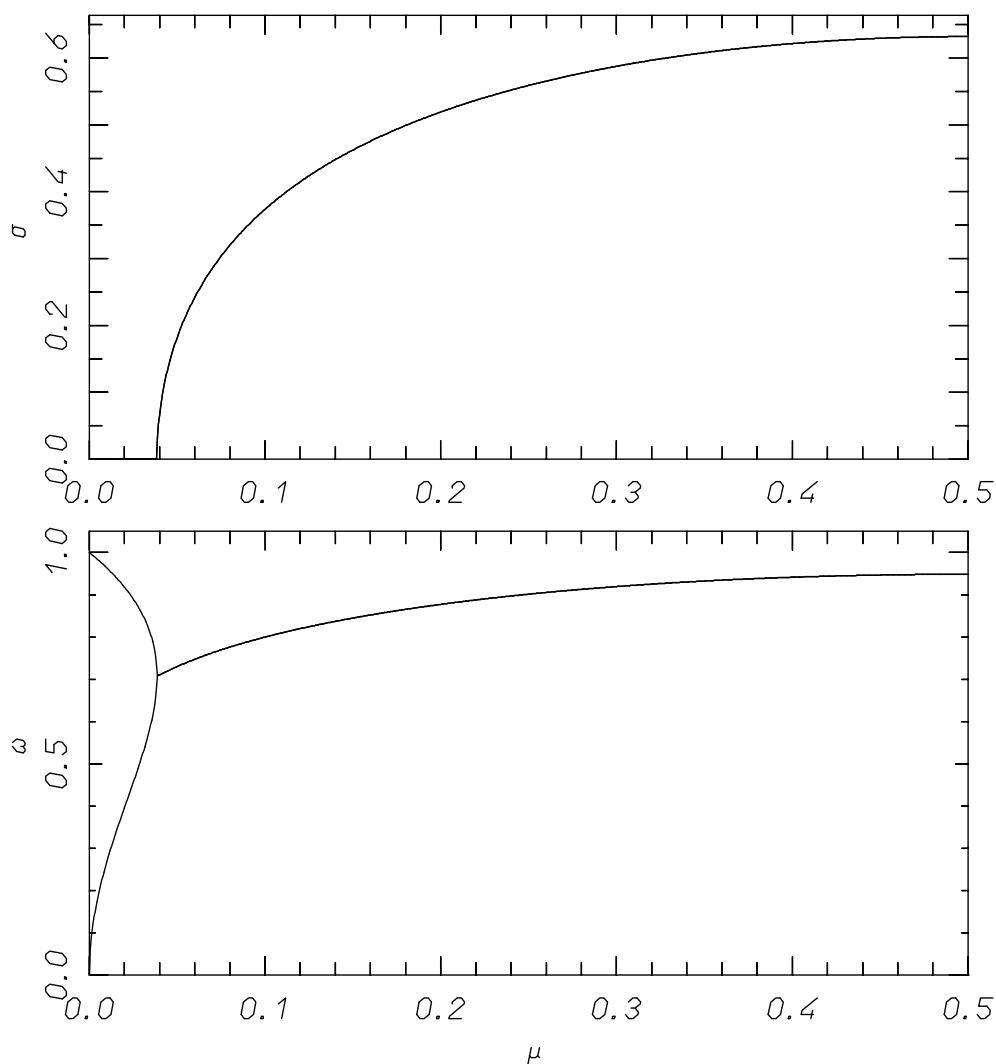


Figura 7.8. La parte reale σ (sopra) e la parte immaginaria ω (sotto) degli autovalori dell'equazione caratteristica in prossimità dei punti L_4 e L_5 . Per $\mu < \mu^* \simeq 0.0385208965$ gli autovalori sono immaginari puri, e si hanno due frequenze ω_1, ω_2 distinte, come illustrato in modo più dettagliato in figura 7.7. Per $\mu > \mu^*$ gli autovalori hanno la forma $\pm\sigma \pm i\omega$.

è quella di un fuoco instabile; quella sul secondo piano è un fuoco stabile. Il punto di equilibrio è instabile nell'approssimazione lineare, e ciò è sufficiente per concludere che il sistema non lineare è anch'esso instabile.

La figura 7.8 riporta in sintesi il comportamento delle parti reali ed immaginarie degli autovalori dell'equazione caratteristica per tutto l'intervallo $0 \leq \mu \leq 1/2$.

7.4.5 Forma normale dell'Hamiltoniana nell'intorno dei punti triangolari

Seguendo lo schema del paragrafo A.2.6 occorre ordinare in modo conveniente gli

autovalori della matrice A , cosa che facciamo scrivendoli come

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{16C^2 - 23}}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{-2 - \sqrt{16C^2 - 23}}{4}}, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2.$$

Occorre poi determinare gli autovettori ed allinearli in colonna per costruire la matrice M che pone il sistema lineare in forma normale. A tal fine si può osservare che a ciascun autovalore λ_j di A corrisponde l'autovettore

$$\mathbf{w}_j = (-4C + 8\lambda_j, -3 + 4\lambda_j^2, 3 - 4C\lambda_j + 4\lambda_j^2, -4C + 5\lambda_j + 4\lambda_j^3)^\top$$

(la trasposizione ricorda che stiamo considerando un vettore colonna). Tenuto conto che $\lambda_{j+2} = -\lambda_j$ si calcola poi

$$\mathbf{w}_j^\top \mathbf{J} \mathbf{w}_{j+2} = -2\lambda_j(16\lambda_j^4 - 24\lambda_j^2 - 39 + 16C^2), \quad j = 1, 2,$$

che possiamo riscrivere come

$$(7.40) \quad \mathbf{w}_j^\top \mathbf{J} \mathbf{w}_{j+2} = D_j, \quad D_j = -8\lambda_j(8\lambda_j^4 - 2\lambda_j^2 - 3), \quad j = 1, 2$$

avendo eliminato la costante C grazie all'equazione secolare (7.37).

