

Appendix B

DYNAMICS IN THE VICINITY OF THE LAGRANGIAN EQUILATERAL POINTS

Lagrange, che pur avendo ottenuto brillanti risultati sulle perturbazioni secolari nel problema della dinamica dei pianeti in generale, non aveva rinunciato all'idea di cercare soluzioni iper modelli semplificati e aveva appunto iniziato con uno studio accurato del problema dei tre corpi, proseguendo delle ricerche già iniziate da Eulero.

Mi occuperò qui del *problema ristretto dei tre corpi*. Come anticipato, si tratta di una versione per così dire semplificata del problema generale. È appena il caso di sottolineare che l'aggettivo “semplificata” non è da intendersi nel senso di “semplice”: è vero che il numero di gradi di libertà viene ridotto in modo drastico, ma ciò serve solo a ridurre la complessità del calcolo, e non le reali difficoltà che restano tutte ben presenti.

Il problema si enuncia come segue.

Due punti materiali, detti corpi primari, si muovono nello spazio su un'orbita Kepleriana (ellittica o circolare). Un terzo punto P di massa trascurabile rispetto ai primi due, detto planetoido, si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dai primari, senza influenzarne il movimento. Si chiede di studiare la dinamica del punto P .

In altre parole, si suppone che i primari si comportino come un sistema a due corpi la cui dinamica non viene influenzata dal planetoido. A sua volta, il planetoido si muove sotto l'azione di un ambiente esterno, rappresentato appunto dai primari.

Nell'ambito della Meccanica Celeste il problema dei tre corpi si presenta come lo schema più naturale in cui inquadrare, almeno in prima approssimazione, problemi quali il moto dei pianeti interni all'orbita di Giove (Mercurio, Venere, Terra, Marte) o degli asteroidi quando si tenga conto dell'azione di Giove e del Sole. Si tratta ovviamente di un'approssimazione: si assume che le perturbazioni più consistenti siano dovute al pianeta di maggior massa, ossia Giove, ignorando gli effetti dovuti a Saturno, Urano e Nettuno. Nel caso dei pianeti interni e degli asteroidi della fascia principale ciò

può giustificarsi ulteriormente in considerazione del fatto che gli altri pianeti maggiori sono molto più lontani di Giove. Lo schema del modello ristretto può applicarsi anche allo studio della dinamica dei satelliti naturali e artificiali.

Si possono considerare diverse varianti. Si distingue anzitutto il caso *circolare*, in cui i due primari ruotano a velocità uniforme rispetto al baricentro comune, dal caso *ellittico*. Si distingue poi il caso *piano*, in cui il planetoido è vincolato a muoversi nel piano dell'orbita dei primari, da quello *spaziale*. Combinando tra loro queste due scelte si hanno quattro casi possibili, e comunque tutti non integrabili (o, per essere pignoli, non integrati).

B.1 L'Hamiltoniana e le equazioni

Iniziamo con lo scrivere le equazioni del problema ristretto circolare in forma Hamiltoniana. A tal fine è particolarmente comodo far uso di un sistema di riferimento in cui i primari occupino delle posizioni fisse. Inoltre è conveniente fissare le unità di misura in modo da minimizzare il numero di costanti.

B.1.1 Scelta delle unità di misura

È uso comune, del resto conveniente, scegliere le unità di misura in modo da ricondurre il problema alla forma più semplice possibile. Come misura di lunghezza si sceglie il semiasse maggiore dell'orbita kepleriana dei primari, che nel caso circolare è la distanza tra i due. Si sceglie poi l'unità di massa pari alla somma delle masse dei primari (quella del planetoido è trascurabile), e si denota con μ la massa di uno dei due primari (solitamente la più piccola), sicché l'altra massa risulta essere $1 - \mu$. Infine si pone la costante di gravitazione $K_g = 1$, il che equivale a fissare l'unità di tempo.

Ricordiamo che per la soluzione Kepleriana del problema dei due corpi vale la relazione tra semiassi e periodi

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K_g(m_1 + m_2)}{4\pi^2},$$

dove m_1, m_2 sono le masse. Ne segue che nelle unità di misura che abbiamo scelto la soluzione Kepleriana circolare per il moto dei due primari ha periodo $T = 2\pi$, e dunque frequenza angolare $\omega = 1$.

B.1.2 L'Hamiltoniana e le equazioni canoniche nel caso circolare

Il procedimento tradizionale, e in effetti anche il più comodo, consiste nel considerare un sistema di riferimento solidale coi primari, e quindi in moto rotatorio uniforme attorno al baricentro dei primari. In questo sistema di riferimento si pongono le due masse sull'asse x , con la massa maggiore dal lato positivo, come illustrato in figura B.1. Dunque, la massa $1 - \mu$ occupa la coordinata μ e la massa μ occupa la posizione $-1 + \mu$ sull'asse x .

Consideriamo anzitutto un sistema di riferimento fisso, e denotiamo con ξ, η, ζ le coordinate cartesiane del planetoido. In un primo momento scriviamo in modo

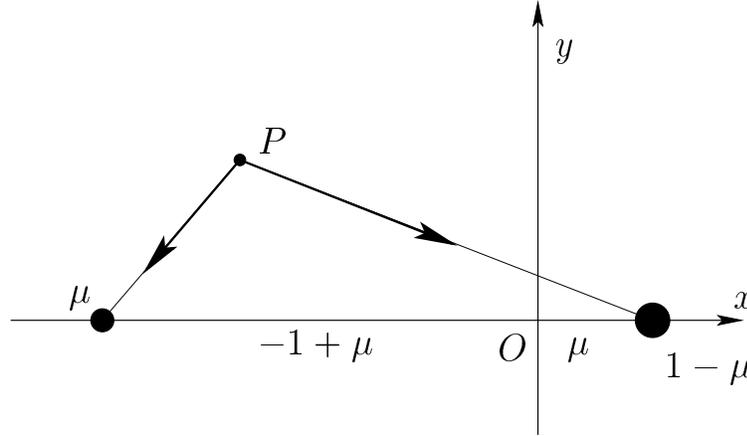


Figure B.1. Ad illustrazione del problema dei tre corpi nel caso ristretto, circolare e piano.

esplicito tutte le costanti, riservandoci di tener conto più avanti della scelta delle unità di misura. L'Hamiltoniana si scrive

$$(B.1) \quad H(\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, t) = \frac{1}{2m}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + V(\xi, \eta, \zeta, t) .$$

L'energia potenziale è quella gravitazionale, e sarà la somma dei due termini dovuti all'interazione del planetoido con i primari, ossia

$$(B.2) \quad V = -\frac{K_g(1-\mu)m}{r_1} - \frac{K_g\mu m}{r_2}$$

dove r_1 è la distanza tra il planetoido e il primario di massa $1 - \mu$ e r_2 la distanza dal secondo primario. La dipendenza dal tempo deriva dal movimento dei due primari nel sistema di riferimento assoluto. Qui non serve scrivere l'espressione esplicita della distanza: vedremo subito che nel sistema rotante la forma è alquanto più semplice, e si scrive in modo diretto.

