3

RICHIAMI SUL FORMALISMO HAMILTONIANO

Il formalismo hamiltoniano, o canonico, deve ormai considerarsi come lo strumento principe nello studio della dinamica dei sistemi conservativi e nello sviluppo della teoria delle perturbazioni.

In questo capitolo intendo richiamare alcune nozioni di cui si farà uso nel resto di queste note: la forma canonica delle equazioni, l'algebra delle parentesi di Poisson, le trasformazioni canoniche, l'equazione di Hamilton–Jacobi. Nella maggior parte dei casi verrà omessa la dimostrazione dei risultati: per questo si rimanda ai testi di Meccanica Analitica.[1] In particolare, nel discutere le trasformazioni canoniche si assume l'atteggiamento pragmatico di rispondere a due domande: (i) come stabilire se una data trasformazione sia canonica o no; (ii) come costruire una trasformazione canonica facendo uso di una funzione generatrice.

3.1 Lo spazio delle fasi e le equazioni di Hamilton

Lo stato di un sistema meccanico a n gradi di libertà viene identificato da un punto su una varietà differenziabile a $2n$ dimensioni, che verrà denotata genericamente con $\mathcal{F}$, sulla quale sono assegnate delle coordinate canonicamente coniugate $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$. L'evoluzione del sistema è rappresentata dalle funzioni $q(t), p(t)$, dove t varia in un intervallo reale (finito o infinito).

L'evoluzione è determinata da una funzione $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, detta *Hamiltoniana*, mediante le *equazioni canoniche* (o equazioni di Hamilton)

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ , \quad \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\ , \quad j = 1,\ldots,n\ , \tag{3.1}$$

dove $H = H(q,p)$. Se $H(q,p)$ è indipendente dal tempo si parla di sistema *autonomo*. Più in generale si potrà considerare il caso di una Hamiltoniana dipen-

[1] Senza la minima pretesa di dare un elenco esausativo (cosa del resto non facile) mi limito a citare i testi di Whittaker [99], Wintner [101], Gantmacher [31] e Arnold [6].

dente dal tempo $H(q,p,t)$, nel qual caso si parla di sistema *non autonomo*. Si può però osservare che il caso non autonomo può ricondursi a quello autonomo mediante un'estensione banale dello spazio delle fasi. Precisamente, alle variabili canoniche $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ si aggiunge una coppia di variabili, che denoteremo con (q_0,p_0), sicché la dimensione delle spazio delle fasi viene incrementata di 2. Data poi l'Hamiltoniana $H(q,p,t)$ si introduce la nuova Hamiltoniana sullo spazio esteso

$$\tilde{H}(q,q_0,p,p_0) = H(q,p,q_0) + p_0 \ .$$

Per questa si scrivono le equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_0 = 1 \ , \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial q_0} \quad \text{e} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \ , \quad j-1,\ldots,n \, .$$

Si osserva subito che la prima equazione ammette la soluzione banale $q_0(t) = t - t_0$, dove t_0 è l'istante iniziale. Grazie a questo, le equazioni per $q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ coincidono di fatto con le (3.1). Supponendo di averne determinato le soluzioni $q(t),p(t)$, si sostituiscono queste funzioni del tempo nel secondo membro dell'equazione per $\dot{p}_0$, ricavandone una funzione nota del tempo t. Si ottiene così un'equazione a variabili separate, che si integra per quadrature.[2] In virtù di questa osservazione nel seguito di questo capitolo considererò il solo caso autonomo, ed aggiungerò qualche considerazione sulle trasformazioni canoniche per il caso non autonomo nel paragrafo 3.2.4.

3.1.1 Parentesi di Poisson

Siano $f(q,p)$ e $g(q,p)$ funzioni differenziabili. La loro *parentesi di Poisson* è una nuova funzione definita come

$$\{g,f\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \ ; \tag{3.2}$$

L'operazione di parentesi di Poisson soddisfa alcune proprietà notevoli. Se f, g e h sono variabili dinamiche differenziabili, e α è una costante reale abbiamo:

(i) linearità: $\{f,g+h\} = \{f,g\} + \{f,h\}$, $\{f,\alpha g\} = \alpha\{f,g\}$;
(ii) anticommutatività: $\{f,g\} = -\{g,f\}$;
(iii) identità di Jacobi: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$;

[2] Nella maggior parte dei testi di Meccanica Analitica si tende a considerare il caso generale di sistemi non autonomi. Un tale atteggiamento appare giustificato se si ricorda che uno dei procedimenti tradizionali consiste nel cercare di ridurre l'ordine delle equazioni differenziali mediante integrazioni successive. Un esempio tipico si trova nel testo classico di Whittaker [99], cap. XII, § 141, ove si mostra come si possa far uso dell'integrale primo dell'energia (si veda più avanti) per ricondurre un sistema Hamiltoniano autonomo ad un sistema non autonomo eliminando un grado di libertà — il che corrisponde in qualche modo a seguire un percorso che è l'opposto di quello suggerito qui. La scelta di ricondursi sistematicamente al caso autonomo si giustifica invece se si osserva che nello sviluppo della teoria si ha una semplificazione di enunciati e calcoli. Per inciso, il procedimento seguito in queste note è usato nel testo di Poincaré [82], cap. I, § 12.

(iv) regola di Leibniz: $\{f, gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$;
(v) derivate:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_j}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial q_j}\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial p_j}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial p_j}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial p_j}\right\} \ , \quad 1 \le j \le n \ .$$

La dimostrazione delle proprietà è lasciata al lettore.

