

**Esercitazione sulla diagonalizzazione simplettica
di una Hamiltoniana quadratica con equilibrio ellittico
– Corso di Metodi Computazionali per Sistemi Hamiltoniani –**

Obiettivi generali dell'esercitazione: Studio della parte quadratica della Hamiltoniana nell'intorno di uno dei due punti di equilibrio equilateri del problema dei tre corpi, nel modello ristretto circolare piano. Calcolo della trasformazione simplettica che permette di porre tale approssimazione quadratica nella forma canonica usuale, cioè quella che evidenzia l'esistenza di una coppia di oscillatori armonici. Tale calcolo richiede di determinare preliminarmente alcuni opportuni autospazi, che sono utili per effettuare il procedimento di diagonalizzazione in *geometria simplettica*.

Descrizione del metodo di calcolo

La *geometria simplettica* nasce naturalmente nell'ambito della *meccanica Hamiltoniana* e, in particolare, ha strette relazioni con l'argomento delle *trasformazioni canoniche* per le variabili coordinate-momenti. In questo ambito, un problema classico è quello della *linearizzazione delle equazioni del moto vicino a un punto di equilibrio stabile* e della loro espressione in “forma normale” (o diagonale), che è quella associata a *un sistema di oscillatori armonici*. Nel seguito, introdurremo poche, ma fondamentali, nozioni teoriche che sono utili per portare a termine la “diagonalizzazione” (o, più estesamente, il calcolo della forma normale per un sistema di oscillatori armonici).

In termini molto rozzi, esiste una profonda analogia tra la geometria euclidea e quella simplettica, una volta che si sostituisce la matrice identità $2n \times 2n$ -dimensionale $\mathbf{I}_{2n}$ con la “matrice fondamentale della geometria simplettica” J . In ambito $2n$ -dimensionale, essa è definita come segue:

$$(1) \quad J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix},$$

dove la scrittura precedente deve essere intesa “a blocchi”, cioè $\mathbf{I}_n$ è la matrice identità $n \times n$ -dimensionale e, analogamente, $\mathbf{0}_n$ è la matrice $n \times n$ -dimensionale le cui componenti sono tutte uguali a zero. Ovviamente, consideriamo uno spazio di dimensione pari (cioè $2n$), perché ci accingiamo a studiare un problema geometrico che viene da un modello meccanico a n gradi di libertà.

Si dice che una matrice $2n \times 2n$ -dimensionale U è simplettica se essa è tale che

$$(2) \quad U^T J U = J.$$

Da quest'ultima definizione, si capisce che possiamo considerare le matrici simplettiche come “analoghe a quelle ortogonali”.

In ambito Hamiltoniano, la dinamica nei pressi di un punto di equilibrio stabile è abitualmente rappresentata (a meno di termini di ordini superiori) da una forma quadratica (ad esempio, nelle variabili $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ che qui di seguito sono entrambe n -dimensionali) del

tipo

$$(3) \quad \mathcal{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} X_i X_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} c_{i,j} X_i Y_{j-n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^n c_{i,j} Y_{i-n} X_j + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} c_{i,j} Y_{i-n} Y_{j-n} \right],$$

dove la matrice

$$\mathcal{Q} = (c_{i,j})_{i,j=1, \dots, 2n}$$

è *simmetrica* e soddisfa altre proprietà su cui ora non ci soffermiamo (anche perché saranno implicitamente enunciate in seguito).

Il procedimento di “diagonalizzazione” si propone di determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$, tale che nelle nuove coordinate $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ la forma quadratica $\mathcal{H}$ si trasforma in quella seguente:

$$(4) \quad h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\omega_j (x_j^2 + y_j^2)] ,$$

dove **non** effettuiamo la solita assunzione che le “velocità angolari di oscillazione” ω_j siano positive^[*] $\forall 1 \leq j \leq n$. Si ricordi che, proprio per la definizione di matrice simplettica, si può facilmente dimostrare che il legame tra le vecchie e le nuove coordinate, cioè $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, è proprio una trasformazione canonica. In altre parole, il procedimento di “diagonalizzazione” richiede di determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$, tale che

$$(5) \quad \mathcal{U}^T \mathcal{Q} \mathcal{U} = D ,$$

dove

$$(6) \quad D = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_1, \dots, \omega_n\} ,$$

cioè D è la matrice i cui elementi sono tutti uguali a zero, eccetto quelli lungo la diagonale, dove compaiono in sequenza gli elementi del vettore n -dimensionale $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ripetuti due volte.