Dette x, y, z le coordinate in un sistema di riferimento rotante uniformemente in senso antiorario intorno all'asse ζ con velocità angolare ω , e scegliendo l'origine del sistema rotante coincidente con quella del sistema fisso (sicché gli assi z e ζ coincidono) si hanno le relazioni geometriche

$$(B.3) \quad \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t , \quad \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t , \quad \zeta = z ,$$

e le relazioni inverse

$$x = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t , \quad y = -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t , \quad z = \zeta .$$

Si tratta di una trasformazione puntuale dipendente dal tempo, e possiamo estenderla a trasformazione canonica mediante la funzione generatrice

$$S(p_x, p_y, p_z, \xi, \eta, \zeta) = p_x(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t) + p_y(-\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) + p_z \zeta ,$$

ma dovremo ricordare che l'Hamiltoniana trasformata è $H + \frac{\partial S}{\partial t}$, come abbiamo visto nella proposizione 2.20. La trasformazione sui momenti si scrive

$$(B.4) \quad p_\xi = p_x \cos \omega t - p_y \sin \omega t, \quad p_\eta = p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t, \quad p_\zeta = p_z.$$

Dobbiamo poi calcolare

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \omega p_x (-\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) - \omega p_y (\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t) = -\omega p_y x + \omega p_x y.$$

dove abbiamo sostituito la trasformazione (B.3) sulle coordinate.

Otteniamo dunque l'Hamiltoniana del problema circolare ristretto nel sistema rotante (che con un piccolo abuso di notazione indicheremo ancora con H)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega x p_y + \omega y p_x \\ - \frac{K_g(1-\mu)m}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{K_g\mu m}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Nella scrittura dell'energia potenziale si è tenuto conto del fatto che nel sistema di riferimento solidale con i primari questi occupano due posizioni fisse, con la massa maggiore $1-\mu$ nel punto $(\mu, 0, 0)$ e la massa minore μ nel punto $(-1+\mu, 0, 0)$. Ora teniamo conto delle unità di misura che abbiamo scelto all'inizio, sicché porremo $K_g = 1$, $\omega = 1$. Infine possiamo eliminare la massa m mediante la trasformazione di scala

$$p_x = m p'_x, \quad p_y = m p'_y, \quad p_z = m p'_z,$$

e lasciando inalterate le coordinate x, y, z . La trasformazione non è canonica in senso stretto, e occorre dividere per m l'Hamiltoniana trasformata (si veda il paragrafo 2.2.1). Nel nostro caso ciò corrisponde di fatto ad eliminare un fattore m comune a tutti i termini, sicché si ottiene (rimuovendo gli apici) la forma comunemente usata (B.5)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x p_y + y p_x \\ - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Scriviamo infine le equazioni canoniche

$$(B.6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_x &= p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_y &= -p_x - \frac{(1-\mu)y}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_z &= -\frac{(1-\mu)z}{[(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mu z}{[(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Si vede subito che ponendo come dati iniziali $z(0) = 0$ e $p_z(0) = 0$, con dati arbitrari per le altre variabili, allora la terza e l'ultima equazione hanno la soluzione banale $z(t) = 0$, $p_z(t) = 0$. In tal caso ci si riduce a considerare il problema piano, descritto dalle sole equazioni

$$(B.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_x &= p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ \dot{p}_y &= -p_x - \frac{(1-\mu)y}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} . \end{aligned}$$

B.2 Gli equilibri lagrangiani

Vogliamo ora cercare le soluzioni di equilibrio per il sistema (B.6). Dal momento che le equazioni per z , p_z ammettono $z = p_z = 0$ come unico punto di equilibrio potremo restringere la nostra attenzione al problema piano, come descritto dalle equazioni (B.7). Il lettore noterà che gli equilibri sono le posizioni in cui il planetotide sta fermo in un sistema di riferimento che ruota uniformemente. Nel sistema fisso si vedranno i tre corpi girare con velocità uniforme mantenendo la stessa posizione relativa.

B.2.1 Calcolo degli equilibri relativi

Occorre annullare i secondi membri delle equazioni. Ponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ otteniamo

$$p_x = -y, \quad p_y = x .$$

Le altre due equazioni diventano

$$(B.8) \quad \begin{aligned} x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} &= 0 \\ y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} &= 0 . \end{aligned}$$

dove

$$(B.9) \quad r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2$$

sono le distanze del planetotide dai due primari.

Per il seguito è conveniente anche fattorizzare x e y al numeratore, e riscrivere le equazioni nella forma

$$(B.10) \quad \begin{aligned} x \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) + \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0 \\ y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

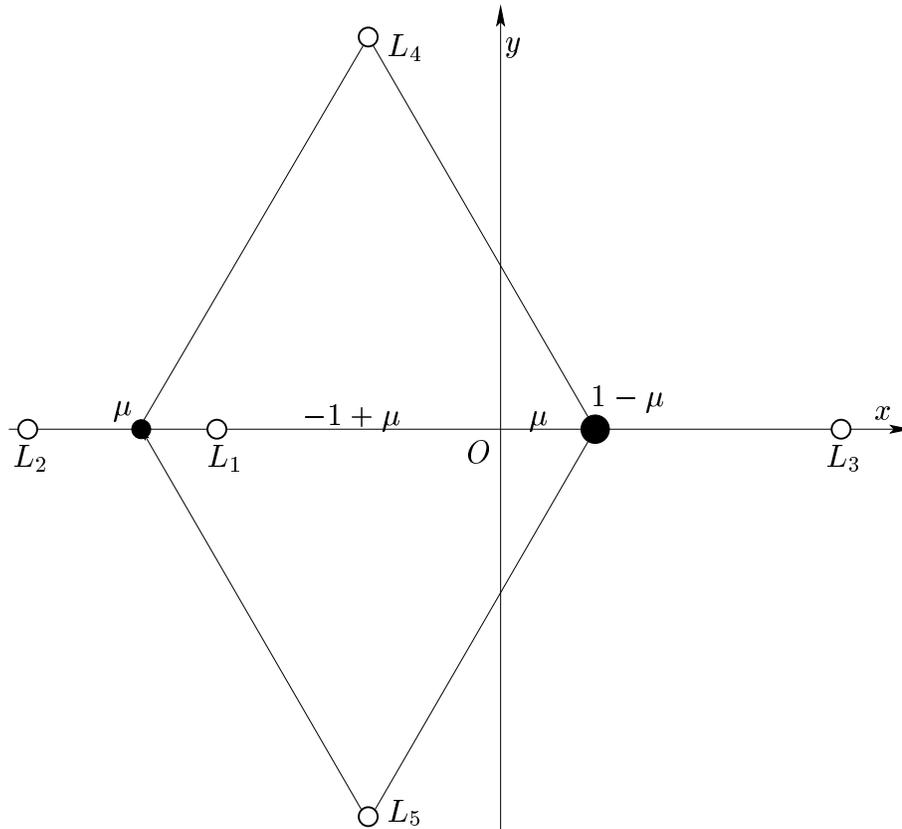


Figure B.2. I cinque equilibri lagrangiani del problema ristretto dei tre corpi.