Si costruisce infine la matrice

$$M = \left(\frac{\mathbf{w}_1}{D_1}, \frac{\mathbf{w}_2}{D_2}, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \right)$$

allineando in colonna gli autovettori \mathbf{w}_j , con i primi due divisi per le costanti D_j appena calcolate. Questa matrice è симплекtica, e pone l'Hamiltoniana $H_0^{(x,y)}$ nella sua forma normale, in variabili complesse,

$$H_0^{(x,y)} = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \lambda_2 \xi_2 \eta_2$$

Se lo riteniamo utile possiamo poi scrivere direttamente il flusso per le coordinate $\mathbf{z} = (x, y, p_x, p_y)$ originarie calcolando la matrice dell'operatore di evoluzione

$$U(t) = M \exp(t\Lambda) M^{-1}, \quad \exp(t\Lambda) = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_4}),$$

come spiegato nel paragrafo A.1.4.

Più interessante ai nostri fini è scrivere l'Hamiltoniana in forma normale reale nel caso in cui gli autovalori siano immaginari puri, e precisamente della forma (7.39). Seguiamo il procedimento illustrato nel paragrafo A.2.5.

Sostituendo $\lambda_j = i\omega_j$ nella (7.40) abbiamo

$$\mathbf{w}_j^\top \mathbf{J} \mathbf{w}_{j+2} = -2id_j, \quad d_j = 4\omega_j(8\omega_j^4 + 2\omega_j^2 - 3), \quad j = 1, 2.$$

Poiché poi $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$, ed osservando che per la nostra scelta (7.39) delle frequenze abbiamo $\omega_1^2 > 1/2$ e $\omega_2^2 < 1/2$, abbiamo che $d_1 > 0$ e $d_2 < 0$ (si noti che il termine tra parentesi si annulla per $\omega_j^2 = 1/2$). Sempre seguendo il procedimento del

paragrafo A.2.5 separiamo la parte reale ed immaginaria degli autovalori, scrivendo $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ con

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= (-4C, -3 - 4\omega_j^2, 3 - 4\omega_j^2, -4C)^\top \\ \mathbf{v}_j &= (8\omega_j, 0, -4C\omega_j, \omega_j(5 - 4\omega_j^2))^\top, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Tenendo poi conto del segno delle costanti d_j ordiniamo gli autovalori come

$$i\omega_1, \quad -i\omega_2, \quad -i\omega_1, \quad i\omega_2;$$

e costruiamo la matrice di trasformazione simplettica

$$(7.41) \quad \mathbb{T} = \left(\frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{d_1}}, \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{d_2}}, \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{d_1}}, \frac{-\mathbf{v}_2}{\sqrt{d_2}} \right)$$

Mediante tale trasformazione l'Hamiltoniana quadratica assume la forma

$$H_0^{(x,y)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2).$$

Si noti bene che la seconda frequenza ha segno negativo. Ciò ha un ruolo rilevante nella discussione sulla stabilità quando si tenga conto della parte non lineare dell'Hamiltoniana.

7.4.6 Il problema non lineare per i punti triangolari

Torniamo ora al problema spaziale. Lo studio del sistema non lineare può svolgersi facendo uso dello sviluppo in serie dell'Hamiltoniana nell'intorno di uno dei punti di equilibrio. Il caso di maggior interesse è evidentemente quello dei punti triangolari, proprio perché sono linearmente stabili, almeno per i valori di μ che soddisfano la condizione (7.37).

Il metodo di sviluppo si applica in generale ad uno qualunque degli equilibri lagrangiani. Come abbiamo visto nel paragrafo 7.4.1 l'Hamiltoniana può svilupparsi in serie di potenze come

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

dove H_s è un polinomio omogeneo di grado $s + 2$ nelle coordinate canoniche x, y, z, p_x, p_y, p_z . Il calcolo dello sviluppo può svolgersi ricorrendo ai polinomi di Legendre. L'espressione esplicita di H_0 è data dalla (7.24), mentre per $s > 0$ dovremo ricorrere alla (7.25). Tuttavia mantenere questa forma dello sviluppo non è molto utile: è necessario applicare la trasformazione che pone la parte quadratica dell'Hamiltoniana in forma normale. Il fatto di lavorare in variabili complesse o reali è questione che dipende dal metodo che si intende utilizzare. Veniamo ora al caso specifico dei punti triangolari, e supponiamo che la massa μ sia sufficientemente piccola perché l'equilibrio sia ellittico. La parte quadratica dell'Hamiltoniana si scrive

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}y^2 + Cxy + \frac{1}{2}z^2, \quad C = \pm \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$$

La trasformazione a forma normale reale per le variabili x, y, p_x, p_y si calcola mediante la matrice \mathbb{T} definita dalla (7.41). Per le variabili z, p_z ricorriamo invece alla (7.28),

che in questo caso si riduce all'identità, perché $D = 1$. Denotando con x_j, y_j le nuove variabili canoniche avremo

$$(x, y, p_x, p_y)^\top = \mathbb{T}(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad z = x_3, \quad p_z = y_3.$$

Otteniamo così

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \omega_j (x_j^2 + y_j^2)$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_3 = 1;$$

il segno negativo della seconda frequenza viene determinato dalla trasformazione alla forma normale reale, come abbiamo visto alla fine del paragrafo 7.4.5.

Il fatto che le frequenze non abbiano tutte lo stesso segno non è innocuo: proprio a causa di questo il problema della stabilità non lineare dei punti lagrangiani triangolari è ancora aperto. In effetti, se tutti i segni delle frequenze fossero concordi allora H_0 avrebbe un minimo nell'origine, e si potrebbe applicare un teorema di Dirichlet che assicura che in questo caso l'equilibrio è stabile anche per il sistema non lineare. Ma i segni discordi delle frequenze implicano che l'origine non sia un punto di minimo per H_0 , ed il teorema di Dirichlet non si applica. Per quanto possa sembrare sorprendente, lo studio del sistema non lineare presenta grosse difficoltà, e non può dirsi concluso. Ma su questo punto dovrò tornare più avanti, quando avremo sviluppato i metodi analitici necessari.