Per determinare la suddetta matrice $\mathcal{U}$ che è simplettica e “diagonalizza” la forma quadratica associata a $\mathcal{Q}$, è utile calcolare dapprima gli autovalori della matrice $J\mathcal{Q}$ che sono gli stessi di JD e quindi sono tutti immaginari puri e a coppie complesse coniugate; cioè

$$(7) \quad \sigma(J\mathcal{Q}) = \{ \pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n \} ,$$

[*] Nel modello ristretto circolare piano del problema dei tre corpi, quando si studia l'approssimazione lineare delle equazioni di Hamilton nei pressi di uno dei due punti di equilibrio equilateri, allora una delle due velocità angolari è negativa (come vedremo nella prosecuzione del testo). Questo spiega perché **non** assumiamo che $\omega_j > 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$, come si effettua, ad esempio, quando si considera la dinamica di una catena di punti materiali connessi da molle.

dove $\sigma(J\mathcal{Q})$ indica lo spettro degli autovalori della matrice $J\mathcal{Q}$. È ben noto che, in generale, il calcolo di tutti gli autovalori e gli autovettori è assai semplice quando si sta lavorando all'interno di un ambiente messo a disposizione da, ad esempio, **Mathematica** oppure **Matlab**, ma non è affatto agevole, quando si sta utilizzando un linguaggio di programmazione e non si ha a disposizione alcuna libreria di software che tratta esautivamente la soluzione dei comuni problemi di algebra lineare. Per semplicità, *ci limitiamo al caso particolare del problema (con $n = 2$ gradi di libertà) che si incontra quando si studia l'approssimazione quadratica della Hamiltoniana nell'intorno di uno dei due punti di equilibrio equilateri del problema dei tre corpi, nel modello ristretto circolare piano*. In tal caso, le matrici $\mathcal{Q}$ e $J\mathcal{Q}$, rispettivamente associate alla forma quadratica (3) e al flusso Hamiltoniano indotto da $\mathcal{H}$, sono definite come segue:

$$(8) \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & \pm\gamma \\ 1 & 0 & \pm\gamma & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}, \quad J\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \mp\gamma \\ -1 & 0 & \mp\gamma & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove con i simboli $\pm$ e $\mp$ ci riferiamo, rispettivamente, al punto di equilibrio equilatero L_4 (con il segno riportato sopra) oppure a L_5 (con il segno inferiore); inoltre,

$$(9) \quad \gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu),$$

con $\mu \in (0, 1/2]$ che rappresenta (come al solito, quando si studia il modello dei tre corpi ristretto circolare piano) il rapporto tra la massa del più leggero dei corpi primari e la somma delle loro masse.

Quando si studia un problema con $n = 2$ gradi di libertà, allora i coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{2n}$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico $\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{j=0}^4 \alpha_j \lambda^j$ associato alla matrice $J\mathcal{Q}$ sono allora dati dalle seguenti formule:

$$(10) \quad \alpha_0 = \det(J\mathcal{Q}), \quad \alpha_1 = -\sum_{i=1}^4 \det M_i, \quad \alpha_2 = \sum_{1 \leq i \leq j < 4} \det \mathcal{M}_{i,j}, \quad \alpha_3 = -\text{Tr}(J\mathcal{Q}), \quad \alpha_4 = 1,$$

dove M_i è la matrice 3×3 -dimensionale che si ottiene togliendo a $J\mathcal{Q}$ la i -esima riga e la i -esima colonna; mentre, $\mathcal{M}_{i,j}$ è la matrice 2×2 -dimensionale che si ottiene togliendo ad M_i la j -esima riga e la j -esima colonna. Inoltre, come d'abitudine, gli operatori determinante e traccia sono stati rispettivamente denotati con $\det$ e Tr . La particolare struttura della matrice $J\mathcal{Q}$ (e dei suoi autovalori) è tale che $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, cioè il *polinomio caratteristico* $\mathcal{P}(\lambda)$ è *pari*. Di conseguenza, lo spettro $\sigma(J\mathcal{Q})$ degli autovalori può essere determinato risolvendo innanzitutto l'equazione di secondo grado

$$(11) \quad t^2 + \alpha_2 t + \alpha_0 = 0,$$

dove, nel caso particolare che la matrice $\mathcal{Q}$ sia proprio definita come in (8), si ottiene che