Le soluzioni di quest'ultima coppia di equazioni o, equivalentemente, delle (B.8) sono le posizioni di equilibrio cercate. Anticipiamo fin d'ora che, come scoperto da Lagrange, esistono 5 punti di equilibrio distinti, di cui tre giacciono sull'asse che congiunge i primari, e vengono detti *equilibri collineari*, e gli altri due sono disposti in modo da formare un triangolo equilatero con i due primari, e vengono detti *equilibri triangolari*. Gli equilibri sono rappresentati in figura B.2.

B.2.2 Equilibri triangolari

Poniamo ora nella seconda delle (B.10)

$$(B.11) \quad 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0.$$

La prima delle (B.10) si riduce a $\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = 0$, il che implica $r_1 = r_2$. Per sostituzione nella (B.11) si trova allora $r_1 = r_2 = 1$, il che significa che i punti di equilibrio si devono trovare sull'intersezione di due circonferenze di raggio unitario centrate nei primari. Si ottengono così due punti distinti, ciascuno dei quali forma un triangolo equilatero coi primari. Le coordinate dei punti e i rispettivi momenti sono

$$(B.12) \quad x = -\frac{1}{2} + \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_x = -y = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_y = x = -\frac{1}{2} + \mu.$$

Si denotano rispettivamente con L_4 e L_5 la soluzione con $y > 0$ e con $y < 0$.

B.3 La dinamica nell'intorno dei punti lagrangiani

Veniamo ora a una trattazione analitica del problema dei punti di equilibrio lagrangiani. Il procedimento più immediato consiste nello sviluppare l'Hamiltoniana in serie di potenze nell'intorno degli equilibri. Nel paragrafo B.3.1 procederemo a porre le basi necessarie per tale sviluppo.

Si passa poi allo studio della stabilità in approssimazione lineare. Precisamente si introduce un'approssimazione che consiste nel considerare solo la parte quadratica dell'Hamiltoniana, il che equivale a linearizzare le equazioni nell'intorno degli equilibri. Questa parte è ormai da considerarsi classica, e conduce alla conclusione che i punti collineari sono instabili, mentre i punti triangolari risultano essere stabili se il parametro μ è abbastanza piccolo.

L'approssimazione lineare si rivela insufficiente per dimostrare la stabilità effettiva dei punti triangolari. Il problema è tutt'altro che semplice: avremo bisogno di diversi strumenti tecnici che svilupperemo solo nei capitoli successivi. Anticipo fin d'ora che il problema della stabilità non lineare dei punti triangolari è questione a tutt'oggi irrisolta.

B.3.1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana nell'intorno dell'equilibrio

Riscriviamo anzitutto l'Hamiltoniana del problema ristretto nella sua forma più semplice, ossia la (B.5) che riscriviamo per comodità nella forma

$$(B.13) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

dove

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

sono le distanze tra il planetoido e i primari. Denotiamo poi con $x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}}$ le coordinate del punto di equilibrio. Dai paragrafi B.2.1—B.2.2 sappiamo che:

- (i) vi sono tre equilibri collineari L_1, L_2, L_3 sulla retta $y_{\text{eq}} = z_{\text{eq}} = 0$, per i quali x_{eq} è una radice della seguente equazione:

$$x = \frac{1-\mu}{|x-\mu|(x-\mu)} + \frac{\mu}{|x+1-\mu|(x+1-\mu)}.$$

- (ii) vi sono due equilibri triangolari nei punti di coordinate $z_{\text{eq}} = 0$ e

$$\begin{aligned} x_{\text{eq}} &= -\frac{1}{2} + \mu, & y_{\text{eq}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \text{per } L_4, \\ x_{\text{eq}} &= -\frac{1}{2} + \mu, & y_{\text{eq}} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} && \text{per } L_5. \end{aligned}$$

- (iii) i momenti nei punti di equilibrio sono $p_x = -y_{\text{eq}}, p_y = x_{\text{eq}}$ e $p_z = 0$.

Eseguiamo anzitutto una traslazione che porti l'equilibrio nell'origine

$$\begin{aligned}x' &= x - x_{\text{eq}} , & p'_x &= p_x + y_{\text{eq}} , \\y' &= y - y_{\text{eq}} , & p'_y &= p_y - x_{\text{eq}} , \\z' &= z , & p'_z &= p_z ,\end{aligned}$$

sicché le variabili z , p_z restano immutate. La trasformazione è evidentemente canonica, e l'Hamiltoniana trasformata si scrive, rimuovendo gli apici per semplificare le notazioni e ignorando i termini costanti,

$$(B.14) \quad H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - xx_{\text{eq}} - yy_{\text{eq}} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} ,$$

dove r_1 , r_2 sono ancora le distanze tra il planetotide e i primari, che in queste coordinate si scrivono

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x_{\text{eq}} - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 + 2x(x_{\text{eq}} - \mu) + 2yy_{\text{eq}} + x^2 + y^2 + z^2 , \\r_2^2 &= (x_{\text{eq}} + 1 - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 + 2x(x_{\text{eq}} + 1 - \mu) + 2yy_{\text{eq}} + x^2 + y^2 + z^2 .\end{aligned}$$

Denotiamo

$$(B.15) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 , \quad \varrho_1^2 = (x_{\text{eq}} - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 , \quad \varrho_2^2 = (x_{\text{eq}} + 1 - \mu)^2 + y_{\text{eq}}^2 ,$$

e riscriviamo r_1 e r_2 nella forma

$$\begin{aligned}r_1^2 &= \varrho_1^2 \left[1 - 2 \frac{r}{\varrho_1} \cdot \frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} + \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^2 \right] , \\r_2^2 &= \varrho_2^2 \left[1 - 2 \frac{r}{\varrho_2} \cdot \frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} + \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^2 \right] .\end{aligned}$$

In tal modo si vede che gli inversi delle distanze si sviluppano in serie di potenze mediante i polinomi di Legendre¹ $P_k(\cdot)$, ossia

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1} &= \frac{1}{\varrho_1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^k P_k \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} \right) , \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{\varrho_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^k P_k \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} \right) .\end{aligned}$$

È bene fermarsi a riflettere un momento su queste ultime espressioni per rendersi conto che sia $\left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^k P_k \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} \right)$ che $\left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^k P_k \left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} \right)$ sono polinomi omogenei di grado k nelle variabili x , y , z , sicché abbiamo effettivamente a che fare con uno sviluppo in serie di potenze. Ricordiamo infatti che $P_k(\zeta)$ è un polinomio di grado k nel suo argomento ζ e che contiene solo potenze della stessa parità di k .