3.1.2 Variabili dinamiche ed integrali primi

Una *variabile dinamica* è una funzione reale differenziabile $f(q,p)$ sullo spazio delle fasi. Ad esempio, l'Hamiltoniana stessa è una variabile dinamica. Se le coordinate evolvono nel tempo come funzioni $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$, ne segue che anche la variabile dinamica evolve nel tempo come $f\bigl(q(t), p(t)\bigr)$. In particolare se il flusso $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$ è determinato dalle equazioni canoniche (3.1) allora l'evoluzione temporale di $f(p,q)$ obbedisce all'equazione

$$\dot f = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = \{f, H\} \ . \tag{3.3}$$

Questa del resto altro non è che la derivata temporale di f lungo il flusso indotto da H, talvolta detta anche derivata di Lie e denotata come $L_H f$. In coordinate l'operatore L_H assume la forma[3]

$$L_H := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \ . \tag{3.4}$$

L'evoluzione di una variabile dinamica soddisfa dunque l'equazione alle derivate parziali $\dot f = \{f, H\}$, ovvero

$$\dot f = L_H f \ . \tag{3.5}$$

[3] Le proprietà della parentesi di Poisson si riscrivono facilmente in termini di derivate di Lie:

(i) $\quad L_f(g+h) = L_f g + L_f h \ , \quad L_f(\alpha g) = \alpha L_f g \ ,$

(ii) $\quad L_f g = -L_g f \ ,$

(iii) $\quad [L_f, L_g] = L_{\{f,g\}} \ ,$

(iv) $\quad L_f(gh) = g L_f h + h L_f g \ ,$

(v) $\quad \left[\frac{\partial}{\partial q_j}, L_f\right] = L_{\frac{\partial f}{\partial q_j}} \ , \quad \left[\frac{\partial}{\partial p_j}, L_f\right] = L_{\frac{\partial f}{\partial p_j}} \ , \quad 1 \le j \le n \ .$

Qui ho usato la notazione $[\cdot,\cdot]$ per il commutatore tra due operatori lineari, ossia $[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f$. Si osservi in particolare che la proprietà (iii) significa che il commutatore tra i campi vettoriali Hamiltoniani generati da f e g è il campo vettoriale Hamiltoniano generato da $\{f,g\}$.

Di conseguenza, tutta la dinamica Hamiltoniana può esprimersi in termini di parentesi di Poisson. In particolare le equazioni di Hamilton possono riscriversi nella forma simmetrica (si veda ad esempio [56])

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}\ , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}\ , \quad 1 \le j \le n\ , \tag{3.6}$$

Una variabile dinamica $\Phi(q,p)$ viene detta *costante del moto*, o spesso *integrale primo*, se mantiene costante il suo valore sotto il flusso indotto dalle equazioni (3.1). In altre parole, se $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$ è la soluzione delle equazioni canoniche corrispondente al dato iniziale $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$ deve valere $\Phi\bigl(q(t), p(t))\bigr) = \Phi(q_0, p_0)$ per tutti i t.

Ciò implica (se $\Phi(q,p)$ è differenziabile) che debba valere $\dot{\Phi} = 0$. In virtù della (3.3) si vede subito che *ogni funzione $\Phi(q,p)$ che soddisfi l'equazione alle derivate parziali*

$$L_H \Phi = 0 \tag{3.7}$$

è un integrale primo.[4]

Tenuto conto delle proprietà delle derivate di Lie possiamo enunciare le proposizioni seguenti:

(i) l'Hamiltoniana di un sistema canonico autonomo è un integrale primo;

(ii) se $\Phi(q,p)$ e $\Psi(q,p)$ sono integrali primi differenziabili, allora anche $\{\Phi, \Psi\}$ è un integrale primo.

La prima affermazione segue dall'anticommutatività della parentesi di Poisson. La seconda è una conseguenza dell'identità di Jacobi.

È ben noto che la conoscenza di integrali primi è un valido aiuto nel risolvere i sistemi di equazioni differenziali. Ciò deriva dal fatto che se un sistema di equazioni differenziali ammette un integrale primo Φ allora ogni orbita del sistema giace necessariamente su una superficie di livello di Φ, determinata ad esempio mediante il dato iniziale. In generale, se un sistema di equazioni differenziali di ordine n ammette $n-1$ integrali primi indipendenti allora si può integrare il sistema per quadrature. La peculiarità del caso Hamiltoniano è che un sistema ad n gradi di libertà, il cui spazio delle fasi ha dimensione $2n$, è integrabile per quadrature se si conoscono n (e non $2n-1$) integrali primi, diciamo $\Phi_1(q,p), \ldots, \Phi_n(q,p)$, purché questi abbiano l'ulteriore proprietà di essere *in involuzione*, ossia che valga $\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0$ per $j, k = 1, \ldots, n$. È

[4] L'utilità della proposizione appena enunciata è duplice. Anzitutto ci mette in grado di verificare se una funzione assegnata sia un integrale primo calcolandone la parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana, mentre la definizione data sopra richiede la conoscenza del flusso, ossia delle soluzioni delle equazioni canoniche. In secondo luogo ci permette, in linea di principio, di costruire degli integrali primi risolvendo un'equazione alle derivate parziali. Quest'ultima affermazione può apparire un po' sconcertante, se si pensa che tipicamente trovare la soluzione di un'equazione alle derivate parziali è problema ben più difficile che risolvere un'equazione alle derivate ordinarie. In effetti, la conoscenza di integrali primi si fonda spesso su motivazioni che non hanno nulla a che vedere con la soluzione diretta dell'equazione (3.7). C'è però almeno un caso in cui quest'ultima equazione si rivela utile: si tratta dei procedimenti della teoria delle perturbazioni, di cui discuteremo più avanti in queste note.

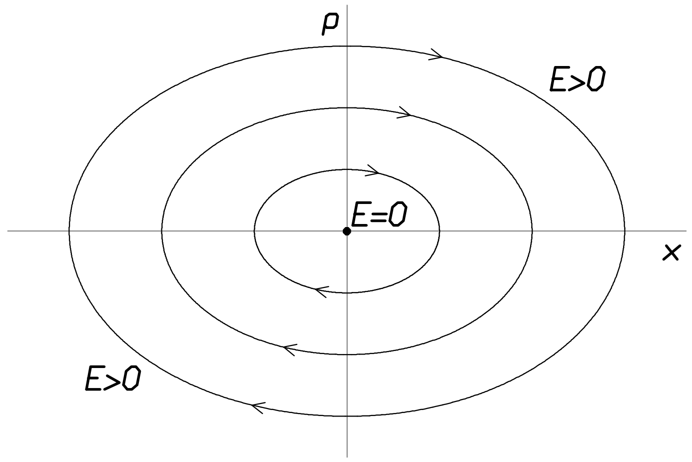

Figura 3.1. Il diagramma di fase per l'oscillatore armonico, $H = p^2/2+\omega^2 x^2/2$. Le curve sono parametrizzate dall'energia, $H(x,p) = E$.