7.5 Il problema ristretto ellittico

Veniamo ora a considerare il caso in cui i primari si muovano su orbite kepleriane ellittiche. È ragionevole attendersi che gli equilibri del caso circolare non possano più esistere. Il risultato che mostrerò in questo paragrafo è che gli equilibri vengono sostituiti da orbite periodiche di forma ellittica. Precisamente:

- (i) *esistono tre soluzioni collineari per cui il rapporto tra le distanze del planetoido dai primari resta costante;*
- (ii) *esistono due soluzioni triangolari per cui i primari ed il planetoido si trovano, ad ogni istante, ai vertici di un triangolo equilatero.*

7.5.1 Il sistema rotante e pulsante

Il calcolo che si svolge qui imita quello del caso circolare in quanto si introduce un sistema di riferimento rotante e pulsante, nel quale i due primari restano fissi. A tal fine dovremo applicare in successione tre trasformazioni.

Riprendiamo le nostre considerazioni riferendoci ad un sistema assoluto descritto dalle coordinate cartesiane ξ, η con l'origine nel baricentro dei primari e l'asse ξ coincidente con l'asse maggiore dell'ellisse descritta dai primari, come illustrato in figura 7.9. Mantenendo le unità di massa e tempo del caso circolare, come nel paragrafo 7.1.1,

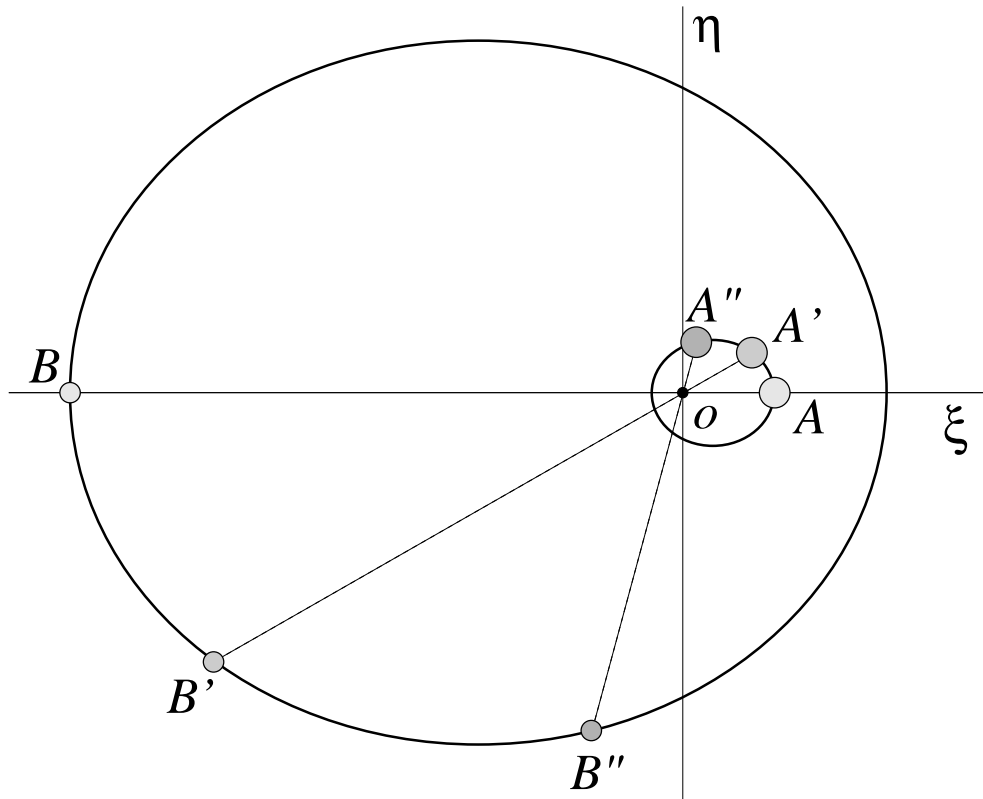


Figura 7.9. Ad illustrazione del riferimento assoluto con origine nel baricentro O dei primari per il problema ristretto ellittico. I primari, rappresentati rispettivamente dai punti A, A', A'' e B, B', B'' , si muovono su orbite ellittiche trovandosi ad ogni istante allineati col baricentro, rispettivamente a distanza μr e $(1 - \mu)r$.

scegliamo come unità di lunghezza il semiasse maggiore. Con tali unità l'equazione polare dell'orbita dei primari ha la forma

$$(7.42) \quad r = \frac{\ell^2}{1 + e \cos \psi}, \quad \ell = \sqrt{1 - e^2}.$$

Qui r è la distanza tra i primari e ψ è l'anomalia media del primario maggiore. I due primari si muovono su orbite ellittiche rispetto al baricentro comune, che assumiamo fisso, e ad ogni istante si trovano in posizioni opposte rispetto al baricentro, a distanze rispettivamente μr e $(1 - \mu)r$. Durante il movimento la distanza r varia nell'intervallo $[1 - e, 1 + e]$. Il moto dei primari obbedisce alla seconda legge di Keplero $\frac{1}{2}r^2\dot{\psi} = C$ con $C = \pi ab/T$, come dato dalla (1.7). Osservando che grazie alla nostra scelta delle unità di misura abbiamo $a = 1$, $b = \sqrt{1 - e^2}$ e $T = 2\pi$ otteniamo la velocità angolare di rotazione dei primari come funzione della distanza mutua tra di essi, ossia

$$(7.43) \quad \dot{\psi} = \frac{\ell}{r^2}.$$

Inoltre, ricordando il calcolo eseguito nel corso della dimostrazione della proposizione 2.2, dove abbiamo ottenuto la formula $\ddot{r} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\psi^2} \frac{1}{r}$, ricaviamo facilmente

la relazione

$$(7.44) \quad \ddot{r} = \frac{e \cos \psi}{r^2} .$$

L'Hamiltoniana nel sistema di riferimento assoluto si scrive come

$$(7.45) \quad H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta, t) = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + V(\xi, \eta, \zeta, t) .$$

dove

$$(7.46) \quad V(\xi, \eta, \zeta, t) = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} ,$$

essendo r_1 ed r_2 le distanze del planetoido dai primari. In questo momento non serve un'espressione esplicita di r_1 ed r_2 in funzione delle coordinate.