¹ Per una breve esposizione, sufficiente agli scopi di queste note, si rimanda al relativo testo del tema d'esame del corso di LC1, che è consultabile al seguente indirizzo web: http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/MCSH/programmi/Tema_pol_legendre.pdf.

Allora, riducendo all'essenziale la forma delle espressioni in modo da tener conto delle sole quantità variabili x, y, r , otteniamo una somma di termini della forma

$$r^k \left(\frac{x-y}{r} \right)^{k-2j} = r^{2j} (x-y)^{k-2j}, \quad j = 0, \dots, \lfloor k/2 \rfloor.$$

Poiché r compare sempre con una potenza pari questa espressione è un polinomio omogeneo di grado k in x, y, z , come asserito.

Riscriviamo ora la forma completa dello sviluppo dell'Hamiltoniana in polinomi di Legendre, ossia

$$(B.16) \quad \begin{aligned} H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - xx_{\text{eq}} - yy_{\text{eq}} \\ & - \frac{(1-\mu)}{\varrho_1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^k P_k \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} \right) \\ & - \frac{\mu}{\varrho_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^k P_k \left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} \right). \end{aligned}$$

Questa è già, di fatto, una serie di potenze, e dobbiamo solo riordinarla per polinomi omogenei, per una questione di comodità. Ora, il contributo di grado zero è un termine costante che possiamo ignorare, e i termini di grado 1 si devono necessariamente annullare, perché stiamo trattando lo sviluppo nell'intorno di un equilibrio dove tutte le derivate di H si annullano. Restano dunque i termini di secondo grado, che raccogliamo in

$$(B.17) \quad \begin{aligned} H_0(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x \\ & - \frac{(1-\mu)}{\varrho_1} \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^2 P_2 \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} \right) \\ & - \frac{\mu}{\varrho_2} \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^2 P_2 \left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} \right) \end{aligned}$$

e i termini di grado superiore al secondo, che denotiamo

$$(B.18) \quad \begin{aligned} H_s(x, y, z) = & -\frac{(1-\mu)}{\varrho_1} \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^s P_s \left(\frac{x(\mu - x_{\text{eq}}) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_1} \right) \\ & - \frac{\mu}{\varrho_2} \left(\frac{r}{\varrho_2} \right)^s P_s \left(-\frac{x(\mu - x_{\text{eq}} - 1) - yy_{\text{eq}}}{r\varrho_2} \right). \end{aligned}$$

Concludiamo così che l'Hamiltoniana del problema circolare ristretto può svilupparsi in serie di potenze nell'intorno di un punto di equilibrio lagrangiano nella forma

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

dove H_0 è un'espressione quadratica in x, y, z, p_x, p_y, p_z e H_s , per $s \geq 1$ è un polinomio omogeneo di grado $s + 2$ nelle sole coordinate x, y, z .

Per il calcolo esplicito dello sviluppo dell'Hamiltoniana, almeno per quanto riguarda la Hamiltoniana quadratica, è sufficiente conoscere le espressioni dei primi

tre polinomi di Legendre, cioè $P_0(w) = 1$, $P_1(w) = w$ e $P_2(w) = (3w^2 - 1)/2$. Qui di seguito riporto solo il calcolo per la parte quadratica, in quanto in questo momento non è di grande utilità scrivere un'espressione più esplicita per i termini di ordine superiore.

$$(B.19) \quad H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + Cxy + \frac{D}{2}z^2$$

dove

$$(B.20) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \frac{3(1-\mu)(\mu-x_{\text{eq}})^2}{\varrho_1^5} - \frac{3\mu(\mu-x_{\text{eq}}-1)^2}{\varrho_2^5} \\ B &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} - \frac{3(1-\mu)y_{\text{eq}}^2}{\varrho_1^5} - \frac{3\mu y_{\text{eq}}^2}{\varrho_2^5} \\ C &= \frac{3(1-\mu)(\mu-x_{\text{eq}})y_{\text{eq}}}{\varrho_1^5} + \frac{3\mu(\mu-x_{\text{eq}}-1)y_{\text{eq}}}{\varrho_2^5} \\ D &= \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3} \end{aligned}$$

Da questa espressione vediamo immediatamente che l'Hamiltoniana si disaccoppia in due parti, una che coinvolge le variabili x , y , p_x , p_y , l'altra che coinvolge solo z , p_z . Questa seconda parte poi ha la forma alquanto semplice

$$(B.21) \quad H_0^{(z)} = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{D}{2}z^2 .$$

Poiché D è certamente positivo, per come è definito nella (B.20), vediamo immediatamente che mediante la trasformazione canonica

$$(B.22) \quad z = \frac{\zeta}{\sqrt{\omega_z}} , \quad p_z = \sqrt{\omega_z} p_\zeta , \quad \omega_z = \sqrt{D}$$

l'Hamiltoniana (B.21) si trasforma in

$$H_0^{(z)} = \frac{\omega_z}{2}(\zeta^2 + p_\zeta^2) ,$$

che riconosciamo immediatamente come descrivente il moto di un oscillatore armonico di frequenza ω_z . Questo si applica a tutti i punti di equilibrio lagrangiani.

Resta invece da studiare la dinamica della parte restante dell'Hamiltoniana quadratica, ossia

$$(B.23) \quad H_0^{(x,y)} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + Cxy .$$

Questo studio verrà svolto nei prossimi paragrafi.

B.3.2 L'approssimazione lineare nell'intorno dei punti di equilibrio lagrangiani

Lo studio dell'Hamiltoniana (B.23) viene tipicamente affrontato scrivendo le equazioni di Hamilton e applicando i metodi classici, che risalgono a Lagrange², per ridurre il sistema lineare a una forma normale. In vista degli sviluppi successivi preferisco però porre il problema della riduzione dell'Hamiltoniana quadratica a una *forma normale* che ne renda semplice lo studio. Si tratta di un problema ben noto.

Raccogliamo le variabili canoniche in un unico vettore $\mathbf{z} = (x, y, p_x, p_y)$, sicché l'Hamiltoniana quadratica si scrive³

$$H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{C} \mathbf{z} ,$$

dove \mathbf{C} è la matrice simmetrica

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A & C & 0 & -1 \\ C & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in cui compaiono le costanti A, B, C definite nella (B.20). Le equazioni di Hamilton assumono la forma $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}$ dove

$$(B.24) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -A & -C & 0 & 1 \\ -C & -B & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Conviene anche scrivere una volta per tutte il polinomio caratteristico (denotando con \mathbf{I} la matrice identità)

$$(B.25) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^4 + (2 + A + B)\lambda^2 + (1 - A)(1 - B) - C^2 .$$

Occorre ora sostituire in questo polinomio le coordinate dei punti di equilibrio, e calcolarne le radici al fine di classificare i diversi equilibri. Per questo, al fine di semplificare il calcolo, converrà separare lo studio dei punti collineari da quello dei punti triangolari.