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_0 = \frac{27}{4}\mu(1-\mu).$$

Quando $\mu < \mu_R$, dove il valore critico di Routh è

$$(12) \quad \mu_R = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.03852,$$

allora è noto che lo spettro degli autovalori della matrice $J\mathcal{Q}$ è

$$(13) \quad \sigma(J\mathcal{Q}) = \{ \pm i\sqrt{-t_1}, \mp i\sqrt{-t_2} \},$$

dove $t_{1,2}$ sono le radici (entrambe negative) dell'equazione di secondo grado (11). Dal confronto delle equazioni (7) e (13), segue immediatamente che $\omega_1 = \sqrt{-t_1}$ e $\omega_2 = -\sqrt{-t_2}$.

Al fine di determinare la matrice simplettica $\mathcal{U}$ senza utilizzare i numeri complessi, consideriamo la matrice $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$ che ha come autovalori proprio i numeri reali negativi t_1 e t_2 , entrambi di molteplicità 2 (ne segue che $|\omega_1| \neq |\omega_2|$). La matrice $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$ in generale *non* è simmetrica, ma 4 suoi autovettori indipendenti formano una base in $\mathbf{R}^4$. Tali autovettori possono essere facilmente calcolati, ad esempio, nell'ambiente di lavoro messo a disposizione da **Mathematica**, facendo un'opportuna chiamata dell'istruzione **Eigenvectors**. Se invece si deve programmare autonomamente il calcolo di quegli autovettori, utilizzando il fatto che $|t_1| > |t_2| > 0$, questa proprietà ci permette di adattare il *metodo delle potenze* in modo da determinare due vettori indipendenti $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, tali che

(i) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$ associati all'autovalore $t_1 = -\omega_1^2$, cioè

$$(14) \quad J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1 = -\omega_1^2 \mathbf{v}_1, \quad J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_2 = -\omega_1^2 \mathbf{v}_2;$$

(ii) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono “normalizzati” in modo da soddisfare le seguenti equazioni:

$$(15) \quad \|\mathbf{v}_1\| = 1, \quad \mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 = -1,$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea;

(iii) l'antisimmetria della matrice J (che è evidente dalla definizione (1)) e la seconda equazione nella precedente formula (15) implicano immediatamente anche le seguenti relazioni:

$$(16) \quad \mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}_1 = 1.$$

Nell'obiettivo 5, che fa parte dello schema di un programma da scrivere in linguaggio **C** per la soluzione del presente problema (per gli interessati, si veda da pag. 8 in poi delle presenti note), verrà dettagliatamente descritto l'algoritmo del “*metodo delle potenze adattato*” in modo da determinare due autovettori relativi all'autovalore massimo (in valore assoluto) che soddisfano le suddette proprietà (i)–(iii).

Inoltre, il suddetto “*metodo delle potenze adattato*” può essere applicato anche alla matrice inversa di $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$ in modo da determinare due autovettori indipendenti $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$, che sono relativi all'autovalore massimo in valore assoluto (cioè $-1/\omega_2^2$) di $(J\mathcal{Q}J\mathcal{Q})^{-1}$ e soddisfano le seguenti proprietà:

(i') $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ sono autovettori di $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$ associati all'autovalore $t_2 = -\omega_2^2$, cioè

$$(17) \quad J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = -\omega_2^2 \mathbf{v}'_1, \quad J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_2 = -\omega_2^2 \mathbf{v}'_2;$$

(ii') $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ sono “normalizzati” in modo da soddisfare le seguenti equazioni:

$$(18) \quad \|\mathbf{v}'_1\| = 1, \quad \mathbf{v}'_1 \cdot J\mathbf{v}'_2 = -1;$$

