

**Prova d'esame di Laboratorio di Programmazione
per il corso di laurea in Matematica
9 Febbraio 2004**

Tema d'esame 1: Trasformazioni di coordinate da cartesiane a polari e viceversa; verifica delle equazioni caratteristiche delle coniche in coordinate polari

Descrizione del metodo di calcolo (inizio)

Sia $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ una coppia di coordinate cartesiane diversa da $(0, 0)$.

La funzione $(x, y) \mapsto (\varrho, \vartheta)$, definita come segue:

$$(1) \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \vartheta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \end{cases},$$

induce una corrispondenza biunivoca tra (x, y) e la coppia (ϱ, ϑ) , note come coordinate polari, tali che $\varrho > 0$ e $\vartheta \in (-\pi, \pi]$.

La trasformazione di coordinate inversa $(\varrho, \vartheta) \mapsto (x, y)$ è data da

$$(2) \quad x = \varrho \cos \vartheta \quad y = \varrho \sin \vartheta.$$

Le coordinate polari sono molto usate, in particolare per descrivere i sistemi che presentano delle simmetrie rispetto a un punto.

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola la trasformazione da coordinate cartesiane a quelle polari e la sua inversa. Il programma deve contenere:

- (a) la fase di input della coppia $(x, y) \neq (0, 0)$;
- (b) due funzioni: la prima che, dati i valori di x e y , restituisce al main ϱ e ϑ calcolate come prescritto nella formula (1); viceversa, la seconda funzione, dati i valori di ϱ e ϑ , restituirà x e y come determinati dalla (2);
- (c) la stampa sul video dei valori di ϱ e ϑ (dopo la chiamata della prima funzione) e dei valori di x e y (dopo la chiamata della seconda funzione).

Alcuni consigli

È sicuramente comodo utilizzare la funzione **atan2**, che permette di calcolare l'angolo ϑ senza dover distinguere i vari casi come nella formula (1).

Al fine di controllare la correttezza del programma, si verifichi che la coppia (x, y) stampata alla fine sia uguale a quella introdotta da tastiera; inoltre, si può controllare la correttezza della prima delle due funzioni, facendo dei tests su delle corrispondenze $(x, y) \leftrightarrow (\varrho, \vartheta)$ che sono ben note: ad es. $(1, 1) \leftrightarrow (\sqrt{2}, \pi/4)$, $(-1, 1) \leftrightarrow (\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-1, -1) \leftrightarrow (\sqrt{2}, -3\pi/4)$, $(1, -1) \leftrightarrow (\sqrt{2}, -\pi/4)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2) \leftrightarrow (1, \pi/6)$ e $(1/2, \sqrt{3}/2) \leftrightarrow (1, \pi/3)$.

Descrizione del metodo di calcolo (fine)

L'equazione caratteristica di un'ellisse (con uno dei due fuochi nell'origine e l'altro nella direzione individuata da $\vartheta = \pi$) in coordinate polari è

$$(3) \quad \varrho = p/(1 + e \cos \vartheta),$$

dove il parametro $p > 0$ e l'eccentricità $e \in (0, 1)$. Questa stessa ellisse soddisfa la ben nota equazione caratteristica in coordinate cartesiane:

$$(4) \quad [(x - x_0)^2/a^2] + (y^2/b^2) - 1 = 0,$$

dove valgono le seguenti relazioni tra i parametri

$$(5) \quad a = p/(1 - e^2) , \quad b = p/\sqrt{1 - e^2} , \quad x_0 = -ae .$$

Per quanto riguarda le parabole, consideriamo il caso particolare di una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse, concavità diretta verso sinistra e il fuoco nell'origine, allora la sua equazione caratteristica in coordinate cartesiane è

$$(6) \quad x = -ay^2 + 1/(4a) ,$$

dove $a > 0$. Per questa stessa parabola, vale l'equazione caratteristica in coordinate polari

$$(7) \quad 1 - p/[\varrho(1 + \cos \vartheta)] = 0$$

(si noti che quest'ultima equazione è identica alla (3) se si pone $e = 1$), dove il parametro p è determinato dall'equazione seguente:

$$(8) \quad p = 1/(2a) .$$

Obiettivo (intermedio) 2:

al programma richiesto dall'obiettivo 1 si aggiunga la verifica numerica dell'esattezza dell'equazione caratteristica dell'ellisse in coordinate polari. Tale verifica deve essere svolta nel modo seguente:

- (a) si aggiunga una fase di input del parametro p ($p > 0$) e dell'eccentricità e ($0 < e < 1$);
- (b) si calcolino i valori dei parametri a , b e x_0 , usando le equazioni in (5);
- (c) si ripetano N volte (N fissato a piacere) i seguenti punti da (d) a (f);
- (d) si ponga $\vartheta = \frac{2i\pi}{N}$ ($i = 0, \dots, N - 1$) e si determini il valore di ϱ usando la (3);
- (e) si richiami la funzione che, date le coordinate polari, calcola quelle cartesiane;
- (f) si calcoli il valore assoluto del membro di sin. dell'eq. (4) e lo si stampi sul video.

Obiettivo (intermedio) 3:

al programma richiesto dall'obiettivo 2 si aggiunga la verifica numerica dell'esattezza dell'equazione caratteristica della parabola in coordinate polari. Tale verifica deve essere svolta nel modo seguente:

- (a) si aggiunga una fase di input del parametro a ($a > 0$) e si calcoli p usando la (8);
- (b) si ripetano N volte (N fissato a piacere) i seguenti punti da (c) a (e);
- (c) si ponga y uguale all' i -esimo ($i = 0, \dots, N - 1$) estremo degli $N - 1$ sottointervalli di uguale ampiezza (tra loro) in cui si può suddividere l'intervallo $[-1/a, 1/a]$; si calcoli x usando la (6);
- (d) si richiami la funzione che, date le coordinate cartesiane, calcola quelle polari;
- (e) si calcoli il valore assoluto del membro di sin. dell'eq. (7) e lo si stampi sul video.

Obiettivo (finale) 4:

- (a) si aggiunga al programma richiesto dall'obiettivo 3 l'apertura di un file, su cui vanno scritti il valore di N e i valori assoluti richiesti alla fine degli obiettivi 2 e 3;
- (b) si scriva un nuovo breve programma, in linguaggio **C**, che apre il file precedente, ne legge tutti i dati e stampa su video in formato esponenziale il massimo dei valori assoluti.

Quest'ultimo valore sarà molto piccolo, se entrambi i programmi sono stati scritti correttamente