Appendix C

BIRKHOFF NORMAL FORM: A CONSTRUCTIVE APPROACH

A parte un po' di estensioni che riguardano soprattutto le parti maggiormente tecniche e, in particolare, le stime analitiche, questo capitolo è sostanzialmente una riproposizione di alcune parti della tesi di laurea[1] della Dr.ssa Caracciolo. A loro volta, quelle parti che sono ripresentate qui di seguito sono almeno parzialmente una rilettura ragionata (con adattamenti assolutamente non banali al contesto di quella tesi) di alcune delle sezioni finali delle "Note del corso di Meccanica Celeste", di A. Giorgilli, nella versione dell'a.a. 1990/91, per il corso di laurea in Matematica, Univ. di Milano.

C.1 Serie di Lie e trasformata di Lie

In questa sezione vogliamo introdurre le serie di Lie per definire trasformazioni di coordinate canoniche.

Sia $(x(t), y(t))$ una soluzione delle equazioni del moto associato ad una Hamiltoniana χ, cioè $\Phi^t_\chi(x(0), y(0)) = (x(t), y(t))$. Se poniamo $(u, v) = (x(t), y(t))$ e $(X, Y) = (x(0), y(0))$, allora si ricordi che la trasformazione di coordinate definita da $(u, v) = \Phi^t_\chi(X, Y)$ è canonica, grazie al lemma 3.3.

Le serie di Lie ci forniscono un algoritmo per poter calcolare Φ^t_χ , vediamo ora di spiegare (almeno a livello intuitivo) in che senso ciò è possibile. Abbiamo già visto che per le coordinate p_j, q_j valgono le equazioni in (1.27). In base a questo, ricordando la definizione di derivata di Lie, se sviluppiamo le coordinate in serie di Taylor nell'intorno

[1] C. Caracciolo: "Studio rigoroso della stabilità effettiva di sistemi Hamiltoniani quasi-integrabili: stime computer-assisted", tesi di laurea magistrale in Matematica, Università di Roma "Tor Vergata" (2016).

dell'origine, si ricava che
$$p_j(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i p_j}{dt^i}\bigg|_{t=0} t^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} L_\chi^i p_j \bigg|_{\substack{p=p(0)\\ q=q(0)}}$$
e analogamente per q_j .

In forza di queste ultime osservazioni, vi potranno essere trasformazioni canoniche del seguente tipo:
$$(u,v) = \Phi_\chi^t(X,Y) = \exp L_{t\chi}(x,y)\big|_{\substack{x=X\\ y=Y}} \ .$$
Prima di affrontare la discussione in modo completamente rigoroso, dobbiamo introdurre le serie formali in variabili polinomiali.

C.1.1 Le serie formali

Consideriamo la famiglia $\{\mathscr{P}_s\}_{s\geq 0}$, dove $\mathscr{P}_s$ è lo spazio dei polinomi omogenei di grado s nelle variabili[2] $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Una base in $\mathscr{P}_s$ è costituita dai monomi $\mathbf{x}^\mathbf{j}\mathbf{y}^\mathbf{k} \equiv x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n} y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$, dove $\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ sono vettori a componenti non negative, con la proprietà $|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}| = s$, ed usiamo la notazione seguente: $|\mathbf{j}| = |j_1| + \cdots + |j_n|$. In questa base, un qualunque polinomio $f \in \mathscr{P}_s$ si scriverà

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|=s} c_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \mathbf{x}^\mathbf{j}\mathbf{y}^\mathbf{k} \ , \quad c_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \ . \tag{C.1}$$

Vediamo ora una serie di proprietà che ci saranno utili successivamente.

Proposition C.1: *Siano $f \in \mathscr{P}_s$ e $g \in \mathscr{P}_r$; allora*

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_l} \in \mathscr{P}_{s-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_l} \in \mathscr{P}_{s-1}$ $\forall\ 1 \leq l \leq n$;

(ii) $f \cdot g \in \mathscr{P}_{r+s}$;

(iii) $\{f,g\} \in \mathscr{P}_{s+r-2}$.

Proof. Le prime due sono semplici conseguenze delle proprietà della derivazione e del prodotto tra polinomi. La *(iii)* segue invece dalle prime due e dalla definizione di parentesi di Poisson. In ogni termine della somma ho il prodotto tra le derivate di f e g, che per *(i)* hanno grado $s-1$ e $r-1$; per *(ii)*, il grado risultante sarà quindi dato dalla somma dei due gradi, ovvero $s+r-2$. *Q.E.D.*

Nello spazio introdotto $\mathscr{P} = \bigoplus_{s\geq 0} \mathscr{P}_s$ si considerano somme anche infinite di polinomi omogenei, senza porsi problemi di convergenza. Le operazioni di prodotto e parentesi di Poisson tra due funzioni qualunque $f, g \in \mathscr{P}$ verranno effettuate ricorrendo ad un riordinamento per polinomi omogenei. Ad esempio, se
$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots, \quad g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots, \quad f_s,\ g_s \in \mathscr{P}_s$$
si avrà
$$fg = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0) + (f_2g_0 + f_1g_1 + f_0g_2) + \ldots \ ,$$

[2] Tutto ciò che è trattato in questo capitolo potrebbe essere facilmente adattato al caso di variabili complesse.

dove le parentesi mettono in evidenza i termini omogenei dello sviluppo. Uno sviluppo analogo si può fare per le parentesi di Poisson. Con queste assunzioni, lo spazio $\mathscr{P}$ ha le proprietà formali di un'algebra.

C.1.2 La trasformata di Lie come operatore sullo spazio delle serie formali

È comodo introdurre un operatore $T_\chi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, che è detto trasformata di Lie ed è formalmente definito come segue.

Definition C.2: *Data una successione $\chi = \{\chi_s\}_{s\geq 1}$ di funzioni $\chi_s \in \mathscr{P}_{s+2}$ e una qualunque $f \in \mathscr{P}$, sia*

$$T_\chi f = f_0 + f_1 + \cdots \ , \tag{C.2}$$

dove

$$f_0 = f, \quad f_s = \sum_{j=1}^{s} \frac{j}{s} L_{\chi_j} f_{s-j} \qquad s > 0 \ . \tag{C.3}$$

Racchiudiamo nella seguente proposizione le proprietà di T_χ.

Proposition C.3: *L'operatore T_χ è lineare e conserva le parentesi di Poisson ed i prodotti, cioè*

$$T_\chi\{f, g\} = \{T_\chi f, T_\chi g\}, \quad T_\chi(fg) = (T_\chi f)(T_\chi g) \ .$$

Proof. Poiché l'operatore T_χ è costruito mediante applicazioni successive di operatori lineari, la linearità di T_χ segue facilmente grazie a un procedimento induttivo.

Per quanto riguarda la conservazione delle parentesi di Poisson, la verifica non è altrettanto semplice. Estendendo la notazione utilizzata nella definizione dell'operatore, si può scrivere

$$T_\chi\{f, g\} = \{f, g\}_0 + \{f, g\}_1 + \ldots$$

Utilizzando la linearità è sufficiente dimostrare allora che per ogni $r \geq 0$ si ha

$$\{f, g\}_r = \sum_{l=0}^{r} \{f_l, g_{r-l}\} \ .$$

Per $r = 0$, questa è una banale identità; per $r > 0$ procediamo induttivamente. Usando la definizione di T_χ e l'ipotesi induttiva su $\{f, g\}_{r-j}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \{f, g\}_r &= \sum_{j=1}^{r} \frac{j}{r} L_{\chi_j} \{f, g\}_{r-j} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=0}^{r-j} \frac{j}{r} L_{\chi_j} \{f_l, g_{r-j-l}\} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=0}^{r-j} \frac{j}{r} \left(\{L_{\chi_j} f_{r-j-l}, g_l\} + \{f_l, L_{\chi_j} g_{r-j-l}\} \right) \ , \end{aligned}$$

dove è stato effettuato il passaggio descritto nell'ultima riga utilizzando l'identità di Jacobi e la simmetria degli indici l e $r - j - l$. Scambiando l'ordine delle sommatorie e cambiando in modo consistente gli estremi, si ha

$$\{f,g\}_r = \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-l}\frac{j}{r}(\{L_{\chi_j}f_{r-j-l},g_l\}+\{f_l,L_{\chi_j}g_{r-j-l}\})\ .$$

Ora, usando la definizione di f_s data in (C.3) e ricombinando in modo opportuno gli indici, si ricava

$$\{f,g\}_r = \sum_{l=1}^{r}\frac{l}{r}\{f_l,g_{r-l}\}+\sum_{l=0}^{r-1}\frac{r-l}{r}\{f_l,g_{r-l}\} = \sum_{l=0}^{r}\{f_l,g_{r-l}\}\ ,$$

dove l'ultimo passaggio è stato effettuato aggiungendo i termini nulli per $l=0$ nella prima somma e $l=r$ nella seconda, per poi fattorizzare. Questo conclude la dimostrazione della conservazione delle parentesi di Poisson.

Per quanto riguarda la conservazione del prodotto, si può eseguire seguendo esattamente lo stesso calcolo, sostituendo il prodotto alle parentesi di Poisson e la proprietà $L_\chi(fg)=(L_\chi f)g+f(L_\chi g)$ all'identità di Jacobi. *Q.E.D.*

Consideriamo una proprietà dell'operatore T_χ in un caso particolare, questo ci consentirà di stabilire una semplice relazione che intercorre tra serie di Lie e trasformate di Lie.

Proposition C.4: *Sia* $\chi=\{0,\cdots,0,\chi_r,0,\cdots,0\}$, *allora si ha che*

$$T_\chi\cdot = \exp L_{\chi_r}\cdot\ \ .$$

Proof. Sia f polinomiale. Per definizione, $T_\chi f = f_0+f_1+\cdots$ dove

$$f_s = \sum_{j=1}^{s}\frac{j}{s}L_{\chi_j}f_{s-j} = \frac{r}{s}L_{\chi_r}f_{s-r} \tag{C.4}$$

con $s-r\geq 0$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $\chi_s=0$ se $s\neq 0$. Ripetendo ancora lo stesso ragionamento otteniamo che

$$f_{s-r} = \frac{r}{s-r}L_{\chi_r}f_{s-2r}$$

con $s-2r\geq 0$ e anche formule analoghe per f_{s-jr}. Dalla formula (C.4) segue che $f_m=0\ \forall\ m=1,\ldots,r-1$; di conseguenza, $f_s\neq 0$ solo se s è un multiplo di r. Iterando (C.4), otteniamo che

$$f_{nr} = \frac{r}{nr}L_{\chi_r}f_{(n-1)r} = \cdots = \frac{1}{n!}L^n_{\chi_r}f\ .$$

Allora,

$$T_\chi f = f+f_r+f_{2r}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}L^n_{\chi_r}f = \exp L_{\chi_r}f\ .$$

Q.E.D.