(iii') conseguentemente, sono implicate anche le seguenti relazioni:

$$(19) \quad \mathbf{v}'_1 \cdot J\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 \cdot J\mathbf{v}'_2 = 0, \quad \mathbf{v}'_2 \cdot J\mathbf{v}'_1 = 1.$$

Si consideri ora la matrice

$$(20) \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}'_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}'_2 \end{pmatrix},$$

cioè $\mathcal{V}$ è la matrice che si ottiene mettendo nella prima colonna $\mathbf{v}_1$, nella seconda $\mathbf{v}'_1$, nella terza e nella quarta $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}'_2$, rispettivamente. È facile dimostrare^[⊕] che

$$\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}'_2 = 0;$$

quindi, dalla precedente catena di uguaglianze, dalle proprietà (i)–(iii), (i')–(iii') e dall'antisimmetria di J discende che la matrice $\mathcal{V}$ (formata da autovettori di $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$) è simplettica.

A partire da $\mathcal{V}$ è abbastanza facile determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$ che soddisfa l'equazione (5) e, quindi, “diagonalizza” la forma quadratica associata a $\mathcal{Q}$. A questo scopo, è conveniente osservare^[⊙] che

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_2 = 0;$$

^[⊕] Ad esempio, ci limitiamo a dimostrare che $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_1 = 0$, poiché il procedimento per provare le altre uguaglianze (cioè $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}'_2 = 0$) è analogo a quello che stiamo per descrivere. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_1 \neq 0$, allora possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (J\mathbf{v}'_1)] &= \mathbf{v}_1 \cdot (JJ\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = -\mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = -(\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) \\ &= (J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = (\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}'_1 = -(JJ\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}'_1 \\ &= \omega_1^2 [(J\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}'_1] = -\omega_1^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (J\mathbf{v}'_1)], \end{aligned}$$

dove abbiamo ripetutamente utilizzato sia la simmetria di $\mathcal{Q}$ che l'antisimmetria di J (cioè $\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}$ e $J^T = J^{-1} = -J$, rispettivamente). Siamo allora arrivati a concludere che $\omega_2^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (J\mathbf{v}'_1)] = \omega_1^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (J\mathbf{v}'_1)]$, ciò è palesemente assurdo, siccome abbiamo assunto che $|\omega_1| \neq |\omega_2|$ e $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}'_1 \neq 0$.

^[⊙] Un procedimento molto simile a quello descritto nella nota^[⊕], consente di provare anche che $\mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_2 = 0$. Anche in questo caso, è quindi sufficiente limitarsi a dimostrare che $\mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 = 0$. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 \neq 0$, allora possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1)] &= \mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = (\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = -(J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) \\ &= -(\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (J\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = (J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}\mathbf{v}_1) \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1) = -\omega_1^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1)], \end{aligned}$$

dove abbiamo nuovamente e ripetutamente utilizzato la simmetria di $\mathcal{Q}$ e l'antisimmetria di J . Siamo allora arrivati alla seguente conclusione assurda: $\omega_2^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1)] = \omega_1^2 [\mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{Q}\mathbf{v}'_1)]$, dove ricordiamo di aver precedentemente assunto che $|\omega_1| \neq |\omega_2|$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathcal{Q}\mathbf{v}'_1 \neq 0$.

siccome $\mathcal{Q}$ è simmetrica, allora possiamo affermare che la matrice $\mathcal{V}^T \mathcal{Q} \mathcal{V}$ ha la seguente forma quasi diagonale:

$$(21) \quad \mathcal{V}^T \mathcal{Q} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1,1} & 0 & \tilde{c}_{1,3} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{2,2} & 0 & \tilde{c}_{2,4} \\ \tilde{c}_{3,1} & 0 & \tilde{c}_{3,3} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{4,2} & 0 & \tilde{c}_{4,4} \end{pmatrix},$$

con $\tilde{c}_{1,3} = \tilde{c}_{3,1}$ e $\tilde{c}_{2,4} = \tilde{c}_{4,2}$ (perché $\mathcal{V}^T \mathcal{Q} \mathcal{V}$ eredita, evidentemente, la proprietà di simmetria da $\mathcal{Q}$). Al fine di porre $\mathcal{Q}$ in forma diagonale, bisogna introdurre anche la seguente matrice simplettica^[⊙]:

$$(22) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, dopo aver imposto che

$$(23) \quad \beta_1 = -\frac{\tilde{c}_{1,3}}{\tilde{c}_{1,1}} \quad \text{e} \quad \beta_2 = -\frac{\tilde{c}_{2,4}}{\tilde{c}_{2,2}}$$