Introduciamo ora un sistema di riferimento rotante x, y in cui i primari si trovino costantemente sull'asse x . Ciò si ottiene mediante la trasformazione, analoga a quella già usata per il caso circolare,

$$(7.47) \quad \xi = X \cos \psi - Y \sin \psi , \quad \eta = Y \sin \psi + X \cos \psi .$$

In questo riferimento i primari compiono delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni μ e $-1+\mu$ che occuperebbero nel caso di orbita circolare. Più precisamente, denotando rispettivamente con X_1, Y_1 e X_2, Y_2 le coordinate del primario di massa maggiore e minore, abbiamo

$$(7.48) \quad X_1 = \mu r , \quad Y_1 = 0 , \quad X_2 = (\mu - 1)r , \quad Y_2 = 0$$

La trasformazione (7.47) dipende dal tempo tramite l'angolo ψ . Facendo ricorso alla trasformazione puntuale estesa, discussa nell'esempio 3.7, costruiamo la funzione generatrice

$$(7.49) \quad S_1(p_\xi, p_\eta, X, Y, t) = p_\xi(X \cos \psi - Y \sin \psi) + p_\eta(X \sin \psi + Y \cos \psi) ,$$

dove la dipendenza dal tempo è implicita tramite l'angolo ψ . Ricaviamo così la trasformazione sui momenti

$$P_x = p_\xi \cos \psi + p_\eta \sin \psi , \quad P_y = -p_\xi \sin \psi + p_\eta \cos \psi ,$$

che si inverte facilmente ottenendo

$$p_\xi = P_x \cos \psi - P_y \sin \psi , \quad p_\eta = P_x \sin \psi + P_y \cos \psi .$$

Ricordando la (7.43) calcoliamo poi

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\ell}{r^2} [(X p_\eta - Y p_\xi) \cos \psi - (X p_\xi + Y p_\eta) \sin \psi] ,$$

ed eseguendo le dovute sostituzioni di variabili nell'Hamiltoniana trasformata $H + \frac{\partial S_1}{\partial t}$ ricaviamo

$$(7.50) \quad H(P_x, P_y, X, Y, t) = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2} - \frac{\ell}{r^2}(X P_y - Y P_x) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} ,$$

dove la dipendenza dal tempo è implicita in r, r_1, r_2 .

Introduciamo ora un sistema di riferimento pulsante tramite la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(7.51) \quad X = rx, \quad Y = ry.$$

In questo riferimento i primari restano fissi nei punti

$$x_1 = \mu, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = -1 + \mu, \quad y_2 = 0.$$

La trasformazione dipende implicitamente dal tempo tramite r . Anche qui, ricorriamo alla trasformazione puntuale estesa costruendo la funzione generatrice⁸

$$S_2(P_x, P_y, x, y, t) = r(xP_x + yP_y) - \frac{1}{2}r\dot{r}(x^2 + y^2).$$

Da qui ricaviamo la trasformazione canonica sui momenti

$$p_x = r(P_x - \dot{r}x), \quad p_y = r(P_y - \dot{r}y),$$

che si inverte facilmente. Calcoliamo poi

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = \dot{r}(xP_x + yP_y) - \frac{1}{2}(r\ddot{r} + \dot{r}^2)(x^2 + y^2),$$

e ricordando la (7.44) possiamo calcolare l'Hamiltoniana trasformata $H + \frac{\partial S_2}{\partial t}$ nelle nuove variabili come

$$H(p_x, p_y, x, y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2r^2} - \frac{\ell}{r^2}(xp_y - yp_x) + \frac{e \cos \psi}{2r}(x^2 + y^2) - \frac{1}{r} \left(\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right).$$

Conviene ancora raccogliere un fattore $\dot{\psi} = \ell/r^2$, e riscrivere l'Hamiltoniana sostituendovi l'equazione dell'ellisse (7.42), ottenendo così

$$(7.52) \quad H(p_x, p_y, x, y, t) = \dot{\psi} \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2\ell} - xp_y + yp_x + \frac{e\ell \cos \psi}{2(1 + e \cos \psi)}(x^2 + y^2) - \frac{\ell}{1 + e \cos \psi} \left(\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \right],$$

dove la dipendenza dal tempo è implicita tramite ψ e $\dot{\psi}$, mentre le distanze del pianeta dai primari

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}$$

risultano dipendere solo dalle coordinate.

⁸ Il lettore noterà che la generatrice è costruita sfruttando la possibilità di aggiungere una funzione arbitraria delle sole coordinate x, y . Qui lo scopo è eliminare dall'Hamiltoniana trasformata i termini in xp_x e yp_y che apparirebbero se si costruisse la generatrice nel modo più spontaneo.