Dalle ultime due proposizioni si deduce immediatamente il seguente

Corollary C.5: *$\forall\ \chi \in \mathscr{P}$ l'operatore $\exp L_\chi \cdot$ preserva le parentesi di Poisson e, quindi, definisce trasformazioni canoniche.*

Quest'ultima proprietà è assolutamente essenziale, perché ci consente di dotarci dello strumento tecnico fondamentale per definire algoritmi costruttivi per le forme normali. Ciò è cosi̇ importante che merita qualche approfondimento.

Un'ultima cosa che occorre capire prima di descrivere l'algoritmo di costruzione di forma normale, è come esprimere la nuova Hamiltoniana dopo la trasformazione di coordinate; per fare ciò, utilizziamo il cosiddetto teorema di scambio.

Theorem C.6: **[Teorema di scambio]** *Data una Hamiltoniana $\mathscr{H}$ e la trasformazione canonica di coordinate $(x, y) \to (X, Y)$, si ha che*

$$\mathscr{K}(X, Y) = \mathscr{H}(x(X, Y), y(X, Y)) = (\exp L_\chi \mathscr{H})\Big|_{\substack{x=X \\ y=Y}} \ .$$

Proof. Il risultato è una semplice conseguenza delle proprietà di linearità e conservazione del prodotto dell'operatore $\exp L_\chi$, come garantito dalle proposizioni C.3 e C.4; poiché la Hamiltoniana è costituita da termini polinomiali, segue facilmente l'asserto. *Q.E.D.*

In pratica, questo teorema afferma che per calcolare la nuova Hamiltoniana è sufficiente applicare la serie di Lie alla vecchia e poi rimpiazzare le variabili (x, y) con le nuove. Infatti, formalmente, $f\left(\Phi^t_\chi(x, y)\right) = \exp L_{t\chi} f$. Con abuso di notazione, nei futuri cambi di variabile si tenderà a rinominare le nuove variabili come le vecchie.

Nella definizione di queste serie non è mai stata discussa la convergenza; vedremo, nei prossimi capitoli, che sotto determinate ipotesi su χ, la serie di Lie associata è convergente.

C.2 Forma normale di Birkhoff di ordine finito

Un approccio perturbativo classico consiste nel costruire una forma normale, cioè trasformare la Hamiltoniana in una forma più semplice che ci permetta di risolvere il problema. Per quanto osservato precedentemente, se riuscissimo a effettuare delle trasformazioni canoniche in modo tale che la Hamiltoniana finale dipenda solo dalle azioni, allora riusciremmo a risolvere le equazioni; l'obiettivo della trasformazione di coordinate sarà dunque portare la Hamiltoniana in una forma opportuna e rendere la parte perturbativa di ordine inferiore rispetto al passo precedente. In questo caso specifico, nell'intorno dell'origine i termini polinomiali di grado più basso sono quelli più significativi, perciò, per diminuire l'errore commesso, ad ogni passo conviene cercare di eliminare il primo termine perturbativo.

Per costruire le trasformazioni canoniche che ci permettano di costruire la forma normale di Birkhoff utilizzeremo le serie di Lie.

C.2.1 Descrizione dell'algoritmo formale

Indicheremo con l'indice in alto tra parentesi il passo di normalizzazione che si sta considerando. Partiamo dal passo 0–esimo, la cui corrispondente Hamiltoniana è del tipo seguente:

$$\mathscr{H}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}(x_j^2 + y_j^2) + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l^{(0)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \ , \tag{C.5}$$

dove le $f_l^{(0)} \in \mathscr{P}_{l+2}$ $\forall\ l \geq 1$.

L'algoritmo è costituito da una serie di trasformazioni canoniche, definite tramite serie di Lie, le quali consentono di passare da una Hamiltoniana che al passo $r-1$ denotiamo con $\mathscr{H}^{(r-1)}$ a $\mathscr{H}^{(r)}$, tale che

$$\mathscr{H}^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} Z_l + \sum_{l=r+1}^{+\infty} f_l^{(r)} \ , \tag{C.6}$$

dove $Z_l \in \mathscr{P}_{l+2}$, con $l = 0, \ldots, r$, sono i cosiddetti termini in forma normale, costituiscono la parte integrabile della Hamiltoniana e sono funzioni polinomiali solo delle azioni, ovvero $Z_l = Z_l(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}, \ldots, \frac{x_n^2+y_n^2}{2})$; $\forall\ l > r$ invece, f_l indica un polinomio in $\mathscr{P}_{l+2}$ che dipende genericamente dalle variabili x, y.

L'r–esimo passo di normalizzazione ci permette quindi di passare da una Hamiltoniana in forma normale fino al termine $(r-1)$–esimo ad una che è normalizzata fino all' r–esimo termine; ad ogni passo perciò, è il termine perturbativo di grado più basso ad essere posto in forma normale.

Descriviamo ora l'r–esimo passo dell'algoritmo, tenendo conto che questo verrà applicato per induzione a partire da $r = 1$. Ricordiamo che al passo $r-1$ la Hamiltoniana è in questa forma

$$\mathscr{H}^{(r-1)} = \sum_{l=0}^{r-1} Z_l + \sum_{l=r}^{+\infty} f_l^{(r-1)} \ .$$

L'obiettivo di questo passo è rimuovere il termine principale della perturbazione $f_r^{(r-1)}$, e per fare ciò occorre determinare la funzione generatrice $\chi_r \in \mathscr{P}_{r+2}$ che risolve l'equazione omologica definita da

$$L_{\chi_r} Z_0 + f_r^{(r-1)} = Z_r \ . \tag{C.7}$$

Grazie alle proprietà mostrate per le parentesi di Poisson nella proposizione C.1 e per le derivate di Lie nella proposizione successiva, $Z_r \in \mathscr{P}_{r+2}$ poiché è somma di polinomi di grado $r+2$; è importante sottolineare che Z_r per definizione sarà il nuovo termine in forma normale e occorrerà fare dunque in modo che dipenda solo dalle azioni.

Mostreremo in seguito che se χ_r soddisfa l'equazione omologica, allora la trasformazione di coordinate definita da $\exp L_{\chi_r}$ fa proprio quello che ci eravamo prefissati di fare; prima però, vediamo come si risolve l'equazione. Innanzitutto, è utile passare alle coordinate complesse $(\mathbf{z}, i\bar{\mathbf{z}})$ con $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, definite dalla seguente trasformazione di coordinate:

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + iy_j) \quad \forall\ j = 1, \ldots, n \ .$$

Per completezza, ricaviamo anche la trasformazione inversa, che denoteremo in seguito con $\mathscr{D}$:

$$
(C.8) \qquad \begin{cases} x_j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \bar{z}_j) \\ y_j = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}(z_j - \bar{z}_j) \end{cases} \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n\ .
$$

Ricordando il corollario 2.10, si può vedere che la trasformazione di coordinate $(x, y) = \mathscr{D}(z, i\bar{z})$ è canonica; infatti,

$$
\{x_j, y_j\}_{z,i\bar{z}} = -\frac{i}{2}[-\{z_j, \bar{z}_j\} + \{\bar{z}_j, z_j\}] = -\frac{i}{2}[-2\{z_j, \bar{z}_j\}] = i \cdot \frac{1}{i} = 1\ .
$$

Nelle nuove coordinate, il termine che rappresenta l'approssimazione quadratica costituita da una n–upla di oscillatori armonici diventa $Z_0 = \omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \ldots + \omega_n z_n \bar{z}_n$, ovvero le azioni sono espresse come $z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n$; i termini in forma normale in queste coordinate dunque saranno funzioni polinomiali delle azioni, cioè $Z_s = Z_s(z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n)$. Inoltre, per fissare le idee, è senz'altro conveniente riscrivere l'espansione della Hamiltoniana iniziale in coordinate canoniche complesse, cioè

$$
(C.9) \qquad \mathscr{H}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \bar{z}_j + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l^{(0)}(i\bar{z}_1\,,\ \ldots,\ , i\bar{z}_n, z_1\,, \ldots,\ z_n)\ ,
$$

dove (con abuso di notazione) abbiamo utilizzato lo stesso simbolo per le funzioni perturbative $f_l^{(0)} \in \mathscr{P}_{l+2}$, nonostante sia cambiata la dipendenza dagli argomenti (che ora sono costituite dalle nuove variabili canoniche complesse).

Procediamo ora alla risoluzione dell'equazione omologica nel contesto della dimostrazione del seguente enunciato.

Proposition C.7: *Sia*

$$
f_r^{(r-1)} = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} c_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}^{(r-1)} \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}
$$

un polinomio di grado $r + 2$ che compare nello sviluppo della Hamiltoniana al passo $r-1$, e che si vuole ora porre in forma normale, dove si è fatto uso della notazione multi-indice[3]. Allora, la generatrice che risolve l'equazione omologica (C.7) avrà l'espressione

$$
\chi_r = \sum_{\substack{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2 \\ \mathbf{l}\neq\bar{\mathbf{l}}}} -\frac{c_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}^{(r-1)}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})} \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}\ ,
$$

mentre il nuovo termine in forma normale sarà

$$
Z_r = \sum_{2|\mathbf{l}|=r+2} c_{\mathbf{l},\mathbf{l}}^{(r-1)} (i\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}})^{\mathbf{l}}\ ,
$$

---

[3] In generale, dati $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ si indica con $\mathbf{u}^{\mathbf{l}}\mathbf{w}^{\mathbf{m}} = u_1^{l_1} \cdots u_n^{l_n} w_1^{m_1} \cdots w_n^{m_n}$.

dove $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\mathbf{l}$, $\bar{\mathbf{l}} \in \mathbb{Z}^n$ *e* $|\mathbf{l}| = |l_1| + \ldots + |l_n|$.

Proof. Per risolvere l'equazione omologica, innanzitutto occorre capire come agisce L_{χ_r} su Z_0, data una χ_r in forma generica. Scriviamo quindi lo sviluppo di una generica χ_r nelle coordinate complesse:

$$\chi_r = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} \vartheta_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}} \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} \ .$$

Occorrerà determinare i coefficienti $\vartheta_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}$ affinché sia verificata l'equazione. Nota l'espressione di Z_0 nelle nuove coordinate e sfruttando la linearità delle parentesi di Poisson, si ricava che

$$L_{\chi_r} Z_0 = \{Z_0, \chi_r\} = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} \vartheta_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \bar{z}_j ,\ \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} \right\} \ .$$

Per ogni valore fissato di $\mathbf{l}$ e $\bar{\mathbf{l}}$ si ha che

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \bar{z}_j ,\ \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} \right\} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\omega_j \bar{z}_j \cdot \frac{(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} \mathbf{z}^{\mathbf{l}} \bar{l}_j}{i\bar{z}_j} - \frac{\omega_j z_j}{i} \cdot \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} l_j}{z_j} \right] \\ &= i \sum_{j=1}^{n} \omega_j (l_j - \bar{l}_j) \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}} \ . \end{aligned}$$

Allora, poiché per verificare l'equazione occorre fare in modo che, sommando $L_{\chi_r} Z_0$ con $f_r^{(r-1)}$, rimangano solo i termini in cui z_j e $\bar{z}_j$ compaiono allo stesso grado, visto che le azioni in queste coordinate sono $z_1\bar{z}_1, \dots, z_n\bar{z}_n$, basta prendere

$$\vartheta_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}} = -\frac{c_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}^{(r-1)}}{i\boldsymbol{\omega}(\mathbf{l} - \bar{\mathbf{l}})}$$

per $\mathbf{l} \neq \bar{\mathbf{l}}$. In questo modo infatti i termini rimanenti, che definiranno Z_r, saranno in forma normale poiché sono quelli per cui l'esponente relativo a z_j e $\bar{z}_j$ è lo stesso; Z_r avrà dunque l'espressione

$$Z_r = \sum_{2|\mathbf{l}|=r+2} c_{\mathbf{l},\mathbf{l}}^{(r-1)} (i\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}})^{\mathbf{l}} \ .$$

Q.E.D.