B.3.3 Stabilità dei punti collineari

Osserviamo subito che basta studiare la stabilità dei punti L_1 ed L_2 , permettendo a μ di assumere qualunque valore nell'intervallo aperto $(0, 1)$. Ciò è dovuto alla simmetria: studiare la stabilità del punto L_3 per un dato μ è equivalente a studiare la stabilità di L_2 per $1 - \mu$.

Sostituiamo ora $y_{\text{eq}} = 0$ sia nell'espressione (B.15) di ϱ_1, ϱ_2 , da cui otteniamo

$$\varrho_1 = |x_{\text{eq}} - \mu| , \quad \varrho_2 = |x_{\text{eq}} + 1 - \mu| ,$$

² Si veda [60], § 30–35.

³ Uso il formalismo in cui si considera \mathbf{z} come un vettore colonna e il suo trasposto \mathbf{z}^\top è un vettore riga, sicché la forma quadratica si scrive come prodotto righe per colonne di vettori e matrici.

sia, unitamente a queste due ultime espressioni, nelle (B.20), e abbiamo

$$(B.26) \quad B = \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}, \quad A = -2B, \quad C = 0,$$

sicché la matrice (B.24) del sistema di equazioni lineari diventa

$$(B.27) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2B & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -B & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e il polinomio caratteristico (B.25) si trasforma in

$$\lambda^4 + (2-B)\lambda^2 + (1+2B)(1-B).$$

Nell'espressione (B.26) di B dobbiamo ora sostituire i valori di μ e x_{eq} che corrispondono agli equilibri. Conviene anche sostituire x_{eq} con la quantità

$$\delta = x_{\text{eq}} + 1 - \mu,$$

sicché abbiamo

$$(B.28) \quad B = \frac{1-\mu}{|\delta-1|^3} + \frac{\mu}{|\delta|^3}.$$

Veniamo alla discussione dell'equazione caratteristica, che è di fatto un'equazione biquadratica, e consideriamo λ^2 come incognita. Si può verificare che l'equazione caratteristica per L_1 e L_2 ammette due radici $-\omega^2$, λ^2 reali e di segno opposto per tutti i valori di $\mu \in (0, 1)$. A tal fine basta mostrare che l'ordinata all'origine del polinomio caratteristico è negativa, ovvero che $(1+2B)(1-B) < 0$. Con qualche calcolo possiamo anche ricavare gli autovalori, o meglio i loro quadrati, nella forma

$$\omega^2 = \frac{B-2-\sqrt{B(9B-8)}}{2}, \quad \lambda^2 = \frac{B-2+\sqrt{B(9B-8)}}{2}$$

Possiamo così concludere che per tutti i $\mu \in (0, 1)$ i punti collineari del problema ristretto circolare dei tre corpi nell'approssimazione lineare ammettono una coppia di autovalori $i\omega$, $-i\omega$ immaginari puri, e una coppia di autovalori λ , $-\lambda$ reali. Di conseguenza il sistema lineare può rappresentarsi come il prodotto di un centro con una sella, ed è instabile. Ciò è sufficiente per concludere che anche il sistema non lineare è instabile.

B.3.4 Stabilità lineare per i punti triangolari

Qui restringeremo il nostro studio a valori di μ nell'intervallo $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, che basta per discutere il problema in modo completo. Occorre anzitutto sostituire nelle espressioni A , B , C date dalle (B.20) le coordinate degli equilibri che abbiamo ricavato nel paragrafo B.2.2, ossia $x_{\text{eq}} = -\frac{1}{2} + \mu$, $y_{\text{eq}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Osservando che dalle (B.15) abbiamo

$\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, otteniamo

$$(B.29) \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{5}{4}, \quad C = \pm \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right),$$

dove il segno positivo e negativo si applicano rispettivamente ai punti L_4 ed L_5 .

Sostituendo questi valori nell'espressione (B.23) dell'Hamiltoniana otteniamo

$$(B.30) \quad H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}y^2 + Cxy,$$

Le matrice A del sistema di equazioni lineari per il punto L_4 diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & -C & 0 & 1 \\ -C & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove C è la costante definita nella (B.29), sicché si tiene conto implicitamente anche del segno. L'equazione secolare si trasforma in

$$(B.31) \quad \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - C^2 = 0,$$

ovvero, sostituendo a C il suo valore in funzione di μ ,

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

L'equazione è la stessa per ambedue i punti, ed è biquadratica. Risolvendola rispetto a λ^2 otteniamo

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}.$$

Osserviamo che vale $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1$. Il segno del discriminante $\Delta = 1 - 27\mu(1 - \mu)$ ci permette di distinguere due casi.

Per

$$(B.32) \quad 27\mu(1 - \mu) < 1, \quad 0 < \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.0385208965$$

l'equazione in λ^2 ha due radici reali e ambedue negative. Di conseguenza il sistema linearizzato ammette due coppie di autovalori $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ immaginari puri. Nell'approssimazione lineare il sistema può rappresentarsi come il prodotto di due centri, e la dinamica è una combinazione di due oscillazioni di frequenze

$$(B.33) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}.$$

Il sistema è dunque stabile nell'approssimazione lineare. Il grafico delle frequenze in funzione di μ è riportato in figura B.3.

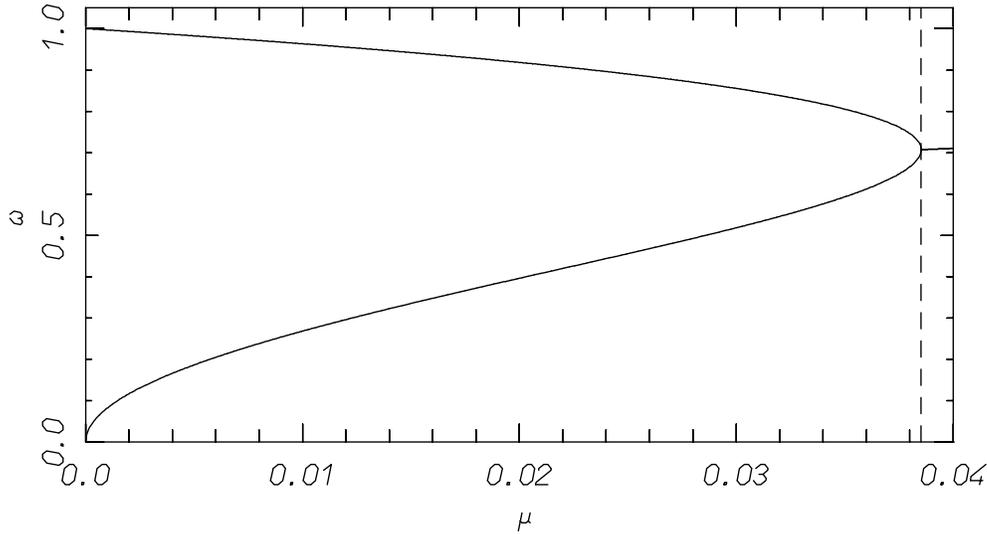


Figure B.3. Le due frequenze di oscillazione ω_1, ω_2 in prossimità dei punti di equilibrio triangolari L_4 e L_5 per $0 \leq \mu \leq \mu^* \simeq 0.0385208965$. La retta tratteggiata verticale corrisponde al valore μ^* .