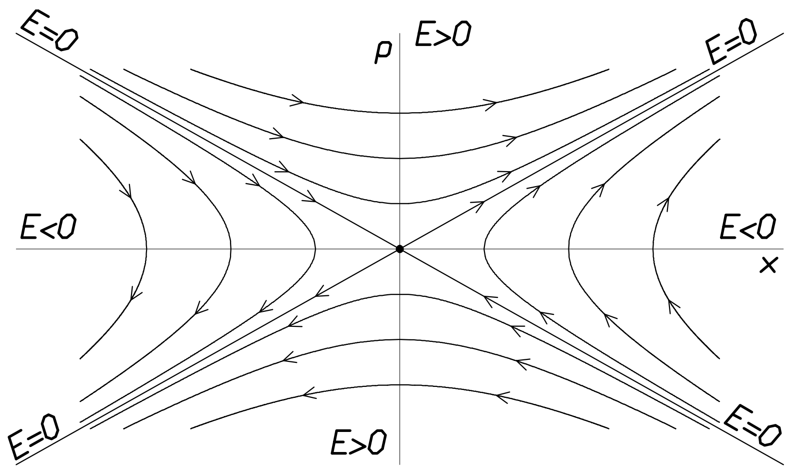

Figura 3.2. Il diagramma di fase per il repulsore armonico, $H = p^2/2-\omega^2 x^2/2$. Le curve sono parametrizzate dall'energia, $H(x,p) = E$.

questo il contenuto del teorema di Liouville, che enunceremo più avanti. C'è anche il rovescio della medaglia: un sistema Hamiltoniano non può ammettere più di n integrali primi in involuzione.

Passiamo ora ad illustrare alcuni semplici esempi.

Esempio 3.1: *Sistemi hamiltoniani autonomi ad un grado di libertà.* Abbiamo già osservato che l'Hamiltoniana $H(q,p)$ è un integrale primo. Dunque le orbite sono sottoinsiemi delle curve di livello definite dall'equazione $H(q,p) = E$, dove $E = H\bigl(p(0),q(0)\bigr)$ è una costante determinata dal dato iniziale. Un primo esempio significativo è l'oscillatore armonico, la cui Hamiltoniana si scrive $H(p,x) = p^2/2+\omega^2x^2/2$ (si veda la figura 3.1). Per $E = 0$ l'orbita si riduce ad un punto, ossia lo stato di equilibrio $q = p = 0$. Per $E > 0$ le curve di livello sono ellissi con centro nell'origine, e rappresentano le oscillazioni intorno all'equilibrio. Un secondo esempio è il repulsore

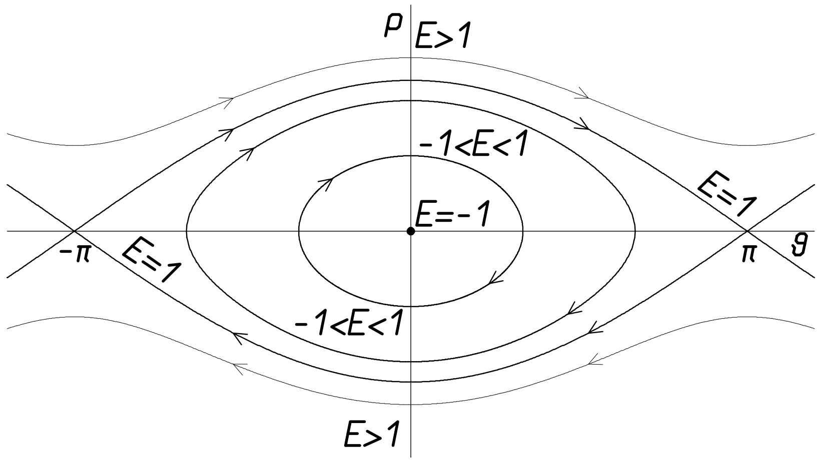

Figura 3.3. Il diagramma di fase per il pendolo, $H = p^2/2 - \cos\vartheta$.

armonico (si veda la figura 3.2). L'Hamiltoniana è $H(p, x) = p^2/2 - \omega^2 x^2/2$. Per $E = 0$ le curve di livello sono due rette che si intersecano nell'origine, che rappresentano in realtà cinque orbite: le due semirette che giacciono nel primo e terzo quadrante, che corrispondono ad orbite asintotiche all'origine per $t \to -\infty$ (la varietà instabile); le due semirette che giacciono nel secondo e quarto quadrante, che corrispondono ad orbite asintotiche all'origine per $t \to +\infty$ (la varietà stabile); la quinta orbita è l'origine stessa, che è punto di equilibrio. Per $E \neq 0$ le curve di livello sono iperboli che per $E < 0$ corrispondono ad orbite che vengono riflesse dall'equilibrio, mentre per $E > 0$ corrispondono ad orbite che superano il punto di equilibrio. Un terzo esempio significativo è il pendolo. In questo caso lo spazio delle fasi è un cilindro, e l'Hamiltoniana è $H(\vartheta, p) = p^2/2 - \cos\vartheta$ (si veda la figura 3.3). Per $E = -1$ l'orbita è il solo punto di equilibrio $\vartheta = p = 0$, simile all'equilibrio dell'oscillatore armonico. Per $E = 1$ si trova il punto di equilibrio superiore (instabile) e le varietà stabile ed instabile che si congiungono su di esso (si ricordi che ϑ è un angolo, sicché i punti $\vartheta = \pi$ e $\vartheta = -\pi$ sono rappresentazioni diverse sul piano di uno stesso punto del cilindro). Le varietà si raccordano tra loro: ciascuna di esse rappresenta un'orbita che tende all'equilibrio sia per $t \to -\infty$ che per $t \to \infty$: si tratta dell'esempio più semplice di quelle che Poincaré chiamava *orbite doppiamente asintotiche*. Queste varietà svolgono il ruolo di *separatrici* tra gli stati oscillatori del pendolo, per $(\,|E| < 1\,)$ e gli stati rotatori, per $(\,E > 1\,)$. I tre esempi riportati dovrebbero essere sufficienti per illustrare come si possa rappresentare il diagramma di fase di un qualunque sistema hamiltoniano ad un grado di libertà. Come facile esercizio il lettore potrà tracciare il diagramma di fase per l'Hamiltoniana $H = p(1 - p)\sin\vartheta$, con $p \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in \mathbb{T}$.

Esempio 3.2: *Punto libero.* Denotiamo con (x, y, z) le coordinate di un punto di massa m nello spazio, e con p_x, p_y, p_z i rispettivi momenti. L'Hamiltoniana si riduce all'energia cinetica, ossia $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$. Oltre all'Hamiltoniana abbiamo gli integrali primi p_x, p_y, p_z, $M_x = yp_z - zp_y$, $M_y = zp_x - xp_z$, $M_z = xp_y - yp_x$ (la quantità di moto ed il momento angolare), per un totale di 7 integrali primi, il che è un po' eccessivo se si considera che lo spazio delle fasi ha dimensione 6. In effetti, tra le 7 quantità elencate se ne possono selezionare 5 indipendenti, ad esempio p_x , p_y , p_z , M_x e M_y. Come curiosità, ci si può chiedere se sia possibile costruire nuovi integrali primi come parentesi di Poisson tra due di quelli noti, ma si vede subito che non si trova nulla di nuovo osservando la tabella che segue.