(dove $\tilde{c}_{i,j}$, per opportune coppie di indici i e j , altro non sono che i coefficienti che compaiono in (21)), qualche calcolo matriciale permette di provare che

$$(24) \quad \mathcal{W}^T \mathcal{Q} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix},$$

dove la matrice simplettica^[⊖] $\mathcal{W}$ altro non è che

$$(25) \quad \mathcal{W} = \mathcal{V} \mathcal{L}.$$

L'ultimo passaggio mancante può essere effettuato grazie a una trasformazione di “dilatazione–compressione accoppiata” in direzione delle coordinate coniugate, cioè uti-

[⊙] Un semplice calcolo matriciale *diretto*, permette di dimostrare che $\mathcal{L}^T J \mathcal{L} = J$.

[⊖] In generale, il prodotto di matrici simplettiche è a sua volta simplettico. Infatti, se U e $\tilde{U}$ sono due generiche matrici tali che $U^T J U = J$ e $\tilde{U}^T J \tilde{U} = J$, allora possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze: $J = \tilde{U}^T (U^T J U) \tilde{U} = (\tilde{U}^T U^T) J (U \tilde{U}) = (U \tilde{U})^T J (U \tilde{U})$, quindi, per definizione, anche il prodotto $U \tilde{U}$ è una matrice simplettica.

lizzando la matrice simplettica^[⊗]

$$(26) \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} (d_3/d_1)^{1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (d_4/d_2)^{1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (d_1/d_3)^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (d_2/d_4)^{1/4} \end{pmatrix}.$$

Infatti, partendo dalla equazione (24), con alcuni semplici calcoli si ottiene che

$$(27) \quad \mathcal{U}^T \mathcal{Q} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1 d_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_1 d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_2 d_4} \end{pmatrix},$$

dove la matrice simplettica $\mathcal{U}$ (si riveda la nota a pie' pagina^[⊖]) è definita come segue:

$$(28) \quad \mathcal{U} = \mathcal{W} \mathcal{D}.$$

La proprietà fondamentale delle trasformazioni canoniche (quale, ad esempio, è il cambio di coordinate $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) è quella di preservare le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Di conseguenza, poiché lo spettro di $J\mathcal{Q}$ è dato da due coppie immaginarie $\pm\omega_1$ e $\mp\omega_2$ (si veda (13)), allora anche i modi normali di oscillazioni delle equazioni del moto per la Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ avranno periodi $2\pi/\omega_1$ e $2\pi/\omega_2$, ciò implica che gli elementi diagonali che compaiono nella formula (27) non possono che essere ω_1 e ω_2 , rispettivamente. Abbiamo quindi raggiunto il nostro scopo, cioè la determinazione di una matrice $\mathcal{U}$ tale da soddisfare le equazioni (5)–(6).

^[⊗] Anche in questo caso, un semplice calcolo matriciale *diretto*, permette di dimostrare che $\mathcal{D}^T J \mathcal{D} = J$.

**Schema di un programma da scrivere in linguaggio C allo
scopo di effettuare la diagonalizzazione simplettica di
una Hamiltoniana quadratica con equilibrio ellittico**