Osserviamo qui che l'Hamiltoniana ha la forma

$$H(p_x, p_y, x, y, t) = \dot{\psi} F(p_x, p_y, x, y, \psi) ,$$

dove $\psi(t)$ dipende dal tempo in maniera monotona, grazie alla (7.43) che assicura che $\dot{\psi}$ non si annulla. Le equazioni di Hamilton corrispondenti hanno dunque la forma

$$\dot{x} = \dot{\psi} \frac{\partial F}{\partial p_x} , \quad \dot{y} = \dot{\psi} \frac{\partial F}{\partial p_y} , \quad \dot{p}_x = -\dot{\psi} \frac{\partial F}{\partial x} , \quad \dot{p}_y = -\dot{\psi} \frac{\partial F}{\partial y} ,$$

dove i secondi membri sono funzioni di ψ , oltre che delle coordinate canoniche. Se ora consideriamo l'anomalia media ψ come variabile indipendente al posto del tempo abbiamo

$$\dot{x} = \dot{\psi} \frac{dx}{d\psi} , \quad \dot{y} = \dot{\psi} \frac{dy}{d\psi} , \quad \dot{p}_x = \dot{\psi} \frac{dp_x}{d\psi} , \quad \dot{p}_y = \dot{\psi} \frac{dp_y}{d\psi} ,$$

e dunque possiamo riscrivere le derivate delle coordinate rispetto all'anomalia vera dei primari ψ anziché rispetto al tempo rimuovendo il fattore $\dot{\psi}$. Ciò equivale a considerare il sistema Hamiltoniano non autonomo

$$(7.53) \quad H(p_x, p_y, x, y, \psi) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\ell} - xp_y + yp_x + \frac{e\ell \cos \psi}{2(1 + e \cos \psi)} (x^2 + y^2) - \frac{\ell}{1 + e \cos \psi} \left(\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) ,$$

dove ψ svolge il ruolo del tempo.

Resta un ultimo passo, che consiste nel trasformare i momenti come

$$(7.54) \quad p_x = \ell p'_x , \quad p_y = \ell p'_y$$

lasciando inalterate le coordinate. La trasformazione non è canonica nel senso stretto che abbiamo adottato nel capitolo 3, ma le equazioni mantengono la forma canonica se si divide l'Hamiltoniana trasformata per ℓ , come illustrato nel paragrafo 3.2.1 (cambiamenti di scala). Eliminando gli apici per semplificare le notazioni scriviamo dunque l'Hamiltoniana nel sistema rotante e pulsante, con un riscaldamento dei momenti, nella forma finale

$$(7.55) \quad H(p_x, p_y, x, y, \psi) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - xp_y + yp_x + \frac{e \cos \psi}{2(1 + e \cos \psi)} (x^2 + y^2) - \frac{1}{1 + e \cos \psi} \left(\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) ,$$

dove la variabile indipendente è ancora l'anomalia vera ψ dei primari.

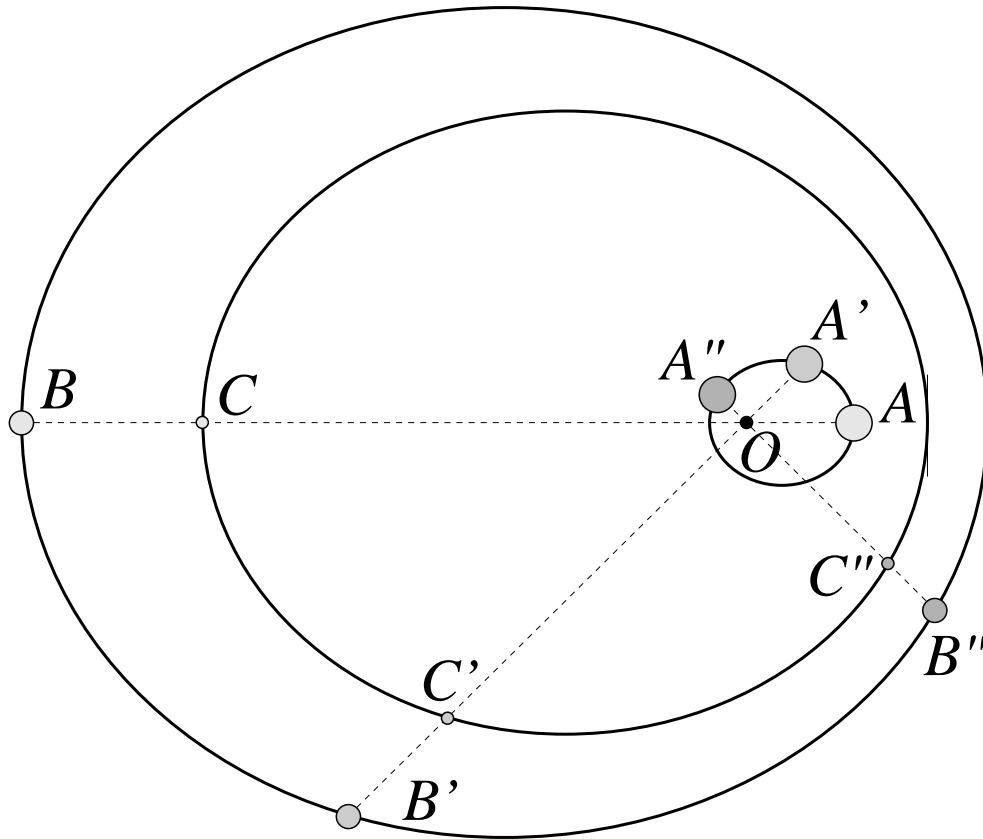


Figura 7.10. L'orbita omografica nel caso della soluzione collineare L_1 , vista nel sistema del baricentro O dei primari. I tre corpi si mantengono ad ogni istante allineati, mentre le distanze variano mantenendo le proporzioni. Le posizioni dei corpi in tempi successivi sono denotate con A, B, C, A', B', C' e A'', B'', C'' .