Siamo ora in condizione di aggiungere qualche commento. Dalla dimostrazione precedente emerge chiaramente perché ricorriamo alle coordinate complesse: ogni monomio del tipo $\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}$ è un autovettore per l'operatore lineare $L_{Z_0}\cdot$, cioè la derivata di Lie rispetto al termine principale della Hamiltoniana. Inoltre, nella definizione della generatrice riportata in enunciato, notiamo che vengono introdotti i "piccoli divisori"

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})$: occorrerà avere delle condizioni di non risonanza sul vettore di frequenze $\boldsymbol{\omega}$ affinché il denominatore non vada a zero[4].

Una volta definita la generatrice, occorre esprimere la Hamiltoniana nelle nuove coordinate; utilizzando il teorema di scambio C.6, questa è definita come

$$\mathscr{H}^{(r)} = \exp L_{\chi_r} \mathscr{H}^{(r-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} \mathscr{H}^{(r-1)} \ . \tag{C.10}$$

Per $j = 0$, si ha semplicemente una copia della vecchia Hamiltoniana; per prima cosa allora, ridefiniamo i nuovi termini perturbativi come quelli al passo precedente, cioè $f_l^{(r)} = f_l^{(r-1)}\ \forall\ l \geq r$.

Per $j = 1$, il primo termine è $L_{\chi_r} Z_0$; poiché è soddisfatta l'equazione omologica, $L_{\chi_r} Z_0 = -f_r^{(r-1)} + Z_r$, viene quindi eliminato il termine perturbativo di grado più basso e introdotto il nuovo termine di forma normale, così come volevamo.

Ora, resta da capire come si calcolano i nuovi termini perturbativi $f_s^{(r)} \in \mathscr{P}_{s+2}$ con $s > r$, in funzione dei termini che compaiono nell'espansione di $\mathscr{H}^{(r-1)}$. Poiché, grazie alla proposizione C.1, si può vedere per induzione che $L^j_{\chi_r} f_s \in \mathscr{P}_{jr+s+2}$ quando $f_s \in \mathscr{P}_{s+2}$, osserviamo che l'unico nuovo termine di grado $\leq r+2$ che viene generato da una parentesi di Poisson è $L_{\chi_r} Z_0$, che è già stato considerato perché compare nell'equazione omologica. Questo ci permette di affermare che, una volta che viene definito, il nuovo termine di forma normale non sarà più modificato nei passi successivi dell'algoritmo.

I contributi dei nuovi termini generati dalle parentesi di Poisson saranno considerati grazie alle seguenti ridefinizioni:

$$\begin{aligned} f^{(r)}_{s+jr} &\hookleftarrow \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} Z_s && \forall\ 0 \leq s < r,\ j \geq 1 \ , \\ f^{(r)}_{s+jr} &\hookleftarrow \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} f_s^{(r-1)} && \forall\ s \geq r,\ j \geq 1 \ , \end{aligned} \tag{C.11}$$

dove si usa la notazione $a \hookleftarrow b$ per indicare che a viene ridefinita come $a + b$. Nel ricavare queste ridefinizioni, si è implicitamente fatto uso delle proprietà di linearità degli operatori L_{χ_r} e, quindi, anche $\exp L_{\chi_r}$. Questo conclude la descrizione dell'algoritmo che abbiamo presentato in una forma molto simile alla sua traduzione in un qualsiasi ambiente di programmazione. È però conveniente riformulare l'espressione che definisce i nuovi termini perturbativi anche in modo pi tradizionale, perché questo consentirà di scrivere lo schema di stime in modo più agevole. Avendo cura di raggruppare i termini a seconda del loro grado polinomiale finale, la giustificazione delle

[4] Abitualmente, si assume una condizione di non risonanza di tipo diofanteo, del tipo che è estata discussa in sezione 4.2.3. Noi faremo altrettanto nel prosieguo di questo capitolo.

seguenti equazioni dovrebbe risultare piuttosto facile:

$$
(C.12)\qquad
\begin{aligned}
f_{kr+m}^{(r)} &= \frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k}Z_m + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}L_{\chi_r}^{j}f_{(k-j)r+m}^{(r-1)} && \forall\ 1\le m<r,\ k\ge 1\ ,\\
f_{kr}^{(r)} &= \frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k-1}Z_r + \frac{k-1}{k!}L_{\chi_r}^{k-1}f_r^{(r-1)} + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{j!}L_{\chi_r}^{j}f_{(k-j)r}^{(r-1)} && \forall\ k\ge 2\ .
\end{aligned}
$$

Quest'ultima equazione, merita qualche commento più dettagliato. Partendo dalla relazione

$$
f_{kr}^{(r)} = \frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k}Z_0 + \frac{1}{(k-1)!}L_{\chi_r}^{k-1}f_r^{(r-1)} + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{j!}L_{\chi_r}^{j}f_{(k-j)r}^{(r-1)} \qquad \forall\ k\ge 2\ ,
$$

è conveniente rielaborare i primi due addendi del membro di sinistra dell'equazione nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k}Z_0 + \frac{1}{(k-1)!}L_{\chi_r}^{k-1}f_r^{(r-1)} &= \frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k-1}\left(L_{\chi_r}^{k}Z_0 + f_r^{(r-1)}\right) + \frac{(k-1)}{k!}L_{\chi_r}^{k-1}f_r^{(r-1)}\\
&= \frac{1}{k!}L_{\chi_r}^{k}Z_r + \frac{1}{(k-1)!}L_{\chi_r}^{k-1}f_r^{(r-1)}\ ,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione omologica (C.7); così facendo abbiamo completato la giustificazione della formula (C.12). Si noti che in quelle equazioni che definiscono iterativamente i nuovi termini perturbativi, ora non compare mai esplicitamente la parte quadratica dell'Hamiltoniana, cioè Z_0, che comunque influenza in modo molto sostanziale ogni singolo passo perturbativo, perché da essa dipende la soluzione dell'equazione omologica (C.7) e, quindi, la generatrice χ_r.

Notiamo ora che è possibile, componendo le varie trasformazioni di coordinate usate, costruire la trasformazione di coordinate completa, in modo tale da riassumere tutto lo schema che definisce la forma normale. Questo ci consentirà di elaborare l'algoritmo di calcolo che sta alla base del cosiddetto metodo di integrazione semi-analitico.

La trasformazione di coordinate $(\mathbf{z}, i\bar{\mathbf{z}}) = \mathscr{C}^{(r)}(\boldsymbol{\zeta}, i\bar{\boldsymbol{\zeta}})$ è definita da $\mathscr{C}^{(r)} = \varphi^{(1)}\circ\varphi^{(2)}\circ\cdots\circ\varphi^{(r)}$, dove ognuna delle φ è tale che $\mathscr{H}^{(r)} = \mathscr{H}^{(r-1)}\circ\varphi^{(r)}$. Poiché $\varphi^{(r)} = \exp L_{\chi_r}$, usando il teorema di scambio si può esprimere $\mathscr{H}^{(r)}$ in termini della serie di Lie:

$$
\mathscr{H}^{(r)}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)}) = \mathscr{H}^{(r-1)}\left(\exp L_{\chi_r}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)})\right) = \exp L_{\chi_r}\mathscr{H}^{(r-1)}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)})\ .
$$

Osserviamo ora che è possibile ricostruire in maniera esplicita la trasformazione di coordinate che permette di costruire tutta la forma normale fino al passo r; infatti,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{z}^{(0)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(0)}) &= \varphi^{(1)}\circ\cdots\circ\varphi^{(r)}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)})\\
&= \exp L_{\chi_r}(\varphi^{(1)}\circ\cdots\circ\varphi^{(r-1)}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)}))\\
&= \cdots = \exp L_{\chi_r}\exp L_{\chi_{r-1}}\cdots\exp L_{\chi_1}(\mathbf{z}^{(r)}, i\bar{\mathbf{z}}^{(r)})\ .
\end{aligned}
$$

Questo significa che, una volta determinate le funzioni generatrici e le relative serie di Lie associate, la trasformazione $\mathscr{C}^{(r)}$ si può determinare in maniera esplicita, applicando il prodotto delle serie di Lie alle singole coordinate piuttosto che alla Hamiltoniana. Conoscere la trasformazione di coordinate è necessario per esprimere la soluzione approssimata del problema nelle vecchie coordinate. Indichiamo ora con $\mathscr{A}$ la trasformazione di coordinate che permette di passare alle coordinate angolo-azione, cioè $(\boldsymbol{\zeta}, i\bar{\boldsymbol{\zeta}}) = \mathscr{A}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$, dove

$$(C.13) \qquad \begin{cases} z_j = I_j\, e^{i\varphi_j} \\ i\bar{z}_j = iI_j\, e^{-i\varphi_j} \end{cases} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\ .$$

Dopo aver ricordato che $\mathscr{D}$ è la trasformazione che consente di passare in coordinate complesse, allora è possibile ricavare le soluzioni approssimate del problema iniziale applicando il seguente schema (abitualmente detto di tipo) semi-analitico:

$$(C.14) \qquad \begin{array}{ccc} \big(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)\big) & \xrightarrow{\ \mathscr{A}^{-1} \circ \left(\mathscr{C}^{(r)}\right)^{-1} \circ \mathscr{D}^{-1}\ } & (\mathbf{I}(0)\,,\ \boldsymbol{\varphi}(0)) \\ & & \Big\downarrow \boldsymbol{\Phi}^t_{\mathscr{Z}^{(r)}} \\ \big(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\big) & \xleftarrow{\ \mathscr{D} \circ \mathscr{C}^{(r)} \circ \mathscr{A}\ } & (\mathbf{I}(0)\,,\ \boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{\omega}^* t) \end{array} ,$$

dove poniamo $\omega_j^* = \frac{\partial \mathscr{Z}}{\partial I_j}(I(0))$; essendo $\mathscr{Z}^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} Z_l$, quindi $\omega_j^* \simeq \frac{\partial \mathscr{H}^{(r)}}{\partial I_j}$. Questo schema di integrazione numerica sarà tanto più accurato quanto più sarà piccolo il cosiddetto resto della forma normale $\mathscr{R}^{(r)} = \sum_{l=r+1}^{+\infty} f_l^{(r)}$.