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio C che *calcola il secondo membro delle equazioni di Hamilton per il modello dei tre corpi ristretto circolare piano, in approssimazione lineare nei pressi di uno dei due punti di equilibrio equilateri*. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha quattro argomenti: due matrici A e B , il valore della dimensione effettiva n e, infine, una terza matrice C ; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il risultato del prodotto matriciale $C = A \cdot B$;
- (B) una *function* che ha tre argomenti: una matrice A , il valore della dimensione effettiva n e, infine, una seconda matrice B ; tale *function* restituisce (attraverso il terzo argomento) la trasposta della prima matrice $B = A^T$;
- (C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (C1) l'*input da tastiera* del valore del parametro μ , il quale deve essere sottoposto a test in modo tale che sia $0 < \mu < \mu_R$ (dove il valore critico di Routh è definito in (12)); qualora questa condizione non sarà verificata, allora μ dovrà essere reinserito correttamente;
 - (C2) l'*input da tastiera* del valore di un indice intero **risp**, il quale deve essere sottoposto a test in modo tale che sia $4 \leq \text{risp} \leq 5$; qualora questa condizione non sarà verificata, allora **risp** dovrà essere reinserito correttamente;
 - (C3) la definizione iniziale della matrice $\mathcal{Q}$, in accordo con quella riportata in formula (8); ovviamente, il segno che precede γ deve essere scelto in modo da riferirsi al caso del punto di equilibrio L_4 o a quello di L_5 quando l'indice **risp** (introdotto seguendo le precedenti richieste in (C2)) è rispettivamente uguale a 4 o a 5;
 - (C4) la definizione iniziale della "matrice fondamentale della geometria simplettica" J , in modo che essa rispetti l'equazione (1);
 - (C5) il calcolo della matrice $J\mathcal{Q}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;
 - (C6) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video della matrice $J\mathcal{Q}$ in modo che sia *esteticamente non disprezzabile*; ovviamente, il calcolo della matrice $J\mathcal{Q}$ *deve considerarsi ben riuscito* se tale matrice evidenzia proprio la struttura descritta in (8).

Alcuni consigli

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di NDIM per mezzo di una direttiva **#define**.

La scrittura del programma è enormemente facilitata se si ricorre al seguente "trucco": quando si deve decidere quanta parte della memoria deve essere destinata ad ospitare i vari elementi dei vettori e delle matrici, si effettuino dei "sovradimensionamenti" in modo tale da allocare sempre, rispettivamente, NDIM e NDIM $\times$ NDIM celle di memoria. Ciò nonostante, le istruzioni che permettono il calcolo dei valori dei componenti dei vettori e delle matrici verranno effettuate tenendo conto che la *dimensione effettiva* dello spazio vettoriale che stiamo considerando è $n = 2n \leq \text{NDIM}$.

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *function* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete). In particolare, parecchie *function* richieste da questa esercitazione fanno parte dei *file* `autovet.c` e `eq_grado_2.c`, che sono liberamente accessibili a partire dalla pagina web

<http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/LC1/diario.html>

In molti casi, quelle *function* possono essere copiate ed utilizzate (tali e quali esse sono) nel programma, la cui scrittura è richiesta dalla presente esercitazione; in altri casi, è necessaria qualche piccola modifica a una di quelle *function*, allo scopo di adattare alla presente contesto.

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^4$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico della matrice JQ . A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si includano nel programma tutte le *function* che sono necessarie per il calcolo del determinante di una matrice;
- (B) si includa una *function* che ha come argomenti una matrice `mat1`, due interi `n` e `m`, un'altra matrice `mat2`; all'interno di tale *function* gli elementi di `mat1` che hanno indici di riga e di colonna compresi tra 0 e `n - 1` vengano “ricopiati” sugli elementi di `mat2`, *ad eccezione di quelli che stanno sulla m-esima riga oppure sulla m-esima colonna*;
- (C) si proceda al calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^4$ così come sono definiti dalle equazioni in (10); si noti che la *function* descritta al punto (B) dovrà essere chiamata una volta per poter determinare le matrici M_i e due volte (una di seguito all'altra) per $\mathcal{M}_{i,j}$;
- (D) si stampino (in modo ordinato) sul video i valori dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^4$.

Il calcolo di tali coefficienti deve considerarsi ben riuscito se si ottiene che $\alpha_0 = [27\mu(1 - \mu)]/4$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha_4 = 1$, in accordo con la ben nota espressione del polinomio caratteristico associato a JQ per il particolare problema che si sta considerando (si veda, ad esempio, la formula (7.37), riportata nel cap. 7 degli “Appunti di Meccanica Celeste” del prof. A. Giorgilli).