(3.8)

$\{\cdot,\cdot\}$	p_x	p_y	p_z	M_x	M_y	M_z
p_x	0	0	0	0	p_z	$-p_y$
p_y	0	0	0	$-p_z$	0	p_x
p_z	0	0	0	p_y	$-p_x$	0
M_x	0	p_z	$-p_y$	0	M_z	$-M_y$
M_y	$-p_z$	0	p_x	$-M_z$	0	M_x
M_z	p_y	$-p_x$	0	M_y	$-M_x$	0

Facendo uso degli integrali primi indipendenti che abbiamo individuato si ricostruisce facilmente l'orbita in $\mathbb{R}^6$: questa altro non è che l'intersezione dei cinque piani $p_x = c_1$, $p_y = c_2$, $p_z = c_3$, $M_x = c_4$, $M_y = c_5$, dove $c_1, \ldots, c_5$ sono costanti determinate dai dati iniziali. La retta che ne risulta rappresenta l'orbita nello spazio delle fasi.

Esempio 3.3: *Il problema degli n corpi.* Facendo ancora uso delle coordinate cartesiane, l'Hamiltoniana si scrive

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \ ;$$

Abbiamo visto nel paragrafo 2.8.1 che il sistema ammette 7 integrali primi: l'energia totale H, le tre componenti della quantità di moto

$$P_x = \sum_j p_{j,x} \ , \quad P_y = \sum_j p_{j,y} \ , \quad P_z = \sum_j p_{j,z}$$

(dove $p_{j,x}$, $p_{j,y}$, e $p_{j,z}$ denotano le componenti del momento $\mathbf{p}_j$ del corpo j–esimo sugli assi cartesiani x , y, z) e le tre componenti del momento angolare

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_j y_j p_{j,z} - z_j p_{j,y} \ , \\ M_y &= \sum_j z_j p_{j,x} - x_j p_{j,z} \ , \\ M_z &= \sum_j x_j p_{j,y} - y_j p_{j,x} \ . \end{aligned}$$

Qui sarebbe interessante poter costruire nuovi integrali primi mediante parentesi di Poisson, ma ciò non è possibile: vale ancora la tabella (3.8). Consideriamo anzitutto il caso dei due corpi, $n = 2$. Gli integrali primi che abbiamo scritto sono indipendenti, e questo ci garantisce che ogni orbita giace su una varietà a 5 dimensioni nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{12}$. Ciò è vero, anche se descrivere tale varietà facendo uso delle coordinate cartesiane non è del tutto agevole. Vedremo più avanti, dopo aver enunciato il teorema di Liouville, che questo ci basta per completare l'integrazione. Nel caso di tre o più corpi invece gli integrali primi che conosciamo sono insufficienti, ed occorrerebbe trovarne degli altri. Ma i teoremi di Bruns e Poincaré affermano che ciò non è possibile.[5]

Esempio 3.4: *Il moto centrale* Se facciamo uso di coordinate cartesiane lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^6$, e l'Hamiltoniana assume la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(r) \ ,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Il sistema ammette 4 integrali primi indipendenti: l'Hamiltoniana H stessa e le tre componenti del momento angolare che denoteremo ancora con M_x, M_y, e M_z. Se ne conclude che le orbite giacciono su una varietà di dimensione 2. Per svolgere un'analisi più completa conviene introdurre coordinate polari. Ricordando che le orbite sono piane, in virtù della conservazione del momento angolare, possiamo senz'altro restringerci a considerare il piano ortogonale al momento angolare, ed introdurre in questo le coordinate polari r, ϑ. L'Hamiltoniana si scrive allora

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right) + V(r) \ .$$

Questa ammette due integrali primi: l'Hamiltoniana H stessa e la componente $M_z = p_\vartheta$ del momento angolare, di fatto la sola non nulla. L'uso delle coordinate polari mette meglio in evidenza la natura della varietà invariante per le orbite. Essendo p_ϑ costante, ci si restringe a considerare il prodotto cartesiano di un cerchio (l'angolo ϑ, che è libero di ruotare) con il semipiano $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ descritto dalle coordinate canoniche r e p_r. In quest'ultimo piano si fa uso dell'integrale primo

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \ ,$$

che altro non è che l'Hamiltoniana ove si è sostituito il valore costante $p_\vartheta = l$, determinato mediante i dati iniziali. Occorre infine prendere in esame il potenziale efficace

$$V^*(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \ .$$

Si possono verificare diversi casi, che dipendono dalla forma del potenziale $V(r)$: (i) punti di equilibrio $r = \mathrm{cost}\,$, $p_r = 0$, che corrispondono ad orbite circolari per

[5] Per una dimostrazione del teorema di Bruns si veda ad esempio il trattato di Whittaker [99], ch. XIV, §164. Per il teorema di Poincaré si veda [81], Vol. I, cap. V.

il problema completo; (ii) separatrici che si incrociano in punti di equilibrio instabili, che nel problema completo corrispondono ad orbite asintotiche ad orbite circolari instabili; (iii) curve chiuse intorno ad un equilibrio stabile, che corrispondono a moti a rosetta; (iv) orbite aperte. Il caso (iii) è particolarmente interessante. Si ha infatti un moto caratterizzato da due periodi: il periodo di rivoluzione, che riguarda l'angolo ϑ, e l'oscillazione in direzione radiale. Possiamo quindi descrivere geometricamente la dinamica nello spazio delle fasi dicendo che l'orbita evolve su una superficie che è topologicamente il prodotto cartesiano tra due circonferenze, ossia un toro di dimensione 2, che in particolare può essere riempito densamente dall'orbita. Per lo studio dettagliato delle orbite si torna in buona sostanza al tipo di analisi che abbiamo già svolto nel capitolo 2.