C.3 Stime di stabilità effettiva

La stabilità in senso matematico è solitamente associata a proprietà soddisfatte per tutti i tempi. Ad esempio, un punto di equilibrio si dice stabile se ogni intorno V del punto è invariante per tutte le orbite con condizione iniziale in un opportuno secondo intorno $U \subset V$. In generale però è difficile dimostrare la stabilità in un senso così forte da valere per ogni tempo, pertanto può essere conveniente scegliere di cercare risultati più deboli, ma che abbiano comunque un significato per sistemi fisici reali. Per esempio, in un intorno di raggio ϱ di un punto di equilibrio, può essere utile cercare di individuare le situazioni per cui, partendo da una condizione iniziale in una palla di raggio ϱ_0 con $\varrho_0 < \varrho$, la soluzione resterà in B_ϱ per un tempo lungo almeno $T = T(\varrho)$. Si intuisce che saremo interessati a mostrare questa proprietà per valori di T molto "grandi", tendenti a infinito per $\varrho_0 \to 0$. Il significato di "grande" dipenderà ovviamente dalle caratteristiche del sistema dinamico che si sta considerando: in generale, si investigano degli intervalli che siano lunghi rispetto al tempo caratteristico del sistema studiato o confrontabili con il suo tempo di vita, quando si tratta di modelli fisici, biologici, ecc. Ora occorre capire in che modo la costruzione della forma normale ci permette di ottenere risultati di questo tipo. A questo scopo, è conveniente introdurre ora una nuova norma sullo spazio dei polinomi omogenei: dato $f_s \in \mathscr{P}_{s+2}$ tale che $f_s = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=s+2} f_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}$, si definisce

$$\|f_s\| = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=s+2} |f_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}| \ . \tag{C.15}$$

La norma appena introdotta funge anche da maggiorante della norma sup; infatti, si osservi che

$$\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} |f_s| \le \|f_s\|\varrho^{s+2} \ , \tag{C.16}$$

Supponiamo di conoscere al passo r di normalizzazione una stima della (suddetta) norma del resto nell'intorno dell'equilibrio definito come

$$B_\varrho(\mathbf{0}) = \left\{(\mathbf{z}, i\bar{\mathbf{z}}) \ : \ \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| < \varrho\right\} \ ;$$

in particolare, facendo riferimento alla notazione introdotta nella precedente sottosezione C.2.1, immaginiamo di sapere che

$$\sum_{s\ge r+1} 2(s+2)\|f_s^{(r)}\|\varrho^{s+2} < \varepsilon \ . \tag{C.17}$$

Siamo allora in grado di dare una stima della derivata temporale della distanza al quadrato di ogni coppia di coordinate canoniche, la quale è proprio ε. Infatti, in generale,

$$\frac{d}{dt}(z_j\bar{z}_j) = \left\{z_j\bar{z}_j, \mathscr{H}^{(r)}\right\} = \left\{z_j\bar{z}_j, \mathscr{Z}^{(r)} + \mathscr{R}^{(r)}\right\} = \left\{z_j\bar{z}_j, \mathscr{R}^{(r)}\right\} \ , \ \forall\ j = 1,\ldots,n \ ,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la linearità delle parentesi di Poisson e il fatto che $z_j\bar{z}_j$ commuta con la parte di Hamiltoniana in forma normale, poiché $\mathscr{Z}^{(r)}$ è costituita esclusivamente da polinomi nelle azioni, ciascuna delle quali, in coordinate canoniche complesse, si esprime proprio come $z_j\bar{z}_j, \ \forall\ j = 1,\ldots,n$. Per valutare la derivata temporale di $z_j\bar{z}_j$ basta quindi valutare l'ultima parentesi di Poisson. Rinominiamo per semplicità le azioni come $I_j = z_j\bar{z}_j$; allora

$$\begin{aligned} \sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} |\dot{I}_j| = \sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} \left|\left\{I_j, \sum_{s=r+1}^{+\infty} f_s^{(r)}\right\}\right| &\le \sum_{s=r+1}^{+\infty} \|\{I_j, f_s^{(r)}\}\|\varrho^{s+2} \\ &\le \sum_{s=r+1}^{+\infty} 2(s+2)\|f_s^{(r)}\|\varrho^{s+2} < \varepsilon \ . \end{aligned} \tag{C.18}$$

Definiamo a questo punto un valore $\delta \in (0, \varrho)$ e poniamo $T = \delta^2/\varepsilon$. Osserviamo che, per fissato δ, T può assumere valori tanto più grandi, quanto più la stima della derivata del resto in formula (C.17) è piccola. Consideriamo ora la legge del moto

$t \to (I_1(t), \ldots, I_n(t))$ per $|t| \le T$ e scegliamo una condizione iniziale in una palla di raggio più piccolo di ϱ, ovvero $(I_1(0), \ldots, I_n(0)) \in B_{(\varrho-\delta)^2}$; si avrà allora che

$$|I_j(t) - I_j(0)| \le \max_{t\in[-T,T]} |\dot{I}_j(t)| \cdot T = \varepsilon \cdot T = \delta^2 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n\ . \tag{C.19}$$

Di conseguenza, possiamo facilmente osservare che

$$\max_{1\le j\le n} |I_j(t)| \le \max_{1\le j\le n} |I_j(0)| + \delta^2 \le (\varrho-\delta)^2 + \delta^2 = \varrho^2 - 2(\varrho-\delta)\delta < \varrho^2\ . \tag{C.20}$$

Per quanto osservato quindi, si ottiene un risultato di stabilità effettiva, nel senso che la traiettoria non uscirà dalla palla di raggio ϱ prima di un tempo lungo almeno $T = \mathscr{O}(1/\varepsilon)$. Seppure non si tratta di una stabilità per tutti i tempi, l'intervallo di tempo per cui il risultato è valido può essere molto esteso, poiché T può assumere valori molto grandi, soprattutto in relazione alla durata caratteristica del sistema fisico studiato. In particolare, nel seguito verrà esposto un argomento che ci consentirà di affermare che, asintoticamente, la taglia del resto è $\mathscr{O}(\exp[-(\varrho^*/\varrho)^a])$ con un opportuno valore di $a > 0$; un procedimento analogo permette di ottenere una stima esponenzialmente piccola della derivata temporale delle azioni. Se ne deduce che il tempo di diffusione deve essere almeno esponenzialmente grande rispetto all'inverso della distanza dal punto di equilibrio. Ci proponiamo di mettere in pratica l'approccio che è stato sinora descritto in modo informale.

C.3.1 Forma normale di Birkhoff: stima dei termini generati dall'algoritmo costruttivo

Per dare una stima della norma sup del resto, occorrerà controllare le norme dei termini perturbativi che costituiscono il resto. Cercheremo di costruire uno schema iterativo di stime, basandoci sulla descrizione dell'algoritmo costruttivo di forma normale, così come è stata discussa nella precedente sottosezione C.2.1. È piuttosto semplice scrivere alcune stime iterative, dopo aver ricordato che al passo $r-1$ di normalizzazione, la Hamiltoniana sarà della forma

$$\mathscr{H}^{(r-1)} = \sum_{s=0}^{r-1} Z_s + \sum_{s=r}^{\infty} f_s^{(r-1)} \tag{C.21}$$

e che i termini che compaiono nella Hamiltoniana dopo l'esecuzione dell'r-esimo passo di normalizzazione, cioè

$$\mathscr{H}^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} Z_s + \sum_{s=r+1}^{\infty} f_s^{(r)}\ , \tag{C.22}$$

sono completamente definiti dalle equazioni riportate in proposizione C.7 e in formula (C.12). Infatti, se (ri)scriviamo l'espansione del termine perturbativo principale nel modo seguente: $f_r^{(r-1)} = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} c_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}^{(r-1)} \mathbf{z}^{\mathbf{l}} (i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}$, allora dalla proposizione C.7 si deduce immediatamente che

$$\|Z_r\| = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} |c_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}^{(r-1)}| \le \|f_r^{(r-1)}\| \tag{C.23}$$

e

$$\|\chi_r\| = \sum_{\substack{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2\\ \mathbf{l}\neq\bar{\mathbf{l}}}} \frac{|c^{(r-1)}_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}|}{|\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})|} \le \frac{\|f^{(r-1)}_r\|}{\alpha_r}\ , \tag{C.24}$$

dove poniamo

$$\alpha_r = \min_{\substack{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2\\ \mathbf{l}\neq\bar{\mathbf{l}}}} |\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})|\ , \tag{C.25}$$

che è sicuramente positivo per ogni $r \ge 1$ quando viene assunta una condizione di non-risonanza (come quella diofantea) riguardo al vettore delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$.

Prima di procedere a definire le successioni di maggioranti che consentiranno di stimare i termini generati dall'algoritmo di costruzione della forma normale di Birkhoff, dimostriamo tre lemmi, che ci saranno molto utili in seguito.

Lemma C.8: *Siano $f \in \mathscr{P}_{r+2}$, allora sussiste la seguente disuguaglianza:*

$$\|\{f,g\}\| \le (r+2)(s+2)\,\|f\|\,\|g\|\ .$$

Proof. Assumiamo che gli sviluppi di f e g siano del tipo

$$f = \sum_{|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|=r+2} f_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}\,\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}\ ; \qquad g = \sum_{|\mathbf{k}|+|\bar{\mathbf{k}}|=s+2} g_{\mathbf{k},\bar{\mathbf{k}}}\,\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{k}}}\ .$$

Usando la linearità delle parentesi di Poisson, si ricava che

$$\{f,g\} = \sum_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}\sum_{\mathbf{k},\bar{\mathbf{k}}} f_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}\,g_{\mathbf{k},\bar{\mathbf{k}}}\left\{\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}\,,\,\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{k}}}\right\}\ .$$

Limitiamoci per ora a svolgere il calcolo della parentesi di Poisson

$$\begin{aligned}\left\{\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}\,,\,\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{k}}}\right\} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j\,\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}}{z_j}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{\bar{k}_j\,\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{k}}}}{\bar{z}_j} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\bar{l}_j\,\mathbf{z}^{\mathbf{l}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}}}{\bar{z}_j}\cdot\frac{k_j\,\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{k}}}}{z_j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{iz_j\bar{z}_j}\mathbf{z}^{\mathbf{l}+\mathbf{k}}(i\bar{\mathbf{z}})^{\bar{\mathbf{l}}+\bar{\mathbf{k}}}\left(l_j\bar{k}_j-\bar{l}_jk_j\right)\ .\end{aligned}$$

Poiché siamo interessati alla norma, quello che occorre stimare è :

$$\sum_{j=1}^{n}\left|l_j\bar{k}_j-\bar{l}_jk_j\right| \le \left(\max_j|l_j| + \max_j|\bar{l}_j|\right)\left(|\mathbf{k}|+|\bar{\mathbf{k}}|\right) \le \left(|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}|\right)\left(|\mathbf{k}|+|\bar{\mathbf{k}}|\right)\ .$$