7.5.2 Le soluzioni omografiche

Le equazioni canoniche per l'Hamiltoniana (7.55) assumono la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\psi} &= p_x + y, \\
 \frac{dy}{d\psi} &= p_y - x, \\
 \frac{dp_x}{d\psi} &= p_y - \frac{ex \cos \psi}{1 + e \cos \psi} - \frac{1 - \mu}{1 + e \cos \psi} \cdot \frac{x - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{1 + e \cos \psi} \cdot \frac{x + 1 - \mu}{r_2^3}, \\
 \frac{dp_y}{d\psi} &= -p_x - \frac{ey \cos \psi}{1 + e \cos \psi} - \frac{1 - \mu}{1 + e \cos \psi} \cdot \frac{y}{r_1^3} - \frac{\mu}{1 + e \cos \psi} \cdot \frac{y}{r_2^3}.
 \end{aligned}
 \tag{7.56}$$

Il confronto con le equazioni corrispondenti (7.7) del caso circolare mostra immediatamente che l'adattamento del sistema di riferimento al moto dei primari ha introdotto una dipendenza dal tempo (che qui, ricordiamolo, è l'anomalia vera dei primari) nelle equazioni, oltre all'aggiunta di un termine.

Procedendo in analogia al caso circolare possiamo cercare soluzioni di equilibrio. A

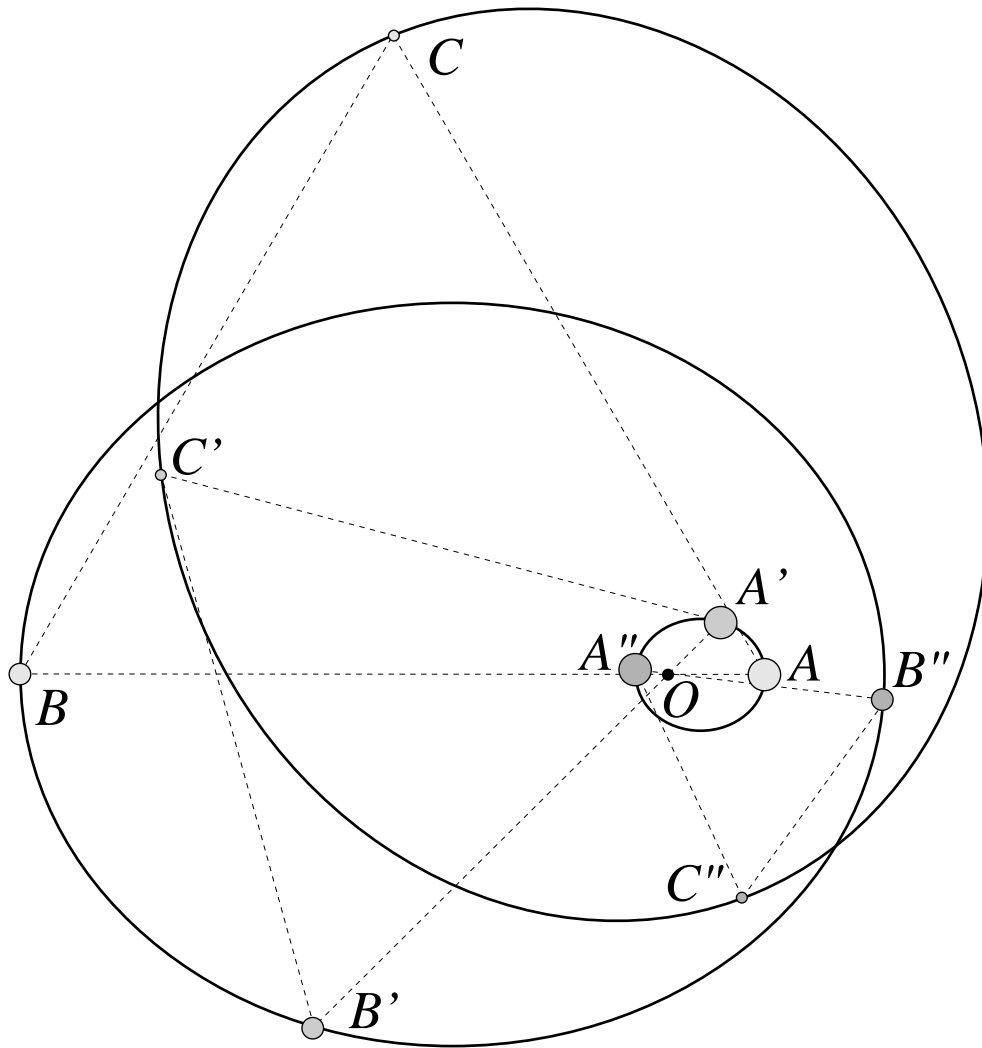


Figura 7.11. L'orbita omografica nel caso delle soluzioni triangolari, vista nel sistema del baricentro O dei primari. I tre corpi si muovono su ellissi formando ad ogni istante un triangolo equilatero. Le posizioni dei corpi in tempi successivi sono denotate con A, B, C, A', B', C' e A'', B'', C'' .

tal fine dobbiamo stabilire se esistono delle cofigurazioni per cui i secondi membri delle equazioni (7.56) si annullino identicamente in ψ . Dalle prime due equazioni otteniamo

$$p_x = -y, \quad p_y = x,$$

e sostituendo questi valori nei secondi membri delle equazioni rimanenti otteniamo

$$(7.57) \quad \frac{1}{1 + e \cos \psi} \left(x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} \right) = 0$$

$$\frac{1}{1 + e \cos \psi} \left(y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \right) = 0.$$

Queste due equazioni sono soddisfatte identicamente in ψ se si annulla il contenuto

delle due parentesi. D'altra parte un rapido confronto con le equazioni (7.8) per gli equilibri del caso circolare mostra che si tratta *delle stesse equazioni*. Ne concludiamo che *nel sistema rotante e pulsante il problema ellittico ammette tre soluzioni di equilibrio collineari e tre triangolari, come nel caso circolare*.