Esempio 3.5: *Il caso kepleriano.* Rispetto al caso più generale dell'esempio 3.4 abbiamo informazioni più precise sulle orbite limitate: sappiamo dalle leggi di Keplero che esse sono ellissi, e quindi curve chiuse, il che esclude la possibilità che l'orbita riempia densamente un toro a due dimensioni. Ciò è conseguenza dell'esistenza di un altro integrale primo, e precisamente

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{M} - \frac{km\mathbf{x}}{r} \ , \tag{3.9}$$

dove k è la costante che compare nel potenziale kepleriano, e $\mathbf{M}$ è il momento angolare. Questo integrale primo è detto *vettore di Runge–Lenz*, benché fosse ben noto a Laplace.[6] Tenuto conto dei quattro integrali primi che già conosciamo si arriverebbe dunque a sette integrali primi, che non possono essere tutti indipendenti. In effetti, grazie al vettore di Runge–Lenz si può trovare un quinto integrale primo indipendente dall'energia e dal momento angolare, sicché la superficie invariante risulta essere una curva.[7]

3.2 Trasformazioni canoniche

Anche nel caso hamiltoniano si può far ricorso a cambiamenti di coordinate per semplificare le equazioni. In generale però si perde la forma canonica, nel senso che le equazioni trasformate non possono più scriversi come equazioni di Hamilton con un'opportuna Hamiltoniana. D'altra parte la forma canonica offre notevoli vantaggi, il che rende interessante studiare se esista una classe di trasformazioni che la mantenga. Questo porta ad introdurre il gruppo delle *trasformazioni canoniche*.

In queste note mi limiterò a mettere in evidenza due criteri di canonicità:

(i) la trasformazione conserva le parentesi di Poisson;

(ii) la trasformazione conserva l'integrale della 1–forma $\sum_j p_j dq_j$ lungo una curva chiusa.

---

[6] Si veda la nota storica [40]

[7] Il calcolo dell'orbita facendo uso del quinto integrale primo è svolto ad esempio in [19].

Questi criteri consentono di verificare facilmente se una trasformazione assegnata sia canonica. Inoltre, esiste anche un metodo per costruire delle trasformazioni certamente canoniche facendo uso di *funzioni generatrici*. Questo metodo sta alla base di ulteriori sviluppi che conducono all'equazione di Hamilton–Jacobi ed al teorema di Liouville sull'integrabilità per quadrature.

3.2.1 *Trasformazioni che mantengono la forma Hamiltoniana delle equazioni.*

Cerchiamo anzitutto delle trasformazioni $(q,p) = \mathcal{C}(\overline{q},\overline{p})$ che godano della proprietà seguente: *ad ogni Hamiltoniana $H(q,p)$ si può associare un'altra funzione $K(\overline{q},\overline{p})$ tale che il sistema di equazioni canoniche*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ ,\quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\ ,\quad j = 1,\ldots,n\ ,$$

viene trasformato nel sistema

$$\dot{\overline{q}}_j = \frac{\partial K}{\partial \overline{p}_j}\ ,\quad \dot{\overline{p}}_j = -\frac{\partial K}{\partial \overline{q}_j}\ ,\quad j = 1,\ldots,n\ ,$$

anch'esso canonico.

Se il sistema Hamiltoniano che si considera è autonomo (e per ora ci restringiamo a questo caso), e la trasformazione che si considera non dipende dal tempo, allora si puo richiedere che l'Hamiltoniana $K(\overline{q},\overline{p})$ del sistema trasformato sia la trasformata dell'Hamiltoniana di partenza $H(q,p)$, ossia[8]

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p}) = H(q,p)\big|_{q=q(\overline{q},\overline{p})\,,\,p=p(\overline{q},\overline{p})}\ . \tag{3.10}$$

Il caso apparentemente più generale di sistemi non autonomi o trasformazioni dipendenti dal tempo può ricondursi a quello che stiamo discutendo.

Un primo esempio elementare di trasformazione canonica è la *traslazione*, definita come

$$q_j = \overline{q}_j + a_j\ ,\quad p_j = \overline{p}_j + b_j\ ,\quad 1 \le j \le n\ ,$$

dove $a = (a_1,\ldots,a_n)$ e $b = (b_1,\ldots,b_n)$ sono costanti. Si verifica direttamente che le equazioni trasformate hanno ancora la forma canonica, con Hamiltoniana

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p}) = H(q,p)\Big|_{q=\overline{q}+a\,,\,p=\overline{p}+b}\ .$$

Un secondo esempio è la *trasformazione di scala*

$$q_j = \alpha\overline{q}_j\ ,\quad p_j = \beta\overline{p}_j\ ,\quad 1 \le j \le n\ .$$

[8] Nella letteratura non c'è accordo completo sulla definizione di trasformazione canonica. Alcuni autori preferiscono chiamare canoniche tutte le trasformazioni che conservano la forma Hamiltoniana delle equazioni. Tale è, ad esempio, l'atteggiamento di Wintner [101] e Gantmacher [31]; quest'ultimo autore riserva il nome di *trasformazioni canoniche univalenti* a quelle che qui sono dette semplicemente canoniche. Altri (tra cui l'autore di queste note) preferiscono chiamare canoniche solo quelle che soddisfano anche la condizione (3.10) sull'Hamiltoniana trasformata. Questa restrizione ha il vantaggio di semplificare sensibilmente l'esposizione.

In questo caso l'Hamiltoniana trasformata è

$$K(\overline{q},\overline{p}) = \frac{1}{\alpha\beta} H(q,p)\Big|_{q=\alpha\overline{q}\,,\, p=\beta\overline{p}} \ .$$

È proprio questo l'esempio di una trasformazione che mantiene la forma canonica delle equazioni, ma con una nuova Hamiltoniana che non è semplicemente la trasformata della precedente. In effetti, la nuova Hamiltoniana soddisfa la (3.10), solo se $\alpha\beta = 1$. Dunque la trasformazione è canonica nel senso stretto adottato in queste note solo in quest'ultimo caso. La classe più generale considerata ad esempio da Wintner o Gantmacher si ottiene componendo una trasformazione canonica nel senso stretto qui adottato con una trasformazione di scala.

La trasformazione di scala può applicarsi separatamente alle coppie di coordinate. Così, ad esempio, la trasformazione

$$q_j = \alpha_j \overline{q}_j \ , \quad p_j = \frac{1}{\alpha_j}\overline{p}_j \ , \quad 1 \le j \le n \ ,$$

è canonica in senso stretto. Nel caso $\alpha = 1$ ci si riduce all'identità.