Siccome $|\mathbf{l}|+|\bar{\mathbf{l}}| = r+2$ e $|\mathbf{k}|+|\bar{\mathbf{k}}| = s+2$, l'asserto segue immediatamente. *Q.E.D.*

Lemma C.9: *Siano $\chi_r \in \mathscr{P}_{r+2}$ e $g \in \mathscr{P}_{s+2}$. Allora*

$$\frac{1}{j!}L^j_{\chi_r}g \in \mathscr{P}_{jr+s+2} \quad \forall\ j \ge 0$$

e $\forall\ j \geq 1$ *vale la seguente maggiorazione*

$$\left\| \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} g \right\| \leq \frac{\prod_{i=0}^{j-1} (r+2)(s+ir+2)}{j!} \|\chi_r\|^j \|g\| \ .$$

Proof. Entrambe si dimostrano per induzione. Partiamo dalla prima: per $j = 0$, è banale. Supponiamo che sia vera per $j - 1$ e mostriamolo per j.

$$\frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} g = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{(j-1)!} L_{\chi_r}(L^{j-1}_{\chi_r} g) = \frac{1}{j} \left\{ \frac{1}{(j-1)!} L^{j-1}_{\chi_r} g, \chi_r \right\} \ .$$

Allora, usando la proposizione C.1, quello ottenuto è un polinomio in $\mathscr{P}_{jr+s+2}$, poiché è la parentesi di Poisson di termini che sono rispettivamente in $\mathscr{P}_{r+2}$ e in $\mathscr{P}_{(j-1)r+s+2}$ per ipotesi induttiva. Procediamo ora alla dimostrazione della formula per la stima. Per $j = 1$ è già stato dimostrato nel lemma C.8. Supponiamo quindi che la formula sia corretta per $j - 1$ e mostriamone la validità per j. Usando ciò che si è dimostrato al punto precedente e il lemma C.8, possiamo maggiorare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} g \right\| &= \frac{1}{j} \left\| \left\{ \frac{1}{(j-1)!} L^{j-1}_{\chi_r} g, \chi_r \right\} \right\| \\ &\leq \frac{(r+2)[(j-1)r+s+2]}{j} \|\chi_r\| \left\| \frac{1}{(j-1)!} L^{j-1}_{\chi_r} g \right\| \end{aligned}$$

e, usando l'ipotesi induttiva, otteniamo che

$$\left\| \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} g \right\| \leq \frac{(r+2)[(j-1)r+s+2]}{j} \|\chi_r\| \frac{\prod_{i=0}^{j-2} (r+2)(s+ir+2)}{(j-1)!} \|\chi_r\|^{j-1} \|g\| \ .$$

Riordinando e raccogliendo i termini, segue la tesi. *Q.E.D.*

Lemma C.10: *Per* $m = 1, \ldots, r,\ k \geq 1,\ r \geq 1,\ j = 1, \ldots, k$, *vale la seguente disuguaglianza:*

$$\frac{\prod_{i=0}^{j-1} [m+2+(k-j+i)(r+2)]}{j!(r+2)^{2j}} \leq \binom{k}{j} \frac{1}{(r+2)^j} \ .$$

Proof. Maggiorando $m + 2$ con $r + 2$, si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{i=0}^{j-1} [m+2+(k-j+i)(r+2)]}{j!(r+2)^{2j}} &\leq \frac{\prod_{i=0}^{j-1} [(k-j+i+1)(r+2)]}{j!(r+2)^{2j}} \\ &= \frac{(r+2)^j \prod_{i=1}^{j} (k-j+i)}{(r+2)^{2j} j!} \\ &= \frac{k \cdot (k-1) \cdots (k-j+1)}{(r+2)^j j!} \\ &= \binom{k}{j} \frac{1}{(r+2)^j} \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

C.3.1.5 Definizione delle successioni di opportune maggioranti e relative stime

Nell'ambito del problema che stiamo considerando, ovvero quello di mettere a punto un efficiente schema di stime per i termini generati dall'algoritmo che costruisce la forma norma di Birkhoff, è conveniente ricondursi a studiare l'andamento di una successione di maggioranti opportunamente definite (così come illustrato in seguito).

Lemma C.11: *Si consideri la Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$ definita in formula (C.9). Essa sia tale che il vettore delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ soddisfa una condizione di non-risonanza di tipo diofanteo (cioè esistono due costanti positive γ e τ per cui la disequazione $|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}| \ge \gamma/|\mathbf{k}|^\tau$ sussiste $\forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$) e i termini perturbativi sono superiormente limitati come segue:*

$$\|f_s^{(0)}\| \le \mathscr{F}_s^{(0)} \qquad \forall\ s \ge 1\ . \tag{C.26}$$

Ad ogni passo di normalizzazione $r \ge 1$, valgono allora le seguenti stime per ciascuno dei termini che compaiono nell'espansione (C.22) della Hamiltoniana $\mathscr{H}^{(r)}$:

$$\begin{aligned} \|Z_s\| &\le \mathscr{F}_s^{(r)} \qquad \forall\ 1 \le s \le r\ , \\ \|f_s^{(r)}\| &\le \mathscr{F}_s^{(r)} \qquad \forall\ s > r\ , \end{aligned} \tag{C.27}$$

dove la definizione ricorsiva della successione di maggioranti è tale che

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_r &= \frac{(3r)^\tau}{\gamma}\mathscr{F}_r^{(r-1)}\ , \\ \mathscr{F}_s^{(r)} &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{r} \rfloor} \binom{\lfloor s/r \rfloor}{j} \frac{1}{r^j} \left[(3r)^3\mathscr{G}_r\right]^j \mathscr{F}_{s-jr}^{(r-1)} \qquad \forall\ s \ge 1\ , \end{aligned} \tag{C.28}$$

con $\mathscr{F}_0^{(r-1)} = 0$.

Proof. Procediamo per induzione sul passo di normalizzazione r. Ovviamente, per $r = 0$ la formula (C.27) sussiste per ipotesi.

Siccome (per ipotesi di induzione) $\|Z_s\| \le \mathscr{F}_s^{(r-1)}\ \forall\ 1 \le s \le r-1$; in questo range degli indici s, dalla formula ricorsiva (C.28) segue che $\|Z_s\| \le \mathscr{F}_s^{(r-1)} = \mathscr{F}_s^{(r)}$ e, inoltre, si ha che $\mathscr{F}_r^{(r)} = \mathscr{F}_r^{(r-1)}$ (quando s è multiplo di r si comprende perché è comodo porre $\mathscr{F}_0^{(r-1)} = 0$), quindi . partendo dalla (C.23) si deduce che $\|Z_r\| \le \mathscr{F}_r^{(r-1)} = \mathscr{F}_r^{(r)}$; questo conclude la verifica delle disuguaglianze che compaiono nella prima riga di formula (C.27).

Utilizzando l'ipotesi di induzione, la stima (C.24), la definizione di α_r in (C.25), la disuguaglianza diofantea e l'ovvia relazione $r + 2 \le 3r\ \forall\ r \ge 1$, si ottiene immediatamente che

$$\|\chi_r\| \le \frac{(3r)^\tau}{\gamma}\mathscr{F}_r^{(r-1)} = \mathscr{G}_r\ . \tag{C.29}$$

Per quanto riguarda le disequazioni che compaiono nella prima riga di formula (C.27), ci limitiamo alla loro verifica nel caso in cui s è multiplo di r con $s/r = k \ge 2$. Partendo dalla seconda delle definizioni in formula (C.12), la semplice applicazione congiunta dell'ipotesi di induzione, dei lemmi C.9 e C.10, della maggiorazione (C.29) riguardante la norma delle generatrici e, nuovamente, della relazione elementare relazione $r+2 \le 3r\ \forall\ r \ge 1$, si può scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\|f_{kr}^{(r)}\| &\le \frac{1}{k!}\big\|L_{\chi_r}^{k-1} Z_r\big\| + \frac{k-1}{k!}\big\|L_{\chi_r}^{k-1} f_r^{(r-1)}\big\| + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{j!}\|L_{\chi_r}^{j} f_{(k-j)r}^{(r-1)}\| \\
&\le \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{j}[(k-j+i)(r+2)]}{j!(r+2)^{2j}}\big[(r+2)^3\|\chi_r\|\big]^j \mathscr{F}_{(k-j)r}^{(r-1)} \\
&\le \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{1}{(r+2)^j}\big[(3r)^3\|\mathscr{G}_r\|\big]^j \mathscr{F}_{(k-j)r}^{(r-1)} \\
&\le \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{r^j}\big[(3r)^3\|\mathscr{G}_r\|\big]^j \mathscr{F}_{(k-j)r}^{(r-1)} = \mathscr{F}_{kr}^{(r)}\ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo nuovamente utilizzato la definizione ausiliaria $\mathscr{F}_0^{(r-1)} = 0$. Il procedimento è sostanzialmente analogo, quando $s \neq r \cdot \lfloor s/r \rfloor$. *Q.E.D.*

Lemma C.12: *Si assumano ipotesi analoghe a quelle considerate nel lemma C.11 a proposito della Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$ che è definita in formula (C.9), cioè il vettore delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ soddisfi una condizione di non-risonanza di tipo diofanteo e i termini perturbativi siano superiormente limitati in modo tale che*

$$\|f_s^{(0)}\| \le \mathscr{F}_s^{(0)} = Ea^{s+2} \qquad \forall\ s \ge 1\ , \tag{C.30}$$

dove i valori di E ed a sono positivi[5]*. Vale allora la seguente stima per quanto riguarda la successione di maggioranti $\mathscr{F}_s^{(r)}$ definita in formula (C.28):*

$$\mathscr{F}_s^{(r)} \le Ea^{s+2}C^{s-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-1}e^{s\zeta_r} \qquad \forall\ r \ge 1\,,\ s \ge 1\ , \tag{C.31}$$

dove la costante C e la successione ζ_r sono tali che

$$C = \max\left\{1\,,\ 3^{\tau+3}\frac{Ea^2}{\gamma}\right\}\ , \qquad \zeta_r = \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{j^2}\ . \tag{C.32}$$

Proof. Procediamo per induzione sul passo di normalizzazione r. Siccome il membro di destra della disequazione (C.31) si azzera, quando $r = 0$, allora il caso base dell'induzione (cioè $r = 1$) deve essere verificato separatamente. Combinando l'ipotesi (C.30) con le definizioni ricorsive in formula (C.28) per $r = 1$ (e tenendo

[5] In altri termini, si impone che le maggioranti $\mathscr{F}_s^{(0)} = Ea^{s+2}$ crescano in modo geometrico. Siccome (come sarà ricordato e chiarito in seguito) stiamo lavorando con funzioni che dipendono analiticamente dalle coordinate canoniche complesse $(i\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$, il parametro a gioca il ruolo di inverso del raggio di convergenza della Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$

conto che si pone $\mathscr{F}_0^{(0)}=0$, in accordo a quanto stabilito alla fine dell'enunciato del lemma C.11), si può scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_s^{(1)} &\le \sum_{j=0}^{s-1}\binom{s}{j}\left(\frac{Ea^2 3^\tau}{\gamma}\,a\right)^j Ea^{s-j+2} \le Ea^{s+2}C^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s}{j}\\ &\le Ea^{s+2}C^{s-1}2^s \le Ea^{s+2}C^{s-1}e^{s\zeta_1}\ ,\end{aligned}$$

dove sono state utilizzate entrambe le definizioni che compaiono in formula (C.32).