Qui conviene soffermarsi un momento a riflettere sul significato degli equilibri che abbiamo trovato. Ricordiamo che stiamo considerando un sistema di coordinate rotante e pulsante in cui i primari occupano posizioni fisse, rispettivamente $(\mu, 0)$ e $(-1 + \mu, 0)$. Se esiste una soluzione di equilibrio allora il planetotide resta fisso nel nostro sistema di riferimento in una posizione identificata dalle coordinate $x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}$. Se ora torniamo al sistema rotante mediante la trasformazione (7.51) abbiamo che i primari ed il planetotide si muovono secondo la legge oraria

$$(X_1, Y_1) = r(\mu, 0), \quad (X_2, Y_2) = r(-1 + \mu, 0), \quad (X, Y) = r(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}),$$

dove la dipendenza dal tempo è implicita in r . Si vede dunque come la configurazione dei tre corpi cambi solo per un fattore di scala $r(t)$, mantenendo invariati i rapporti tra le distanze reciproche. Tali soluzioni vengono dette⁹ *omografiche*. Se poi torniamo al riferimento assoluto allora la figura geometrica formata dai tre corpi ruota in modo non uniforme, per la seconda legge di Keplero, mantenendo la similitudine, sicché essi sono sempre allineati, nel caso delle soluzioni collineari (figura 7.10), oppure formano ad ogni istante un triangolo equilatero con lati $r(t)$ (figura 7.10).

7.6 Studio perturbativo del problema ristretto

Per proseguire lo studio del problema ristretto conviene senz'altro far uso delle variabili di Delaunay o di quelle di Poincaré. La base per questo calcolo resta lo sviluppo che abbiamo discusso in termini generali nel capitolo 5. Aggiungendo l'ipotesi che una delle masse sia molto piccola possiamo però introdurre alcune semplificazioni.

7.6.1 L'Hamiltoniana in variabili di Delaunay modificate

Possiamo partire in modo sostanzialmente indifferente dalle variabili eliocentriche oppure da quelle di Jacobi. Ricordiamo che abbiamo scritto l'Hamiltoniana nella forma $H = H_0 + \varepsilon H_1$ separando la parte kepleriana dall'interazione tra i pianeti. Denoteremo ancora con $1 - \mu$ e μ le masse dei primari, assumendo $\mu < 1/2$, e con m la massa del planetotide.

Riprendiamo anzitutto l'espressione (5.18) dell'Hamiltoniana in coordinate eliocentriche, e riscriviamola sostituendo

$$m_0 \rightarrow 1 - \mu, \quad m_1 \rightarrow \mu, \quad m_2 \rightarrow m,$$

sicché dovremo anche sostituire

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \rightarrow \mu(1 - \mu), \quad \mu_2 = \frac{m_0 m_2}{m_0 + m_2} \rightarrow \frac{m(1 - \mu)}{1 - \mu + m}.$$

⁹ Dal greco $\delta\mu\delta\zeta$, simile o eguale, composto con $\gamma\rho\alpha\phi\eta$, disegno o scrittura. Qui sta ad indicare la similitudine tra le figure geometriche formate dai tre corpi ad istanti diversi.

Otteniamo così

$$(7.58) \quad \begin{aligned} H_0 &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu(1-\mu)} - \frac{K_g\mu(1-\mu)}{\|\mathbf{r}_1\|} + \frac{(1-\mu+m)\mathbf{p}_2^2}{2m(1-\mu)} - \frac{K_gm(1-\mu)}{\|\mathbf{r}_2\|}, \\ \varepsilon H_1 &= \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{1-\mu} - \frac{K_gm\mu}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}. \end{aligned}$$

In coordinate di Jacobi avremo un'espressione simile per H_0 , mentre dovremo ricorrere ancora ad uno sviluppo per H_1 . Per il seguito non è necessario scrivere tale sviluppo in forma più esplicita.

Cominciamo a considerare l'Hamiltoniana imperturbata H_0 . In variabili di Delaunay modificate essa si scrive

$$H_0 = H'_0 + mH''_0,$$

(si tratta di riprendere l'espressione (4.55) sostituendovi $\mu(1-\mu)$ al posto di m e K_g al posto di k) dove

$$(7.59) \quad H'_0 = -\frac{\mu(1-\mu)K_g^2}{2\Lambda_1^2}, \quad mH''_0 = -\frac{m(1-\mu)(1-\mu+m)K_g^2}{2\Lambda_2^2}.$$

Lo spezzamento in due termini si giustifica osservando che sono già evidenti due contributi di ordini di grandezza diversi: il secondo termine ha un fattore $m \ll \mu$ che lo rende molto più piccolo del primo.

Consideriamo ora la perturbazione. In variabili di Delaunay modificate essa avrà la forma generale (5.54) che abbiamo discusso nel paragrafo 5.4.2, ed in particolare varranno le regole di D'Alembert. Aggiungiamo però l'osservazione che in tutti i termini dell'espressione scritta sopra compare (implicitamente o esplicitamente)¹⁰ un fattore $m\mu$. Scriveremo dunque

$$(7.60) \quad H_1 = m \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{\beta} \in \mathbb{Z}_+^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) \mathbf{P}^{\mathbf{a}/2} \mathbf{Q}^{\mathbf{\beta}/2} \exp(i\langle \mathbf{k}, \Lambda \rangle + i\langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i\langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle)$$

avendo posto $\varepsilon = \mu$ ed avendo conservato un fattore m . Risulta dunque naturale spezzare l'Hamiltoniana in tre contributi di ordini di grandezza ben diversi: la parte che descrive il moto del primario di massa μ , che è di ordine $\mu \ll 1$; la parte che descrive il moto imperturbato del planetoido, che è di ordine $m \ll \mu$; la perturbazione che è di ordine $m\mu \ll m$.

Introduciamo a questo punto l'approssimazione del problema ristretto. Consideriamo il moto imperturbato del primario di massa μ , che, con le notazioni che abbiamo già usato, scriveremo come

$$\Lambda_1 = \Lambda_{1,0}, \quad \lambda_1 = \nu_1 t + \lambda_{1,0}, \quad P_1 = P_{1,0}, \quad p_1 = p_{1,0}, \quad Q_1 = Q_{1,0}, \quad q_1 = q_{1,0},$$

¹⁰ Nella parte che dipende dai momenti ricordiamo che $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ hanno già, rispettivamente, dei fattori μ e m , per la definizione stessa di momento.

dove

$$\nu_1 = \frac{\mu(1-\mu)K_g^2}{\Lambda_1^3} .$$

Possiamo poi introdurre anche l'approssimazione dell'orbita circolare, ponendo

$$P_{1,0} = Q_{1,0} = 0 , \quad p_{1,0} = q_{1,0} = 0 .$$

Infine possiamo scegliere l'istante iniziale in modo che valga $\lambda_{1,0} = 0$.