Un terzo caso interessante è lo *scambio di coordinate canoniche*, ossia

$$q_j = \overline{p}_j \ , \quad p_j = -\overline{q}_j \ , \quad 1 \le j \le n \ . \tag{3.11}$$

L'Hamiltoniana trasformata è

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p}) = H(q,p)\big|_{q=\overline{p}\,,\, p=-\overline{q}} \ .$$

È consentito anche scambiare solo alcune coppie di coordinate: la trasformazione resta canonica.

3.2.2 Conservazione delle parentesi di Poisson

Ci occupiamo qui di enunciare un criterio di canonicità, ossia di metterci in grado di verificare se una data trasformazione sia canonica.

Abbiamo già osservato che il formalismo Hamiltoniano può riformularsi in termini di parentesi di Poisson, dato che l'evoluzione temporale di qualunque variabile dinamica f (ivi comprese le coordinate) soddisfa l'equazione $\dot{f} = \{f, H\}$. Questo fatto conduce in modo naturale a caratterizzare le trasformazioni canoniche come quelle che mantengono invariata la forma della parentesi di Poisson.

Sia $(q,p) = \mathcal{C}(\overline{q},\overline{p})$ una trasformazione di coordinate, e denotiamo con $\mathcal{C}f$ la funzione trasformata

$$\big(\mathcal{C}f\big)(\overline{q},\overline{p}) = f(q,p)\Big|_{(q,p)=\mathcal{C}(\overline{q},\overline{p})} \ .$$

Denotiamo anche con $\{\cdot,\cdot\}_{q,p}$ e con $\{\cdot,\cdot\}_{\overline{q},\overline{p}}$ la parentesi di Poisson calcolata rispetto alle variabili q,p nel primo caso e $\overline{q},\overline{p}$ nel secondo. Diremo che la trasformazione $\mathcal{C}$ *conserva le parentesi di Poisson* se per ogni coppia di funzioni f e g rende commutativo il diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
f, g & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{C}f, \mathcal{C}g \\
{\scriptstyle \{\cdot,\cdot\}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \{\cdot,\cdot\}} \\
\{f,g\}_{q,p} & \xrightarrow[\mathcal{C}]{} & \mathcal{C}\big(\{f,g\}_{q,p}\big) = \{\mathcal{C}f, \mathcal{C}g\}_{\overline{q},\overline{p}}\ .
\end{array}
\tag{3.12}
$$

In altre parole, si ottiene lo stesso risultato sia calcolando la parentesi di Poisson rispetto alle variabili q, p e poi applicando la trasformazione, sia trasformando le funzioni e poi calcolando la parentesi di Poisson rispetto alle nuove variabili.

Vale la

Proposizione 3.1: *Una trasformazione* $(q,p) = \mathcal{C}(\overline{q},\overline{p})$ *è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson, ossia se il diagramma (3.12) è commutativo.*

La proposizione appena enunciata può trasformarsi in un criterio di canonicità effettivamente applicabile ricorrendo alle coordinate, considerate come variabili dinamiche. Si vede subito che valgono le relazioni

$$
\begin{aligned}
&\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0 \\
&\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}
\end{aligned}
\qquad 1 \le j \le n\ ,\ 1 \le k \le n
\tag{3.13}
$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kronecker. Queste espressioni vengono chiamate *parentesi di Poisson fondamentali*. Il nome è giustificato dal

Lemma 3.2: *Una trasformazione conserva le parentesi di Poisson tra due funzioni qualsiasi se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali.*

Questo conduce a formulare una condizione effettivamente applicabile:[9]

Proposizione 3.3: *Una trasformazione* $(q,p) = \mathcal{C}(\overline{q},\overline{p})$ *è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali, ossia*

$$
\begin{aligned}
&\{q_j, q_k\}_{\overline{q},\overline{p}} = \{p_j, p_k\}_{\overline{q},\overline{p}} = 0 \\
&\{q_j, p_k\}_{\overline{q},\overline{p}} = \delta_{jk}\ , \qquad\qquad 1 \le j \le n\ ,\quad 1 \le k \le n\ .
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Esempio 3.6: *Il caso di un grado di libertà.* Nel caso $n = 1$ la condizione di canonicità assume la forma particolarmente semplice

$$
\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial \overline{q}} & \dfrac{\partial q}{\partial \overline{p}} \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial \overline{q}} & \dfrac{\partial p}{\partial \overline{p}} \end{pmatrix} = 1\ ,
$$

il che significa che la trasformazione deve conservare l'area.

[9] Nei testi recenti si trova abitualmente il seguente enunciato: *una trasformazione è canonica se e solo se il suo Jacobiano è una matrice simplettica.* Il lettore che abbia familiarità col formalismo simplettico verificherà facilmente che si tratta esattamente della proprietà richiesta nella proposizione 3.3. Con un po' più di attenzione si vedrà anche che facendo uso della condizione sulle parentesi di Poisson fondamentali si alleggerisce il calcolo, perché si richiedono meno operazioni.

3.2.3 Funzioni generatrici

Mostriamo ora come si possano costruire delle trasformazioni che siano certamente canoniche ricorrendo alle *funzioni generatrici*. L'argomento è assai vasto, ma, coerentemente con l'atteggiamento pragmatico tenuto fin qui, ci limitiamo ad enunciare il metodo rimandando per una discussione più ampia ai testi di Meccanica Analitica.

Denotando con p, q le vecchie variabili e con $\overline{p}, \overline{q}$ le nuove, dobbiamo considerare una *funzione generatrice* $S(\overline{p}, q)$ in variabili miste. Vale la

Proposizione 3.4: *Sia $S(\overline{p}, q)$ una funzione differenziabile soddisfacente la condizione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \overline{p}_j \partial q_k}\right) \neq 0 \ . \tag{3.15}$$

Allora la trasformazione definita implicitamente dalle relazioni

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(\overline{p}, q) \ , \quad \overline{q}_j = \frac{\partial S}{\partial \overline{p}_j}(\overline{p}, q) \ , \quad 1 \leq j \leq n \ . \tag{3.16}$$

è canonica.

La (3.15) è una condizione di invertibilità (almeno locale). In effetti, le relazioni (3.16) definiscono p_j e $\overline{q}_j$ come funzioni di q e $\overline{p}$, sicché la trasformazione è definita in modo implicito. Per renderla esplicita abbiamo due vie. La prima è risolvere la prima equazione rispetto a $\overline{p}$ e sostituirla nella seconda; la seconda via è risolvere la seconda equazione rispetto a q e sostituirla nella prima. In ambedue i casi la condizione (3.15) assicura che l'inversione è possibile.[10]

Riportiamo ora due esempi utili.