Per $27\mu(1-\mu) > 1$, ovvero $\mu > \mu^*$, l'equazione in λ^2 ha due radici complesse coniugate, con parte reale negativa. L'equazione caratteristica ha quattro autovalori della forma $\pm\sigma \pm i\omega$, con

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} - 1}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} + 1}.$$

Nell'approssimazione lineare lo spazio delle fasi si decompone nel prodotto di due piani corrispondenti alle coppie di autovalori $\sigma \pm i\omega$ e $-\sigma \pm i\omega$. La dinamica sul primo piano è quella di un fuoco instabile; quella sul secondo piano è un fuoco stabile. Il punto di equilibrio è instabile nell'approssimazione lineare, e ciò è sufficiente per concludere che il sistema non lineare è anch'esso instabile.

La figura B.4 riporta in sintesi il comportamento delle parti reali e immaginarie degli autovalori dell'equazione caratteristica per tutto l'intervallo $0 \leq \mu \leq 1/2$.

Nel caso in cui $\mu < \mu^*$, si dimostra⁴⁵ che esiste una matrice \mathcal{U} che è associata a una trasformazione canonica e lineare

$$(p_x, p_y, x, y)^\top = \mathcal{U}(x_1, x_2, y_1, y_2)^\top,$$

la quale diagonalizza la parte quadratica dell'Hamiltoniana (B.30). Infatti, nelle nuove

⁴ Per una tale verifica, si rimanda alle note esplicative consultabili all'indirizzo web: http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/MCSH/programmi/diag_sympL4oL5.pdf.

⁵ Sulla falsariga delle suddette note, è stato realizzato il codice che effettua esplicitamente la diagonalizzazione della parte quadratica, utilizzando `Mathematica` come ambiente di programmazione; esso è reperibile al seguente indirizzo web: http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/MCSH/programmi/diag_L4oL5.mth.

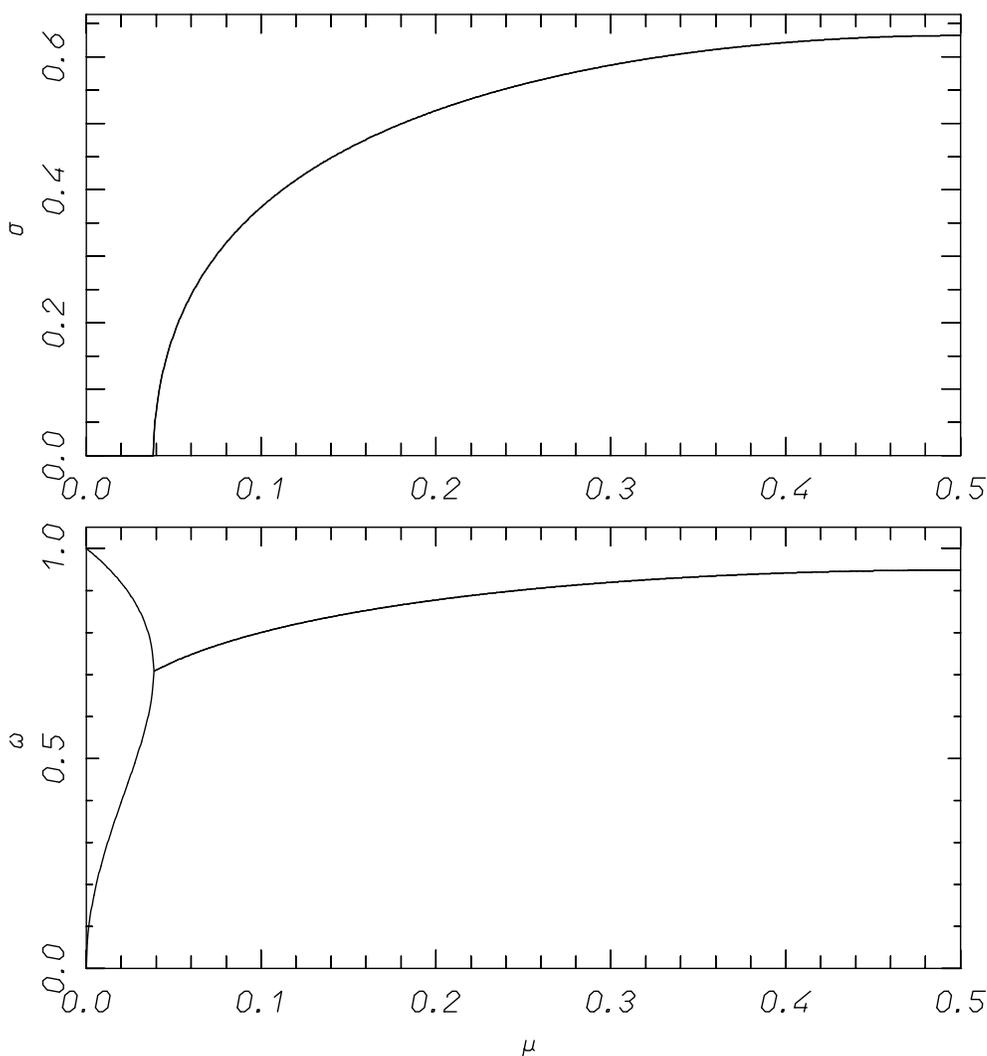


Figure B.4. La parte reale σ (sopra) e la parte immaginaria ω (sotto) degli autovalori dell'equazione caratteristica in prossimità dei punti L_4 e L_5 . Per $\mu < \mu^* \simeq 0.0385208965$ gli autovalori sono immaginari puri, e si hanno due frequenze ω_1, ω_2 distinte, come illustrato in modo più dettagliato in figura B.3. Per $\mu > \mu^*$ gli autovalori hanno la forma $\pm\sigma \pm i\omega$.

coordinate, tale parte quadratica diventa

$$H_0^{(x,y)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2).$$

Si noti bene che la seconda frequenza ha segno negativo. Ciò ha un ruolo rilevante nella discussione sulla stabilità quando si tenga conto della parte non lineare dell'Hamiltoniana.