Ammettiamo ora che la disuguaglianza (C.31) sia soddisfatta al passo di normalizzazione $r-1$-esimo, allora dalla (C.28) si deduce che

$$(C.33)\qquad \begin{aligned}(3r)^3\mathscr{G}_r &= \frac{(3r)^{\tau+3}}{\gamma}\mathscr{F}_r^{(r-1)} \le \frac{(3r)^{\tau+3}}{\gamma}Ea^{r+2}C^{r-1}\big(r-1)^{\tau+3}\big)^{r-1}e^{r\zeta_{r-1}}\\ &\le a^r\,\frac{3^{\tau+3}Ea^2}{\gamma}C^{r-1}\big((r^{\tau+3}\big)^r e^{r\zeta_{r-1}} \le \big(aCr^{\tau+3}\big)^r e^{r\zeta_{r-1}}\ ,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la definizione della costante C, che è riportata nella prima equazione che compare in formula (C.32). Possiamo ora giustificare la disequazione (C.31), partendo dalla seconda definizione ricorsiva in formula (C.28); infatti, utilizzando la disuguaglianza (C.33) (che consente di stimare i contributi dovuti alle serie di Poisson con la generatrice χ_r), si ottiene[6]

$$(C.34)\qquad \begin{aligned}\mathscr{F}_s^{(r)} &\le \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{r}\rfloor}\binom{\lfloor s/r\rfloor}{j}\frac{\big[\big(aCr^{\tau+3}\big)^r e^{r\zeta_{r-1}}\big]^j}{r^j}Ea^{s-jr+2}C^{s-jr-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-jr-1}e^{(s-jr)\zeta_{r-1}}\\ &\le Ea^{s+2}C^{s-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-1}e^{s\zeta_{r-1}}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{r}\rfloor}\binom{\lfloor s/r\rfloor}{j}\frac{1}{r^j}\\ &\le Ea^{s+2}C^{s-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-1}e^{s\zeta_{r-1}}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\lfloor \frac{s}{r}\rfloor} \le Ea^{s+2}C^{s-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-1}e^{s\zeta_{r-1}}e^{s/r^2}\\ &\le Ea^{s+2}C^{s-1}\big(r^{\tau+3}\big)^{s-1}e^{s\zeta_r}\ ,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la definizione della successione $\{\zeta_r\}_{r\ge 1}$, che è riportata nella seconda equazione che compare in formula (C.32). *Q.E.D.*

C.3.2 Forma normale di Birkhoff: stima esponenziale del resto

Lo sforzo che abbiamo effettuato per dimostrare i lemmi C.8–C.12 giunge a compimento in questa sottosezione. Possiamo infatti condensare quei risultati preliminari nel seguente enunciato.

---

[6] Si osservi che la disuguaglianza riportata nella prima riga della formula (C.34) sussiste anche nel caso in cui s è multiplo di r poiché non esiste il contributo dovuto al termine $\big[(3r)^2\mathscr{G}_r\big]^{\lfloor s/r\rfloor}\mathscr{F}_0^{(r-1)}$, in quanto si fissa $\mathscr{F}_0^{(r-1)}=0$, come è chiaramente specificato alla fine dell'enunciato del lemma C.11.

Proposition C.13: *Sia la Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$ del tipo di quella definita dall'espansione (C.9) e sia essa tale che nella sua parte di forma normale il vettore delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ soddisfa una condizione di non-risonanza di tipo diofanteo, come quella riportata in formula (4.19) e caratterizzata da due costanti positive γ e τ; inoltre, i termini perturbativi siano superiormente limitati come in formula (C.30), cioè in modo tale che $\|f_s^{(0)}\| \le Ea^{s+2}\ \forall\ s \ge 1$, dove i valori di E ed a sono positivi. Si consideri la costruzione della forma normale di Birkhoff effettuata a partire dalla suddetta Hamiltoniana, applicando iterativamente la formula (C.10), dove la generatrice χ_r è determinata risolvendo l'equazione omologica così come stabilito in proposizione C.7.*

Ad ogni passo di normalizzazione r, la corrispondente Hamiltoniana $\mathscr{H}^{(r)} = \mathscr{Z}^{(r)} + \mathscr{R}^{(r)}$ è analitica sull'insieme aperto $B_\varrho(\mathbf{0})$ per ogni raggio

$$\varrho \le \frac{1}{2aCe^{\pi^2/6}}\,\frac{1}{r^{\tau+3}}\ , \tag{C.35}$$

dove la costante C è definita come in (C.32), cioè $C = \max\left\{1\,,\,3^{\tau+3}Ea^2/\gamma\right\}$. Inoltre, per quanto riguarda il resto della forma normale di Birkhoff, esso è superiormente limitato dalla seguente disequazione:

$$\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})}\left|\mathscr{R}^{(r)}\right| \le 2Ee^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\left(\varrho aCe^{\pi^2/6}\,r^{\tau+3}\right)^r\ . \tag{C.36}$$

Proof. I dettagli della dimostrazione del suddetto enunciato vengono omessi, perché essa è un'ovvia conseguenza della definizione del resto della forma normale, cioè $\mathscr{R}^{(r)} = \sum_{l=r+1}^{+\infty} f_l^{(r)}$, della maggiorazione della norma sup che è riportata in formula (C.16) e dei lemmi C.11–C.12. Infatti, le disuguaglianze (C.35)–(C.36) si verificano con facili calcoli, tenendo conto del ben noto valore della seguente serie numerica:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}\ . \tag{C.37}$$

Q.E.D.

Il risultato descritto da quest'ultima proposizione può sembrare estremamente deludente. Se da un lato esso ci garantisce che ciascuna delle Hamiltoniane $\mathscr{H}^{(r)}$ è analitica su un opportuno dominio, d'altra parte, le stime del resto sono catastrofiche[7] al punto tale che non c'è alcuna speranza che $\mathscr{H}^{(r)}$ possa convergere a una forma normale integrabile $\mathscr{Z}^{(\infty)}$. Ciò è in accordo con il teorema di Poincaré sulla non esistenza degli integrali primi per un sistema Hamiltoniano sottoposto a una perturbazione generica e, quindi, c'era aspettarsi che è impossibile che la successione delle $\mathscr{H}^{(r)}$ converga a una Hamiltoniana integrabile. Questo risultato negativo significa solamente

---

[7] Dalla formula (C.36), si deduce che l'andamento della maggiorazione del resto è tale da essere asintotico a $\varrho^3\left(\varrho r^{\tau+3}\right)^r$, che diverge a $+\infty$ su un qualsiasi fissato insieme aperto $B_\varrho(\mathbf{0})$ per $r \to \infty$, a causa della presenza del fattore r^r.

che dobbiamo rinunciare all'idea di far tendere l'esecuzione dell'algoritmo fino al limite per $r \to \infty$, ma non implica che la costruzione della forma normale di Birkhoff sia inutile, perché, anzi, possiamo trarre grande beneficio da una scelta opportuna del passo di normalizzazione cui arrestare il procedimento.

Osserviamo che è vantaggioso effettuare l'$r+1$-esimo passo di costruzione della forma normale di Birkhoff quando

$$\frac{\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} \left|\mathscr{R}^{(r+1)}\right|}{\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} \left|\mathscr{R}^{(r)}\right|} < 1 \ .$$

Si osservi che abbiamo enunciato questo criterio studiando l'andamento del resto in funzione del passo r su un *fissato* insieme aperto $B_\varrho(\mathbf{0})$ e, quindi, considerando ϱ come se fosse un parametro costante. Facendo riferimento alla stima (C.36), possiamo dare una forma assai più esplicita al suddetto criterio, cioè è conveniente effettuare l'$r+1$-esimo passo di normalizzazione se

$$\frac{\left[\varrho a C e^{\pi^2/6} \, (r+1)^{\tau+3}\right]^{r+1}}{\left(\varrho a C e^{\pi^2/6} \, r^{\tau+3}\right)^{r}} = \varrho a C e^{\pi^2/6} \left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}\right]^{\tau+3} (r+1)^{\tau+3} < 1 \ .$$

Si intuisce facilmente che, per piccoli valori di ϱ (in seguito, ci porremo il problema del comportamento delle stime per $\varrho \to 0$), questa disuguaglianza è soddisfatta fino a valori di r grandi. Tenendo conto del fatto che la famosa successione $(1+1/r)^r$ è monotona crescente e tende ad e per $r \to \infty$, siamo portati a concludere che il passo ottimale $r_{\rm opt}$ a cui è opportuno arrestare il procedimento di normalizzazione è tale che

$$(C.38) \qquad r_{\rm opt} \simeq \frac{1}{e} \left(\frac{1}{\varrho a C e^{\pi^2/6}}\right)^{1/(\tau+3)} \ ,$$

dove non ci curiamo del fatto che il membro di destra non è un numero intero. Infatti, per non appesantire inutilmente la notazione, evitiamo di introdurre anche l'operatore $\lfloor \cdot \rfloor$, che introdurrebbe delle complicazioni inessenziali rispetto alle deduzione che stiamo per fare. Si noti che la formula (C.38) implica che è conveniente fare molti passi di normalizzazione quando si considera un insieme di condizioni iniziali estremamente vicine al punto di equilibrio, poiché $r_{\rm opt} \sim \varrho^{1/(\tau+3)}$. Facendo ancora ricorso alla stima (C.36) si comprende facilmente l'andamento della maggiorazione del resto valutato in corrispondenza al passo ottimale, cioè

$$(C.39) \qquad \begin{aligned} \sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} \left|\mathscr{R}^{(r_{\rm opt})}\right| &\le 2E e^{\pi^2/6} (a\varrho)^3 \left(\varrho a C e^{\pi^2/6} \, r_{\rm opt}^{\tau+3}\right)^{r_{\rm opt}} \\ &\simeq 2E e^{\pi^2/6} (a\varrho)^3 e^{-(\tau+3) r_{\rm opt}} \\ &= 2E e^{\pi^2/6} (a\varrho)^3 \exp\left(-\left(\frac{\bar{\varrho}_\star}{\varrho}\right)^{1/(\tau+3)}\right) \ , \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato ripetutamente la formula (C.38) e abbiamo posto

$$\bar{\varrho}_\star = \frac{(\tau+3)^{\tau+3}}{aCe^{\tau+3+\pi^2/6}}\ ,$$

che ha le stesse dimensioni fisiche di ϱ essendo a un parametro che ha il significato di inverso del raggio di convergenza della Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$ (mentre, con un po' di impegno, si può controllare facilmente che C è un numero puro, osservando la sua definizione in formula (C.32)). La stima che abbiamo ottenuto così come descritto in formula (C.39) merita qualche ulteriore commento. Infatti, è sicuramente notevole che possiamo rendere il resto esponenzialmente piccolo (rispetto all'inverso del raggio ϱ dell'intorno dell'origine su cui effettuiamo le stime), pur di scegliere opportunamente il numero di passi dell'algoritmo costruttivo della forma normale di Birkhoff.