Esempio 3.7: *Trasformazione puntuale estesa* Consideriamo la trasformazione *puntuale* $q = q(\overline{q})$, che supponiamo essere un diffeomorfismo,[11] sicché vale

$$\det \frac{\partial(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} \neq 0 \ . \tag{3.17}$$

Si può completare la trasformazione in modo che sia canonica facendo uso della fun-

---

[10] La proposizione 3.4 ci dà un metodo per costruire trasformazioni che sono certamente canoniche, ma non afferma che tutte le trasformazioni canoniche possano costruirsi a questo modo. Un controesempio elementare è la trasformazione di scambio di coordinate coniugate (3.11) del paragrafo 3.2.1: il lettore verificherà facilmente che non esiste una funzione $S(\overline{p}, q)$ che la produce. Per coprire tutte le possibilità occorre considerare altre forme della funzione generatrice, e precisamente 2^n forme distinte, dove n è il numero di gradi di libertà. Tralasciamo però questa discussione, contando sul fatto che la proposizione 3.4 è sufficiente per il seguito di queste note. Il lettore interessato ad approfondire l'argomento potrà consultare il testo di Arnold [6].

[11] Queste sono le trasformazioni di coordinate che vengono prese in considerazione nel formalismo lagrangiano.

zione generatrice

$$S(\overline{p},q)=\sum_k \overline{p}_k\overline{q}_k\big|_{\overline{q}=\overline{q}(q)}\ .$$

Infatti la condizione di invertibilità 3.4 risulta soddisfatta in virtù della (3.17), perché

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\overline{p}_k\partial q_j}\right)=\det\left(\frac{\partial\overline{q}_k}{\partial q_j}\right)\neq 0\ .$$

La trasformazione completa si scrive

$$q_j=q_j(\overline{q})\ ,\quad p_j=\sum_k \overline{p}_k\frac{\partial\overline{q}_k}{\partial q_j}(q)\ ,\quad 1\le j\le n\ .$$

Abbiamo così esteso una trasformazione puntuale ad una canonica, il che giustifica il nome. È utile anche osservare che l'estensione non è unica: la trasformazione estesa più generale è quella definita mediante la funzione generatrice

$$S(\overline{p},q)=\sum_k \overline{p}_k\overline{q}_k\big|_{\overline{q}=\overline{q}(q)}+W(q)\ ,\tag{3.18}$$

dove $W(q)$ è una funzione arbitraria (differenziabile).

Esempio 3.8: *Trasformazioni canoniche prossime all'identità.* Consideriamo la funzione generatrice

$$S(\overline{p},q)=\sum_j \overline{p}_j q_j+\varepsilon f(\overline{p},q)\ ,\tag{3.19}$$

dove $f(\overline{p},q)$ è una funzione arbitraria e ε è un parametro reale, che assumeremo piccolo. La condizione (3.15) è soddisfatta per $\varepsilon=0$, e quindi, per continuità, anche per ε sufficientemente piccolo. La trasformazione si scrive in forma implicita

$$p_j=\overline{p}_j+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_j}(\overline{p},q)\ ,\quad \overline{q}_j=q_j+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\overline{p}_j}(\overline{p},q)\ ,\quad 1\le j\le n\ .$$

La trasformazione può porsi in forma esplicita ricorrendo ad uno sviluppo nel parametro ε. Ad esempio, invertendo la seconda relazione rispetto a q e sostituendo il risultato nella prima si ottiene

$$\begin{aligned} q_j&=\overline{q}_j-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\overline{p}_j}(\overline{p},\overline{q})+\varepsilon^2\ldots\\ p_j&=\overline{p}_j+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_j}(\overline{p},\overline{q})+\varepsilon^2\ldots\ .\end{aligned}$$

Per determinare i termini successivi dello sviluppo in ε occorre svolgere un calcolo tecnicamente più complesso, che procede per approssimazioni successive. Il nome *trasformazione prossima all'identità* si giustifica osservando che per $\varepsilon=0$ ci si riduce effettivamente all'identità, mentre per $\varepsilon\neq 0$ le coordinate vengono deformate di una quantità piccola. Questo tipo di trasformazioni viene ampiamente usato in teoria delle perturbazioni.

3.2.4 Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

Il formalismo descritto fin qui si estende facilmente al caso di sistemi non autonomi e di trasformazioni dipendenti dal tempo.

Consideriamo un'Hamiltoniana non autonoma $H(q,p,t)$, ed estendiamo lo spazio delle fasi introducendo due nuove coordinate q_0, p_0. Consideriamo poi l'Hamiltoniana[12]

$$\tilde{H}(q,p,q_0,p_0) = H(q,p,q_0) + p_0 \ . \tag{3.20}$$

definita sullo spazio delle fasi esteso. In linea di principio potremmo considerare trasformazioni canoniche della forma $q = q(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0)$, $p = p(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0)$, $q_0 = q_0(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0)$, $p_0 = p_0(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0)$, per le quali vale tutta la teoria esposta fin qui. In tal caso però modificheremmo anche la variabile temporale q_0, sicché la nuova variabile $\overline{q}_0$ potrebbe non evolvere più uniformemente nel tempo.

Restringiamoci allora a considerare trasformazioni che lascino invariata la coordinata q_0, ovvero il tempo, imponendo $q_0 = \overline{q}_0$; dovremo allora determinare $p_0 = p_0(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0)$ in modo che la condizione di canonicità sia soddisfatta. Una prima conseguenza è che la condizione $\{q_0,p_0\}_{\overline{q},\overline{p}} = 1$ implica $\frac{\partial p_0}{\partial \overline{p}_0} = 1$, e dunque $p_0 = \overline{p}_0 + f(\overline{q},\overline{p},q_0)$ con una funzione f per ora arbitraria. Dovendosi poi verificare le condizioni $\{q_0,q_j\}_{\overline{q},\overline{p}} = \{q_0,p_j\}_{\overline{q},\overline{p}} = 0$ per $1 \le j \le n$, segue che $\frac{\partial q_j}{\partial \overline{p}_0} = \frac{\partial p_j}{\partial \overline{p}_0} = 0$, e dunque le q_j, p_j non dovranno dipendere da $\overline{p}_0$.