B.3.5 Sviluppo dell'Hamiltoniana a partire da coordinate eliocentriche polari

Quando si studiano i moti nei pressi di un punto di equilibrio triangolare, nell'ambito

dei metodi costruttivi di forme normali che vadano (ben) al di là dell'approssimazione quadratica, si riesce a descrivere la dinamica in modo assai più esteso, se si considerano espansioni prodotte a partire da coordinate eliocentriche polari, anziché quelle adottate nelle sezioni precedenti. Inoltre, è sicuramente educativo fare in due modi diversi gli sviluppi iniziali del nostro problema Hamiltoniano, anche per apprendere come confrontare i risultati ottenuti.

Riconsideriamo l'Hamiltoniana $H = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ così come descritta in formula (B.5); vogliamo ora introdurre coordinate eliocentriche polari, cioè

$$(B.34) \quad x = \mu + \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad z = \zeta.$$

Dalla definizione precedente, è evidente che la componente verticale viene mantenuta invariata; inoltre, quando la distanza $\varrho = 0$, allora i valori delle coordinate $(x, y, z) = (\mu, 0, 0)$ sono quelli corrispondenti alla posizione del maggiore dei corpi primari, dando così la giustificazione del perché queste coordinate vengono dette "eliocentriche". Al fine di estendere questo cambio di coordinate ai momenti, introduciamo la funzione generatrice

$$S(p_x, p_y, p_z, \varrho, \vartheta, \zeta) = p_x(\mu + \varrho \cos \vartheta) + (p_y - \mu)\varrho \sin \vartheta + p_z \zeta,$$

ne segue quindi la relazione che fornisce i nuovi momenti cinetici in funzione dei vecchi, cioè

$$p_\varrho = \frac{\partial S}{\partial \varrho} = p_x \cos \vartheta + (p_y - \mu) \sin \vartheta, \quad p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = -p_x \varrho \sin \vartheta + (p_y - \mu) \varrho \cos \vartheta, \quad p_\zeta = p_z.$$

Si intuisce che, nella funzione generatrice in coordinate miste, è conveniente introdurre il fattore $p_y - \mu$ (in luogo dell'abituale p_y), perché in corrispondenza ai punti di equilibrio si ha che $p_y = x$ (si veda (B.5)), quindi è bene mantenere l'abbinamento tra le traslazioni della coordinata x e del momento p_y . Se così non si facesse, i valori dei momenti p_ϱ e p_ϑ in corrispondenza ai punti di equilibrio (si veda la successiva formula (B.37)) non sarebbero altrettanto semplici. Le relazioni riguardanti i momenti si invertono facilmente, in modo da ottenere le seguenti:

$$(B.35) \quad p_x = p_\varrho \cos \vartheta - \frac{p_\vartheta}{\varrho} \sin \vartheta, \quad p_y = \mu + p_\varrho \sin \vartheta + \frac{p_\vartheta}{\varrho} \cos \vartheta, \quad p_z = p_\zeta.$$

Le equazioni in formula (B.34), unite a quelle che compaiono in (B.35), compongono la trasformazione canonica che esprime le vecchie coordinate in funzione delle nuove. Per sostituzione nella Hamiltoniana (B.5), si ottiene quella espressa in funzione delle nuove coordinate canoniche, che (con il solito abuso di notazione) indichiamo nuovamente con il simbolo H , cioè

$$(B.36) \quad H(\varrho, \vartheta, \zeta, p_\varrho, p_\vartheta, p_\zeta) = \frac{1}{2} \left(p_\varrho^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\varrho^2} + p_\zeta^2 \right) - \frac{\mu^2}{2} - p_\vartheta - \mu \varrho \cos \vartheta - \frac{1 - \mu}{\sqrt{\varrho^2 + \zeta^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{1 + 2\varrho \cos \vartheta + \varrho^2 + \zeta^2}}.$$

Tenendo conto delle definizioni (B.34)–(B.35), si determinano le posizioni dei punti di equilibrio L_4 e L_5 corrispondenti ai valori riportati in formula (B.12); esse sono

$$(B.37) \quad \varrho = 1, \quad \vartheta = \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \zeta = 0, \quad p_\varrho = 0, \quad p_\vartheta = 1, \quad p_\zeta = 0,$$

dove il segno $+$ [$-$] riguardante ϑ si riferisce a L_4 [L_5]. Introduciamo ora delle coordinate canoniche (X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) che sono definite a partire da quelle precedenti grazie a un'opportuna traslazione, in modo che la nuova origine del riferimento coincida con un punto di equilibrio triangolare, cioè

$$(B.38) \quad \varrho = 1 + X, \quad \vartheta = \pm \frac{2\pi}{3} + Y, \quad \zeta = Z, \quad p_\varrho = P_X, \quad p_\vartheta = 1 + P_Y, \quad p_\zeta = P_Z.$$

Nel nuovo sistema di coordinate canoniche, l'Hamiltoniana diventa

$$(B.39) \quad H(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) = \frac{1}{2} \left(P_X^2 + \frac{(P_Y + 1)^2}{(1 + Y)^2} + P_Z^2 \right) - \frac{\mu^2}{2} - 1 - P_Y \\ - \mu(1 + X) \cos \left(\pm \frac{2\pi}{3} + Y \right) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(1 + X)^2 + Z^2}} \\ - \frac{\mu}{\sqrt{1 + 2(1 + X) \cos \left(\pm \frac{2\pi}{3} + Y \right) + (1 + X)^2 + Z^2}}.$$

Per quanto riguarda i termini che compaiono nelle prime due righe della formula precedente, sono assai semplici gli sviluppi in serie per piccoli valori delle coordinate canoniche (X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) , cioè nei pressi del punto di equilibrio triangolare che stiamo considerando. Infatti, basta tenere presente che è opportuno espandere in serie di Taylor anche la funzione coseno, perché la variabile Y libra attorno al valore 0, senza effettuare una rotazione completa, quando vengono studiati dei moti nei pressi di uno degli equilibri triangolari. L'espansione del termine che compare nell'ultima riga della formula (B.39) merita qualche ulteriore accortezza. È conveniente osservare che il radicando a denominatore è della forma $1 + u$, dove

$$(B.40) \quad u = (1 + X) \left[1 + X + 2 \cos \left(\pm \frac{2\pi}{3} + Y \right) \right] + Z^2 \\ = (1 + X) \left[X + \frac{\sqrt{3}}{2} Y + \frac{1}{4} Y^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} Y^3 + \mathcal{O}(Y^4) \right] + Z^2$$

è un infinitesimo per $(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) \rightarrow \mathbf{0}$. A questo punto, si comprende facilmente che l'espansione dell'Hamiltoniana (B.39) in serie di Taylor delle variabili canoniche può essere facilmente prodotta a partire dall'equazione seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u}} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} - \frac{5u^3}{16} + \mathcal{O}(u^4),$$

andandovi a sostituire l'espressione di u in funzione di X, Y e Z così come è stata descritta nella seconda riga della formula (B.40).