Supponiamo ora che il primario di massa μ resti sulla sua orbita circolare. Ciò può esprimersi in modo formale introducendo la nuova azione $\Lambda'_1 = \Lambda_1 - \Lambda_{1,0}$, che rappresenta la variazione rispetto al valore iniziale, e mantenendo solo il termine lineare nell'Hamiltoniana imperturbata H'_0 , che diventa

$$(7.61) \quad H'_0 = \nu_1 \Lambda'_1 .$$

Nella perturbazione invece sopprimeremo qualunque dipendenza da Λ'_1 , valutando tutte le funzioni in $\Lambda_{1,0}$. Avremo dunque un'Hamiltoniana della forma¹¹

$$(7.62) \quad H = \nu_1 \Lambda'_1 + mH''_0(\Lambda_2) + m\varepsilon H'_1(\Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, P_2, Q_2, p_2, q_2) ,$$

dove $H''_0(\Lambda_2)$ è data dalla (7.59), e $H'_1(\Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, P_2, Q_2, p_2, q_2)$ è ottenuta dalla (7.60) sostituendo $\Lambda_1 = \Lambda_{1,0}$ e $P_1 = Q_1 = 0$. Si osservi che tale sostituzione elimina completamente anche la dipendenza da p_1, q_1 , grazie alla caratteristica di D'Alembert.

Possiamo ancora approfittare della caratteristica di D'Alembert introducendo dei nuovi angoli $\varphi_0, \dots, \varphi_3$ mediante la trasformazione unimodulare

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} .$$

La trasformazione inversa si scrive facilmente come

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} .$$

Osserviamo ora che per la caratteristica di D'Alembert nello sviluppo in serie di Fourier della perturbazione $H'_1(\Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, P_2, Q_2, p_2, q_2)$ deve valere $k_1 + k_2 - m_2 - s_2 = 0$, dal momento che gli altri indici m_1, s_1 non compaiono più. Applicando la trasformazione ad una combinazione generica degli angoli abbiamo dunque

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + m_2 q_2 + s_2 p_2 = (k_1 + k_2 - m_2 - s_2) \varphi_0 + k_2 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + s_2 \varphi_3 ,$$

ed il coefficiente di φ_0 si annulla, sicché l'angolo φ_0 scompare dall'Hamiltoniana.

¹¹ Il lettore osserverà che abbiamo in pratica l'Hamiltoniana di un sistema non autonomo: Λ'_1 compare solo in un termine lineare che può essere rimosso ponendo $\lambda_1 = \nu_1 t$.

Denotando poi con I_0, \dots, I_3 le azioni coniugate agli angoli φ completiamo la trasformazione unimodulare scrivendo

$$\Lambda_1 = I_0 + I_1 + I_2 + I_3, \quad \Lambda_2 = I_1, \quad P_2 = I_2, \quad Q_2 = I_3.$$

L'Hamiltoniana (7.62) diventa così

$$H = \nu_1(I_0 + I_1 + I_2 + I_3) - \frac{m(1-\mu)(1-\mu+m)K_g^2}{I_1^2} + m\varepsilon H_1''(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

dove $H_1''(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ si ottiene sostituendo la trasformazione unimodulare nell'espressione di $H_1'(\Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, P_2, Q_2, p_2, q_2)$, e ricordando che l'angolo φ_0 scompare.

Dal momento che φ_0 è diventata una variabile ciclica abbiamo che I_0 è costante, e quindi possiamo rimuovere il termine $\nu_1 I_0$ dall'Hamiltoniana. Infine, mediante la trasformazione di scala $I_j' = mI_j$ ($j = 1, 2, 3$) e dividendo l'Hamiltoniana per m eliminiamo il fattore moltiplicativo m , sicché resta il solo parametro perturbativo $\varepsilon = \mu$. Eliminando gli apici, rinominando gli indici interi, e ponendo

$$K = (1-\mu)(1-\mu+m)K_g^2$$

otteniamo l'Hamiltoniana nella sua forma definitiva

$$(7.63) \quad H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}),$$

dove

$$(7.64) \quad \begin{aligned} H_0(\mathbf{I}) &= \nu_1(I_1 + I_2 + I_3) - \frac{K}{I_1^2}, \\ H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} d_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}(I_1) I_2^\alpha I_3^\beta e^{i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi} \rangle}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti $d_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}(I_1)$ sono funzioni da determinarsi mediante la trasformazione.

Questa è la forma generale dell'Hamiltoniana nel caso del problema ristretto spaziale. Per ottenere una forma più esplicita occorre eseguire tutti gli sviluppi necessari.

Nel caso del problema circolare piano la forma dell'Hamiltoniana si semplifica ulteriormente ponendo $I_3 = \varphi_3 = 0$, e si ottiene

$$(7.65) \quad \begin{aligned} H_0(\mathbf{I}) &= \nu_1(I_1 + I_2) - \frac{K}{I_1^2}, \\ H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} d'_{\alpha, \mathbf{k}}(I_1) I_2^\alpha e^{i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi} \rangle}, \end{aligned}$$

Questa seconda forma viene usata molto frequentemente almeno per un primo studio della dinamica degli asteroidi: si considerano come primari il Sole e Giove, assumendo che l'orbita di quest'ultimo sia circolare.

Da aggiungere almeno:
dinamica degli asteroidi,
lacune di Kirkwood,
problema generale dei tre corpi,
equazioni nel caso di un satellite.