Dalle considerazioni svolte fin qui ricaviamo il seguente schema generale. Una volta esteso lo spazio delle fasi ed introdotta l'Hamiltoniana (3.20), supponiamo di saper costruire una trasformazione che soddisfi sia le condizioni di canonicità, sia la condizione $q_0 = \overline{q}_0$. Avremo allora l'Hamiltoniana trasformata

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0,\overline{p}_0) = H(q,p,q_0)\big|_{q=q(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0),\, p=p(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0),q_0=\overline{q}_0} + \overline{p}_0 + f(\overline{q},\overline{p},\overline{q}_0) \ .$$

Dal momento che la dipendenza da $\overline{p}_0$ è ancora lineare possiamo rimuovere l'estensione dello spazio delle fasi ristabilendo $\overline{q}_0 = t$ e rimuovendo il termine $\overline{p}_0$ dall'Hamiltoniana, che diventa così

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p},t) = H(q,p,t)\big|_{q=q(\overline{q},\overline{p},t),\, p=p(\overline{q},\overline{p},t)} + f(\overline{q},\overline{p},t) \ .$$

Si osservi che la nuova Hamiltoniana non è la trasformata della vecchia: c'è un termine aggiuntivo che dobbiamo calcolare. Ciò in effetti è possibile.

Proposizione 3.5: *Sia $q = q(\overline{q},\overline{p},t)$, $p = p(\overline{q},\overline{p},t)$ una trasformazione dipendente dal tempo che conserva le parentesi di Poisson fondamentali identicamente in t. Allora la trasformazione è canonica, ed esiste una funzione $F(q,p,t)$ tale che l'Hamiltoniana trasformata ha la forma*

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p},t) = \big[H(q,p,t) - F(q,p,t)\big]_{q=q(\overline{q},\overline{p},t),p=p(\overline{q},\overline{p},t)} \tag{3.21}$$

---

[12] Per mettere in evidenza il ruolo particolare delle variabili q_0, p_0 userò la notazione (q,p,q_0,p_0), dove $q = (q_1,\ldots,q_n)$ e $p = (p_1,\ldots,p_n)$.

Qui occorre svolgere dei calcoli aggiuntivi per determinare la funzione $F(q,p,t)$, ma su questo punto non ci soffermiamo. Con la funzione generatrice tutto si semplifica sensibilmente. Vale infatti la

Proposizione 3.6: *Sia $S(\overline{p},q,t)$ una funzione che soddisfi la condizione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\overline{p}_j\partial q_k}\right)\neq 0\ .$$

identicamente in t. Allora la trasformazione definita implicitamente dalle relazioni

$$\overline{q}_j=\frac{\partial S}{\partial\overline{p}_j}\ ,\quad p_j=\frac{\partial S}{\partial q_j}\ ,\quad 1\leq j\leq n$$

è canonica, e l'Hamiltoniana trasformata ha la forma

$$\overline{H}(\overline{q},\overline{p},t)=H(q,p,t)\Big|_{q=q(\overline{q},\overline{p},t),p=p(\overline{q},\overline{p},t)}+\frac{\partial S}{\partial t}(\overline{p},q,t)\Big|_{q=q(\overline{q},\overline{p},t)}\ . \tag{3.22}$$

3.3 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Per l'integrazione di un sistema canonico, in generale non autonomo,[13] si può ricercare una trasformazione canonica dipendente dal tempo che ponga l'Hamiltoniana in una forma particolarmente semplice. A tal fine è naturale far uso della funzione generatrice nella forma $S(\overline{p},q,t)$ della proposizione 3.4, osservando che deve essere $p_j=\frac{\partial S}{\partial q_j}, 1\leq j\leq n$. Se $H(q,p,t)$ è l'Hamiltoniana, si cerca dunque un'opportuna soluzione dell'*equazione di Hamilton-Jacobi*

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0\ , \tag{3.23}$$

il che corrisponde a cercare la funzione generatrice di una trasformazione che cambia l'Hamiltoniana $H(q,p,t)$ nell'Hamiltoniana identicamente nulla.

Proposizione 3.7: *Data l'Hamiltoniana $H(q,p,t)$, sia $S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;q_1,\ldots,q_n,t)$ un integrale completo*[14] *dell'equazione di Hamilton-Jacobi (3.23), dipendente da n costanti arbitrarie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, e soddisfacente la condizione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_j\partial q_k}\right)\neq 0\ . \tag{3.24}$$

Allora le soluzioni del sistema delle equazioni di Hamilton per H si scrivono

$$\beta_j=\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}\ ,\quad p_j=\frac{\partial S}{\partial q_j}\ ,\quad 1\leq j\leq n\ , \tag{3.25}$$

---

[13] La considerazione di un sistema non autonomo qui è essenziale perché si ricercano $2n$ costanti del moto indipendenti, ed una almeno di esse deve dipendere dal tempo.

[14] Si intende con questo un integrale (non necessariamente l'integrale generale) che dipende parametricamente da n costanti arbitrarie, qui denotate con $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

dove $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sono costanti.

Dimostrazione. La funzione S soddisfa le condizioni della proposizione 3.4, e dunque $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sono coordinate canoniche. L'Hamiltoniana trasformata, per la (3.23), è l'Hamiltoniana identicamente nulla, sicché le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{\alpha}_j = 0 \ , \quad \dot{\beta}_j = 0 \ , \quad 1 \le j \le n \ .$$

Per inversione delle (3.25) si ricava allora

$$q = q(\alpha, \beta, t) \ , \quad p = p(\alpha, \beta, t) \ ,$$

ossia le soluzioni. *Q.E.D.*

Esempio 3.9: *Punto libero.* Dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Procedendo col metodo di separazione delle variabili, si cerca una soluzione della forma

$$S(x, y, z, t) = X(x) + Y(y) + Z(z) + T(t) \ ,$$

e quindi l'equazione diventa

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2\right] + \frac{dT}{dt} = 0 \ ;$$

deve dunque essere

$$\frac{dX}{dx} = \alpha_x \ , \quad \frac{dY}{dy} = \alpha_y \ , \quad \frac{dZ}{dz} = \alpha_z \ , \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} \ ,$$

con $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ costanti arbitrarie. Integrando si ottiene la generatrice

$$S(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, x, y, z, t) = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} t \ ,$$

e la corrispondente trasformazione è

$$\begin{array}{lll} p_x = \alpha_x \quad , & p_y = \alpha_y \quad , & p_z = \alpha_z \\ \beta_x = x - \dfrac{\alpha_x}{m} t \quad , & \beta_y = y - \dfrac{\alpha_y}{m} t \quad , & \beta_z = z - \dfrac{\alpha_z}{m} t \ . \end{array}$$

Questa altro non è che la ben nota soluzione.