Ovviamente, la parte lineare dell'Hamiltoniana è nulla (altrimenti i punti di equilibrio L_4 , L_5 non sarebbero tali). Analogamente a quanto fatto in precedenza è conveniente concentrarsi sulla sola parte quadratica che descrive la dinamica nel piano orizzontale; nel caso del punto di equilibrio L_5 , la corrispondente Hamiltoniana è

$$H_0^{(X,Y)} = \frac{P_X^2}{2} + \frac{P_Y^2}{2} - 2XP_Y + \left(\frac{9\mu}{8} + \frac{1}{2}\right)X^2 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\mu XY - \frac{9\mu Y^2}{8}.$$

La matrice simmetrica \mathcal{Q} associata alla forma quadratica precedente è quindi tale che

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 + \frac{9}{4}\mu & -\frac{3\sqrt{3}}{4}\mu \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{4}\mu & -\frac{9}{4}\mu \end{pmatrix}.$$

Ovviamente, la matrice $J\mathcal{Q}$ è associata alle equazioni del moto linearizzate in prossimità di L_5 , dove J è la matrice fondamentale della geometria симплекtica, introdotta in sezione 1.1.3, formula (1.16). Con un po' di pazienza nel fare alcuni conti, si verifica che il polinomio caratteristico di $J\mathcal{Q}$ (cioè $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$) è esattamente lo stesso rispetto a quello relativo alla matrice A , quindi anche nel presente contesto valgono le equazioni (B.31)–(B.33). Gli autovalori associati alla linearizzazione delle equazioni del moto nei pressi dei punti di equilibrio triangolari sono, giustamente, proprio uguali a quelli determinati in sezione B.3.4.

Procedendo ancora come è stato fatto in precedenza, nel caso in cui $\mu < \mu^*$, si determina⁶⁷ una matrice \mathcal{U} associata alla seguente trasformazione canonica e lineare:

$$(P_X, P_Y, X, Y)^\top = \mathcal{U}(x_1, x_2, y_1, y_2)^\top,$$

che diagonalizza la parte quadratica dell'Hamiltoniana (B.30). Infatti, nelle nuove coordinate, essa assume la forma $H_0^{(x,y)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2)$, dove le velocità angolari ω_1 e ω_2 non sono altro che gli autovalori riportati in formula (B.33).

B.3.6 Il problema non lineare per i punti triangolari

Torniamo ora al problema spaziale. Lo studio del sistema non lineare può svolgersi facendo uso dello sviluppo in serie dell'Hamiltoniana nell'intorno di uno dei punti di equilibrio. Il caso di maggior interesse è evidentemente quello dei punti triangolari,

⁶ Anche nel presente contesto, sono utili le note esplicative consultabili all'indirizzo web: http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/MCSH/programmi/diag_sympL4oL5.pdf.

⁷ Sulla falsariga di quanto esposto nelle suddette note e nella presente sezione, è stato messo a punto il codice che effettua esplicitamente la diagonalizzazione della parte quadratica e calcola le espansioni dell'Hamiltoniana in coordinate (x_1, x_2, y_1, y_2) per il problema piano in cui i corpi primari hanno, rispettivamente, le masse del Sole e di Giove; tutto ciò è stato effettuato utilizzando *Mathematica* come ambiente di programmazione; tale codice è reperibile al seguente indirizzo web: http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/MCSH/programmi/esp+diag_L4oL5_SJ.mth.

proprio perché sono linearmente stabili, almeno per i valori di μ che soddisfano la condizione (B.31).

Il metodo di sviluppo si applica in generale a uno qualunque degli equilibri lagrangiani. Come abbiamo visto nel paragrafo B.3.1 l'Hamiltoniana può svilupparsi in serie di potenze come

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

dove H_s è un polinomio omogeneo di grado $s + 2$ nelle coordinate canoniche x, y, z, p_x, p_y, p_z . Il calcolo dello sviluppo può svolgersi ricorrendo ai polinomi di Legendre. L'espressione esplicita di H_0 è data dalla (B.17), mentre per $s > 0$ dovremo ricorrere alla (B.18). Tuttavia mantenere questa forma dello sviluppo non è molto utile: è necessario applicare la trasformazione che pone la parte quadratica dell'Hamiltoniana in forma normale. Il fatto di lavorare in variabili complesse o reali è questione che dipende dal metodo che si intende utilizzare. Veniamo ora al caso specifico dei punti triangolari, e supponiamo che la massa μ sia sufficientemente piccola perché l'equilibrio sia ellittico. La parte quadratica dell'Hamiltoniana si scrive

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}y^2 + Cxy + \frac{1}{2}z^2, \quad C = \pm \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$$

La trasformazione a forma normale reale per le variabili x, y, p_x, p_y si calcola mediante la matrice simplettica \mathcal{U} che induce la diagonalizzazione della parte quadratica. Per le variabili z, p_z ricorriamo invece alla (B.21), che in questo caso si riduce all'identità, perché $D = 1$. Denotando con x_j, y_j le nuove variabili canoniche avremo

$$(x, y, p_x, p_y)^\top = \mathbb{T}(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad z = x_3, \quad p_z = y_3.$$

Trascurando le costanti additive (che non hanno alcuna influenza sulla dinamica), otteniamo così che l'Hamiltoniana, che descrive la dinamica nei pressi di un punto di equilibrio triangolare, assume la forma seguente:

$$(B.41) \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=0}^{\infty} H_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dove $H_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è un polinomio omogeneo di grado $s + 2$ nelle coordinate canoniche $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$; inoltre, la parte quadratica è tale che

$$(B.42) \quad H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \omega_j (x_j^2 + y_j^2)$$

con

$$(B.43) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_3 = 1;$$

il segno negativo della seconda frequenza viene determinato dalla trasformazione alla forma normale reale, come accennato alla fine del paragrafo B.3.4. Dalla discussione effettuata nella precedente sezione B.3.5, si deduce immediatamente che

gli sviluppi dell'Hamiltoniana assumono esattamente la stessa forma (riassunta dalle formule (B.41)–(B.43)), anche quando essi vengono prodotti a partire da coordinate eliocentriche polari.

Il fatto che le frequenze non abbiano tutte lo stesso segno non è innocuo: proprio a causa di questo il problema della stabilità non lineare dei punti lagrangiani triangolari è ancora aperto. In effetti, se tutti i segni delle frequenze fossero concordi allora H_0 avrebbe un minimo nell'origine, e si potrebbe applicare un teorema di Dirichlet che garantisce la stabilità dell'equilibrio anche per il sistema non lineare. Ma i segni discordi delle frequenze implicano che l'origine non sia un punto di minimo per H_0 , e il teorema di Dirichlet non si applica. Per quanto possa sembrare sorprendente, lo studio del sistema non lineare presenta grosse difficoltà e non può dirsi concluso. Ma su questo punto dovremo tornare più avanti, quando avremo sviluppato i metodi analitici necessari.