

**Prova d'esame di Laboratorio di Programmazione  
per il corso di laurea in Matematica  
26 Gennaio 2004**

**Tema d'esame 1:** Calcolo delle funzioni seno e/o coseno tramite le espansioni in serie

**Descrizione del metodo di calcolo (inizio)**

Sia  $N$  una fissata potenza intera di 2, si considerino le due seguenti successioni finite:

$$S_N = \left\{ \sin 0, \sin \left( \frac{1}{N} \frac{\pi}{2} \right), \dots, \sin \left( \frac{N-1}{N} \frac{\pi}{2} \right), \sin \frac{\pi}{2} \right\}$$

e

$$C_N = \left\{ \cos 0, \cos \left( \frac{1}{N} \frac{\pi}{2} \right), \dots, \cos \left( \frac{N-1}{N} \frac{\pi}{2} \right), \cos \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Il calcolo preliminare degli elementi di  $S_N$  e  $C_N$  può essere svolto in modo iterativo. Ovviamente, si ha che:

$$S_1 = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad C_1 = \{1, 0\} .$$

Una volta note  $S_n$  e  $C_n$ , le successioni finite  $S_{2n}$  e  $C_{2n}$  sono determinate ricordando che valgono le seguenti identità:

- per ogni  $l = n, n-1, \dots, 0$ ,

$$\sin \left( \frac{2l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{l}{n} \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad \cos \left( \frac{2l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{l}{n} \frac{\pi}{2} \right)$$

(**attenzione:** le suddette identità sono state volutamente scritte in ordine inverso rispetto all'indice  $l$ , per ridurre il rischio di errore quando l'algoritmo viene tradotto in linguaggio di programmazione);

- per ogni  $l$  dispari tale che  $1 \leq l \leq n$ ,

$$\cos \left( \frac{l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) \right]}, \quad \sin \left( \frac{l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left( \frac{2l}{2n} \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left( \frac{l}{2n} \frac{\pi}{2} \right)},$$
$$\sin \left( \frac{2n-l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad \cos \left( \frac{2n-l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{l}{2n} \frac{\pi}{2} \right) .$$

**Obiettivo (intermedio) 1:**

si scriva un programma in linguaggio **C**, dove (dopo aver fissato a piacimento il valore del parametro  $N \geq 4$ ) due vettori vengono definiti in modo tale che i loro  $l$ -esimi elementi sono rispettivamente uguali a  $\sin \left( \frac{l}{N} \frac{\pi}{2} \right)$  e  $\cos \left( \frac{l}{N} \frac{\pi}{2} \right)$  dove  $l = 0, 1, \dots, N$ , utilizzando il metodo

di calcolo appena descritto **in modo tale da evitare ogni chiamata alle funzioni sin e cos della libreria matematica**. Si stampino sul video gli elementi dei due suddetti vettori.

**Descrizione del metodo di calcolo (fine)**

$\forall x \in [0, \pi/2]$ , si determina immediatamente un  $x_0$  tale che

$$x_0 \in \left\{ \frac{l \pi}{N \cdot 2} \right\}_{l=0,1,\dots,N} \quad \text{e} \quad |x - x_0| = \min_{l=0,1,\dots,N} \left\{ x - \frac{l \pi}{N \cdot 2} \right\} .$$

Sia  $h = x - x_0$ , i valori di  $\sin x$  e  $\cos x$  possono essere calcolati tramite le espansioni in serie

$$\sin x = \sin x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (-1)^j \left( -\frac{h^{2j-1} \cos x_0}{(2j-1)!} + \frac{h^{2j} \sin x_0}{(2j)!} \right) \right]$$

e

$$\cos x = \cos x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (-1)^j \left( \frac{h^{2j-1} \sin x_0}{(2j-1)!} + \frac{h^{2j} \cos x_0}{(2j)!} \right) \right]$$

**Obiettivo (intermedio) 2:**

si aggiunga al programma richiesto dall'obiettivo 1 una funzione che esegue il calcolo del seno o del coseno (a scelta) di un angolo  $x \in [0, \pi/2]$ , utilizzando l'approssimazione all'ordine 0 delle formule scritte appena sopra (in altre parole, si pone  $h = 0$  nel membro di destra). Dopo aver eseguito l'input di  $x \in [0, \pi/2]$ , si stampi su video il valore restituito da questa funzione e lo si confronti con quella fornita dalla libreria matematica.

**Obiettivo (intermedio) 3:**

si modifichi la funzione richiesta dall'obiettivo 2, considerando l'approssimazione all'ordine 2 delle formule scritte appena sopra (in altre parole, si trascurino tutti i termini con  $j > 1$  nella serie che compare nel membro di destra).

**Obiettivo (finale) 4:**

si modifichi la funzione richiesta dall'obiettivo 2, arrestando il calcolo della serie quando il  $j$ -esimo termine è sufficientemente piccolo secondo un criterio che è a propria discrezione.

**Obiettivo (facoltativo) 5:**

Anche al fine di rendere il procedimento più simile a quello effettivamente utilizzato nelle librerie matematiche messe a disposizione dai compilatori, si divida il programma in due sotto-programmi diversi: il primo dei quali si deve occupare della fase preliminare (cioè dell'obiettivo 1) una volta per tutte; il secondo sotto-programma ospita invece la funzione che calcola effettivamente la funzione seno o coseno. Il primo sotto-programma avrà quindi anche il compito di scrivere su un file i vettori tali che i loro elementi sono rispettivamente uguali a quelli delle successioni finite  $S_N$  e  $C_N$ ; il secondo dovrà invece leggere il contenuto di quel file. Affinché non ci sia perdita di informazioni in questo passaggio, si consiglia di effettuare le operazioni di lettura/scrittura su file in modo binario.