C.3.3 Forma normale di Birkhoff: stima esponenziale del tempo di stabilità effettiva

Prima di enunciare il risultato conclusivo di tutto questo capitolo, è conveniente introdurre il tempo di fuga T_f dall'insieme $\mathscr{V}$ per moti che originano da condizioni iniziali che stanno all'interno di un suo sottoinsieme $\mathscr{U}$. In altri e più formali termini, si tratta di una funzione di due insiemi $\mathscr{U} \subset \mathscr{V} \subset \mathbb{C}^n$, che è definita nel modo seguente:

$$T_f(\mathscr{U},\mathscr{V}) = \inf_{(\mathbf{z}_0\,,\,i\bar{\mathbf{z}}_0)\in\mathscr{U}} \left\{ t\in\mathbb{R}_+ \ :\ \mathbf{z}(t)\notin\mathscr{V}\ ,\ \text{tale che } \mathbf{z}(0)\in\mathscr{U} \right\}\ .$$

Possiamo quindi riassumere tutto il procedimento sin qui descritto (nell'ambito di questo capitolo) nel seguente enunciato, dove vengono praticamente assunte le stesse ipotesi della proposizione C.13. Ciò non è affatto casuale, perché l'approccio che sta alla base della suddetta proposizione C.13 è essenziale anche per quanto riguarda la seguente dimostrazione.

Theorem C.14: [stima esponenziale del tempo di stabilità] *Sia la Hamiltoniana iniziale $\mathscr{H}^{(0)}$ del tipo di quella definita dall'espansione (C.9) e sia essa tale che nella sua parte di forma normale il vettore delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ soddisfa una condizione di non-risonanza di tipo diofanteo (cioè esistono due costanti positive γ e τ per cui la disequazione $|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}| \ge \gamma/|\mathbf{k}|^\tau$ sussiste $\forall\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n$); inoltre, i termini perturbativi siano superiormente limitati come in formula (C.30), cioè in modo tale che $\|f_s^{(0)}\| \le Ea^{s+2}\ \forall\ s\ge 1$, dove i valori di E ed a sono positivi.*
Si consideri un insieme aperto del tipo $B_\varrho(\mathbf{0}) = \big\{(\mathbf{z},i\bar{\mathbf{z}}) : \max_{j=1,\ldots,n}|z_j| < \varrho\big\}$. Per valori del raggio ϱ che sono piccoli abbastanza esistono una trasformazione analitica canonica Ψ_ϱ e un sottoinsieme $B_{\varrho_0}(\mathbf{0}) \subset B_\varrho(\mathbf{0})$ il cui raggio è a sua volta funzione di ϱ (cioè $\varrho_0(\varrho)$); essi sono tali che, detti rispettivamente $\mathscr{V}_\varrho = \Psi_\varrho\big(B_\varrho(\mathbf{0})\big)$ e $\mathscr{U}_\varrho = \Psi_\varrho\big(B_{\varrho_0}(\mathbf{0})\big)$, il corrispondente tempo di fuga dei moti associati al flusso indotto da $\mathscr{H}^{(0)}$ è minorato dalla seguente legge:

$$T_f\big(\mathscr{U}_\varrho\,,\,\mathscr{V}_\varrho\big) \ge \mathcal{T}_\star \exp\left(\left(\frac{\varrho_\star}{\varrho}\right)^{1/(\tau+4)}\right)\ , \tag{C.40}$$

dove $\mathcal{T}_\star \in \mathbb{R}_+$ *è una costante opportuna e*

$$\varrho_\star = \frac{(\tau+4)^{\tau+4}}{a\, e^{\tau+4+\pi^2/6}} \, \frac{1}{\max\left\{1\,,\, 3^{\tau+3}\frac{Ea^2}{\gamma}\right\}} \,. \tag{C.41}$$

Inoltre, nel limite di ϱ *che tende a zero, si ha che* Ψ_ϱ *è prossima all'identità e* $\varrho_0(\varrho) \sim \varrho$ *.*

Proof. Si consideri la costruzione della forma normale di Birkhoff che definisce la successione di Hamiltoniane $\{\mathscr{H}^{(r)}\}_{r\ge0}$, le quali sono determinate a partire da $\mathscr{H}^{(0)}$ (le cui proprietà sono descritte nelle ipotesi) e applicando iterativamente la formula (C.10). A sua volta la generatrice associata all'r-esimo passo di normalizzazione, ovvero χ_r , è determinata risolvendo l'equazione omologica così come stabilito in proposizione C.7.

La proposizione C.13 ci garantisce che la Hamiltoniana introdotta all'r-esimo passo dell'algoritmo, cioè[8] $\mathscr{H}^{(r)} = \mathscr{Z}^{(r)} + \mathscr{R}^{(r)}$, è analitica sull'insieme aperto $B_\varrho(\mathbf{0})$ per ogni raggio

$$\varrho \le \frac{1}{2aCe^{\pi^2/6}} \, \frac{1}{r^{\tau+3}} \ , \tag{C.42}$$

dove la costante C è definita come in (C.32), cioè $C = \max\{1\,,\, 3^{\tau+3}Ea^2/\gamma\}$. Siamo ora in grado di stimare la variazione (nel tempo) dell'azione $I_j = z_j\bar{z}_j \ \forall\ j = 1,\ldots,n$. Procedendo come durante la discussione riguardante il tempo di stabilità effettiva, così come trattata all'inizio della presente sezione C.3, possiamo scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} |\dot{I}_j| &= \sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} \left| \left\{ I_j, \sum_{s=r+1}^{+\infty} f_s^{(r)} \right\} \right| \le \sum_{s=r+1}^{+\infty} \|\{I_j, f_s^{(r)}\}\| \varrho^{s+2} \\
&\le \sum_{s=r+1}^{+\infty} 2(s+2) \|f_s^{(r)}\| \varrho^{s+2} \\
&\le 2E(a\varrho)^3 e^{\pi^2/6} \sum_{s=r+1}^{+\infty} (s+2) \big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^{s-1} \ ,
\end{aligned} \tag{C.43}$$

dove nei vari passaggi abbiamo rispettivamente utilizzato l'equazione $\dot{I}_j = \{I_j\,,\, \mathscr{H}^{(r)}\}$ lemma C.12 e la struttura della Hamiltoniana $\mathscr{H}^{(r)}$ che è stata ricordata nella nota a pie' pagina[8], l'ovvia maggiorazione (C.16) per la norma sup, il lemma C.8 e, infine, la stima (C.31) che compare nell'enunciato del lemma C.12 assieme all'equazione (C.37). Siccome consideriamo valori del raggio ϱ tali da soddisfare la restrizione (C.42), allora possiamo maggiorare la serie che compare alla fine della precedente formula (C.43) nel

[8] Si ricordi che la Hamiltoniana $\mathscr{H}^{(r)}$ è tale che $\mathscr{Z}^{(r)} = \mathscr{Z}^{(r)}(I_1\,,\,\ldots\,,\,I_n)$ è la parte di forma normale e il resto $\mathscr{R}^{(r)}$ è definito dall'equazione $\mathscr{R}^{(r)} = \sum_{l=r+1}^{+\infty} f_l^{(r)}$, dove $f_l^{(r)}$ è un polinomio di grado $l+2 \ \forall\ l > r$.

modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=r+1}^{+\infty}(s+2)\big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^{s-1} &\le 4\big(2\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^r \sum_{s=r+1}^{+\infty}(s+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}\\
&= 4\big(2\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^r \left(\frac{d}{dx}\frac{x^{r+3}}{1-x}\Big|_{x=1/2}\right)\\
&= \frac{4(r+2)}{2^{r+1}}\big(2\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^r\\
&= 2(r+2)\big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^r \ .
\end{aligned}
$$

Immettendo quest'ultima stima in quella descritta in formula (C.43), si ottiene

$$
(C.44)\qquad
\begin{aligned}
\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})}|\dot I_j| &\le \Big[4(r+2)e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\Big]\ E\big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+3}\big)^r\\
&\le \Big[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\Big]\ E\big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r^{\tau+4}\big)^r \ ,
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo passaggio ha il solo scopo di semplificare (almeno in minima parte) la dipendenza da r dell'ultima espressione al termine della catena di uguaglianze.

Siamo ora in grado di ripetere il procedimento di ottimizzazione che abbiamo già effettuato nella precedente sottosezione C.3.3, a proposito del resto della forma normale di Birkhoff. Per prima cosa, imponiamo ora che

$$
(C.45)\qquad \varrho \le \frac{1}{2aCe^{\pi^2/6}}\,\frac{1}{r^{\tau+4}} \ ,
$$

che è ovviamente una condizione più restrittiva rispetto a (C.42) e quindi le stime (C.43)–(C.44) sono comunque consistenti con la nuova assunzione (C.45), che abbiamo appena imposto. Per quanto riguarda le stime a proposito del tempo di stabilità, siamo interessati a minimizzare la velocità di variazione delle azioni nel tempo, perché (ovviamente) tanto più è lenta la deriva del valore delle azioni e tanto più a lungo riusciremo ad assicurare che il moto permarrà in prossimità del punto di equilibrio situato in corrispondenza dell'origine[9]. In termini della stima che riguarda la velocità di diffusione nelle azioni è quindi conveniente effettuare l'$r+1$-esimo passo di normalizzazione, se

$$
(C.46)\qquad \frac{\Big[\varrho a C e^{\pi^2/6}\,(r+1)^{\tau+4}\Big]^{r+1}}{\big(\varrho a C e^{\pi^2/6}\,r^{\tau+4}\big)^r} = \varrho a C e^{\pi^2/6}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^r\right]^{\tau+4}(r+1)^{\tau+4} < 1 \ .
$$

Siccome $(1+1/r)^r \uparrow e$ per $r\to\infty$, il passo ottimale $r_{\rm opt}$ a cui è opportuno arrestare

[9] Si ricordi che, nello spazio delle fasi con coordinate canoniche $(\mathbf{z}, i\bar{\mathbf{z}})$, la distanza dall'origine è proprio espressa rispetto alle azioni.

il procedimento di normalizzazione è tale che[10]

$$r_{\mathrm{opt}} = \lfloor r_\star \rfloor + 1 \ , \quad \text{dove} \quad r_\star = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{\varrho a C e^{\pi^2/6}}\right)^{1/(\tau+4)} \ . \tag{C.47}$$

Possiamo quindi rivalutare la stima (C.44) in corrispondenza al passo precedente a quello ottimale, in modo tale da ottenere

$$\begin{aligned}\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} |\dot{I}_j| &\le \left[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\right] E\big(\varrho a C e^{\pi^2/6}(r_{\mathrm{opt}}-1)^{\tau+4}\big)^{r_{\mathrm{opt}}-1} \\ &\le \left[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\right] E\big(\varrho a C e^{\pi^2/6} r_\star^{\tau+4}\big)^{r_\star} \\ &= \left[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\right] E e^{-(\tau+4)r_\star} \\ &= \left[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\right] E \exp\left(-\left(\frac{\varrho_\star}{\varrho}\right)^{1/(\tau+4)}\right) \ ,\end{aligned} \tag{C.48}$$

dove (nel passaggio tra la prima e la seconda riga) abbiamo utilizzato il fatto che la variabile continua $r_\star \ge r_{\mathrm{opt}} - 1$; successivamente, abbiamo utilizzato due volte la definizione di $r_\star$ nella formula (C.47) e abbiamo posto

$$\varrho_\star = \frac{1}{a C e^{\tau+4+\pi^2/6}} \ ,$$

che è in accordo con l'equazione (C.41), come si può facilmente verificare dopo aver ricordato la definizione della costante C in (C.32).

A questo punto, possiamo ragionare in modo analogo a quanto fatto per dedurre le disuguaglianze (C.19)–(C.20), a proposito delle stime di stabilità effettiva, così come sono state discusse informalmente all'inizio della presente sezione C.3. È conveniente definire i valori delle quantità ε e δ, che denotano rispettivamente la maggiorazione di $\sup_{B_\varrho(\mathbf{0})} |\dot{I}_j|$ e la restrizione di quello stesso insieme aperto $B_\varrho(\mathbf{0})$, nel modo seguente:

$$\varepsilon = \left[12 e^{\pi^2/6}(a\varrho)^3\right] E \exp\left(-\left(\frac{\varrho_\star}{\varrho}\right)^{1/(\tau+4)}\right) \ , \qquad \delta = \sqrt{\varrho^3 a C e^{\tau+4+\pi^2/6}} \ , \tag{C.49}$$

dove quest'ultima equazione è equivalente a porre $\delta = \varrho/(r_\star)^{(\tau+4)/2}$.

Consideriamo ora una qualsiasi condizione iniziale $\big(\mathbf{z}(0)\, , i\bar{\mathbf{z}}(0)\big) \in B_{\varrho_0}(\mathbf{0})$, dove poniamo

$$\varrho_0(\varrho) = \varrho - \delta = \varrho\left(1 - \frac{1}{(r_\star)^{(\tau+4)/2}}\right) \ .$$

Da quest'ultima definizione, segue immediatamente che $\varrho_0(\varrho) \sim \varrho$ per $\varrho \to 0$, poiché $r_\star \to \infty$ quando $\varrho \to 0$ (com'è evidente dalla formula (C.47)). Inoltre, la suddetta

---

[10] Si osservi che nell'espressione di $r_{\mathrm{opt}} = \lfloor r_\star \rfloor + 1$ si sfrutta il fatto che il passo ottimale è l'$r+1$-esimo tale per cui r è il massimo intero tra quelli per cui la disuguaglianza (C.46) è soddisfatta.

definizione è ben posta solo a condizione che $r_\star > 1$, cioè

$$(C.50) \qquad \varrho < \frac{1}{aCe^{\tau+4+\pi^2/6}} \ .$$

Possiamo adesso assicurare che la legge del moto $t \to \big(\mathbf{z}(t)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(t)\big)$ indotta dal flusso Hamiltoniano corrispondente a $\mathscr{H}^{(r_{\rm opt}-1)}$ è tale che per ogni istante di tempo $t \in [-T,T]$, con $T = \delta^2/\varepsilon$, si ha che

$$(C.51) \qquad \big(\mathbf{z}(t)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(t)\big) \in B_\varrho(\mathbf{0}) \ .$$

Infatti, dopo aver ricordato che $I_j = z_j\bar{z}_j = |z_j|^2\,,\ \forall\ j = 1,\ldots,n$, mentre $\big(\mathbf{z}(t)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(t)\big)$ è all'interno di $B_\varrho(\mathbf{0})$, le formule (C.48)–(C.49) ci garantiscono che la variazione in azione può essere maggiorata in modo tale che

$$|I_j(t) - I_j(0)| \le \max_{t\in[-T,T]} |\dot{I}_j(t)| \cdot T = \varepsilon \cdot T = \delta^2 \qquad \forall\ j = 1,\ldots,n \ ;$$

se ne deduce quindi che

$$\max_{1\le j\le n} |I_j(t)| \le \max_{1\le j\le n} |I_j(0)| + \delta^2 \le (\varrho-\delta)^2 + \delta^2 = \varrho^2 - 2(\varrho-\delta)\delta < \varrho^2 \ .$$

Come immediata conseguenza, otteniamo che

$$\max_{1\le j\le n} |z_j(t)| = \sqrt{\max_{1\le j\le n} |I_j(t)|} < \varrho$$

e quindi la permanenza nell'intorno dell'origine di raggio ϱ, così come descritto dalla formula (C.51), è confermata per ogni istante di tempo $t \in [-T,T]$.

Sostanzialmente, quest'ultima affermazione conclude la successione di stime necessarie per dimostrare la tesi, che discende da proprietà che ci sono note. Inizialmente, osserviamo che la condizione (C.50) impone che ϱ sia piccolo abbastanza da implicare che $r_\star > 1$ e, quindi, $r_{\rm opt} \ge 2$. Sappiamo che la trasformazione $\Psi_\varrho = \mathscr{C}^{(r_{\rm opt}-1)}$ (si ricordi che la formula (C.47) sancisce che il passo ottimale $r_{\rm opt}$ è funzione di ϱ) è canonica per sua stessa definizione, che è stata introdotta al termine della sezione C.2.1 nell'ambito della descrizione dello schema di integrazione semi-analitico (C.14). Inoltre, essa è sicuramente analitica, poiché la scelta del passo ottimale $r_{\rm opt}$ che è definita da (C.47) implica che vale la disuguaglianza (C.45), la quale è a sua volta più restrittiva rispetto all'ipotesi (C.42) che permette di dimostrare[11] la proposizione C.13. Si ricordi inoltre che, per costruzione, $\Psi_\varrho\big(\mathbf{z}\,,\, i\bar{\mathbf{z}}\big) = \big(\mathbf{z}\,,\, i\bar{\mathbf{z}}\big) + \mathscr{O}(\varrho^2)$ e quindi è prossima all'identità per $\varrho \to 0$. Infine, siccome le trasformazioni canoniche preservano le equazioni del moto, siamo certi che la legge del moto $t \to \big(\mathbf{z}(t)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(t)\big)$ indotta dal flusso Hamiltoniano corrispondente a $\mathscr{H}^{(0)}$ a partire da $\big(\mathbf{z}(0)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(0)\big) \in \mathscr{U}_\varrho = \Psi_\varrho\big(B_{\varrho_0}(\mathbf{0})\big)$ è tale che per ogni istante di tempo $t \in [-T,T]$, si ha che

$$\big(\mathbf{z}(t)\,,\, i\bar{\mathbf{z}}(t)\big) \in \mathscr{V}_\varrho = \Psi_\varrho\big(B_\varrho(\mathbf{0})\big) \ .$$

[11] Si ricordi che l'analiticità della trasformazione canonica si verifica allo stesso modo di quella della Hamiltoniana, coerentemente con quanto affermato dal teorema di scambio.

Ne segue che

$$T_f\big(\mathscr{U}_\varrho\,,\,\mathscr{V}_\varrho\big) \ge T = \frac{\delta^2}{\varepsilon} = \mathcal{T}_\star \exp\left(\left(\frac{\varrho_\star}{\varrho}\right)^{1/(\tau+4)}\right) \ ,$$

dove abbiamo utilizzato la definizione $T = \delta^2/\varepsilon$ e anche quelle in formula (C.49), dalle quali si ricava il valore di $\mathcal{T}_\star$ che è costante nel senso che non dipende da ϱ. Infatti, proprio utilizzando le definizioni in (C.49), si ottiene che

$$\mathcal{T}_\star = \frac{C e^{\tau+4}}{12\,Ea^2} = \frac{\max\left\{1\,,\,3^{\tau+3}\frac{Ea^2}{\gamma}\right\} e^{\tau+4}}{12\,Ea^2} \ .$$

Q.E.D.

Il teorema di cui abbiamo appena terminato la dimostrazione traduce in pratica il concetto di stabilità effettiva. È probabilmente utile riformularlo in modo riassuntivo e discorsivo. Esso considera la dinamica nelle vicinanze di un punto di equilibrio, il quale è posto in corrispondenza all'origine ed è tale che in approssimazione quadratica della Hamiltoniana il moto sarebbe dato dalla composizione di n moti periodici di oscillazione le cui corrispondenti velocità angolari $\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_n$ sono così fortemente non risonanti da soddisfare una condizione di tipo diofanteo. Allora, se la Hamiltoniana è analitica, in prossimità del punto di equilibrio (cioè per ogni distanza ϱ dall'origine che sia sufficientemente piccola) esistono due insiemi $\mathscr{U}_\varrho$ e $\mathscr{V}_\varrho$ che godono delle seguenti proprietà: per $\varrho \to 0$ entrambi gli insiemi tendono ad identificarsi con $B_\varrho(\mathbf{0})$ (nel senso che il massimo rispetto ai punti di un insieme della distanza minima tra uno qualsiasi di quei punti e quelli dell'altro insieme è $o(\varrho)$); inoltre, $\mathscr{U}_\varrho$ è incluso in $\mathscr{V}_\varrho$; infine, il tempo di fuga dall'uno all'altro, cioè la funzione $T_f\big(\mathscr{U}_\varrho\,,\,\mathscr{V}_\varrho\big)$ che è stata definita all'inizio della presente sezione C.3.3, soddisfa la minorazione descritta in formula (C.40). Possiamo allora modificare il concetto di stabilità, che nei corsi base di fisica matematica viene enunciato per tempi infiniti, indebolendolo nel modo seguente: per ogni ϱ piccolo abbastanza esiste un sottoinsieme $\mathcal{W}$ tale che i moti che originano da condizioni iniziali in $\mathcal{W}$ rimangono sicuramente all'interno di $B_\varrho(\mathbf{0})$ ad ogni istante di tempo t con $|t| \le T(\varrho)$. Diciamo che un sistema descritto da un modello Hamiltoniano (caratterizzato anche dalle sue condizioni iniziali situate a una distanza ϱ dal punto di equilibrio, che consideriamo fissata e non arbitrariamente piccola) è *effettivamente stabile* se $T(\varrho)$ è maggiore del "tempo di vita" che caratterizza il sistema stesso (quando esso è ben definito, come avviene comunemente ad esempio in vari ambiti della fisica, della biologia, etc.). Siccome il precedente teorema C.14 ci garantisce che $T(\varrho)$ ha un andamento che è addirittura maggiore di una funzione che diverge a $+\infty$ in modo esponenzialmente veloce rispetto all'inverso della distanza ϱ, quando quest'ultima tende a zero (come descritto dalla minorazione (C.40)), allora la verifica della stabilità effettiva di un sistema può essere fatta agevolmente quando le condizioni iniziali sono sufficientemente vicine al punto di equilibrio.