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da calcolare gli autovalori della matrice JQ . A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si includa nel programma una *function* che ha cinque argomenti: i coefficienti a, b, c e due *puntatori* alle variabili x_1 e x_2 ; tale *function* calcola le soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ e restituisce un valore intero che è posto uguale a 1, 0 o -1 a seconda che le radici dell'equazione siano rispettivamente reali e distinte, uguali o con parte immaginaria diversa da zero; inoltre, al termine della esecuzione di tale *function*, i valori delle radici dell'equazione sono posti nelle variabili x_1 e x_2 ;
- (B) all'interno della *main function*, si calcolino le radici $t_{1,2}$ dell'equazione (11) grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;
- (C) all'interno della *main function*, si stampino sul video gli autovalori della matrice JQ nel formato $\pm i\sqrt{-t_1} \mp i\sqrt{-t_2}$. Successivamente, si ponga $\omega_1 = \sqrt{-t_1}$ e $\omega_2 = -\sqrt{-t_2}$, dove $|t_1| > |t_2|$.

Ovviamente, il calcolo di tali autovalori *deve considerarsi ben riuscito* quando accade che i valori di ω_1 e ω_2 sono uguali a quelli ben noti (riportati, ad esempio, a pag. 201 nel cap. 7 degli “Appunti di Meccanica Celeste” del prof. A. Giorgilli)

Obiettivo (intermedio) 4:

si integri il programma richiesto dall’obiettivo 3, in modo tale da calcolare una coppia di autovettori ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) della matrice $J\mathcal{Q}J\mathcal{Q}$, i quali soddisfano le proprietà (i)–(iii) descritte in precedenza. A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si includa una *function* che ha quattro argomenti: una matrice A , un vettore $\mathbf{v}$, il valore della dimensione effettiva $\mathbf{n}$ e un vettore $\mathbf{w}$; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il vettore risultato del seguente prodotto matrice per vettore $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$;
- (B) si includa una *function* che ha tre argomenti: due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, inoltre, il valore della dimensione effettiva $\mathbf{n}$; tale *function* restituisce il valore del prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$;
- (C) si scriva una *function* che ha due argomenti: un vettore $\mathbf{v}$ e il valore della dimensione effettiva $\mathbf{n}$; tale *function* restituisce il valore della norma euclidea di $\mathbf{v}$;
- (D) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e la dimensione effettiva $\mathbf{n}$ dei vettori stessi; all’atto della chiamata di tale *function* i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono solo tali che $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 \neq 0$; all’interno della *function* il vettore $\mathbf{v}_1$ viene ridefinito in modo che sia normalizzato, cioè viene posto uguale a $\mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$; inoltre, il vettore $\mathbf{v}_2$ viene ridefinito in modo tale che sia uguale a $-\mathbf{v}_2/(\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2)$; in altri termini, alla fine della chiamata di tale *function* i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ soddisfano la proprietà (ii) descritta in precedenza;
- (E) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: una matrice A , il valore della dimensione effettiva $\mathbf{n}$ e due vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$; tale *function* restituisce un autovalore e (attraverso i due ultimi argomenti) due corrispondenti autovettori indipendenti che soddisfano la proprietà (ii); il calcolo deve essere effettuato *adattando il metodo delle potenze* al caso di un autovalore massimo che ha sia la molteplicità algebrica che quella geometrica uguali a 2; si proceda così come descritto come ai seguenti punti (E1)–(E3);
 - (E1) si introducano le seguenti definizioni come (molto) rozze approssimazioni iniziali dell’autovalore (che d’ora innanzi chiamiamo λ) e dei corrispondenti autovettori: $\lambda = 0$, $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{\mathbf{n}}, \dots, 1/\sqrt{\mathbf{n}})$, $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{\mathbf{n}}, 1/\sqrt{\mathbf{n}}, \dots, 1/\sqrt{\mathbf{n}})$; inoltre, gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ siano subito ridefiniti grazie a un’opportuna *chiamata della function descritta al punto (D)*;
 - (E2) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (E21)–(E25) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (E3);
 - (E21) si ponga $\bar{\lambda} = \lambda$;
 - (E22) si (ri)calcolino i valori degli elementi del vettore $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1$, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (A)*;
 - (E23) si ricalcoli l’autovalore, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da porre $\lambda = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1$;
 - (E24) si riaggiornino i valori degli elementi dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nel modo seguente: si ponga $\mathbf{v}_1$ uguale a $\mathbf{w}_1$; si (ri)calcolino i valori degli elementi del vettore $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2$, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (A)* e poi si ponga $\mathbf{v}_2$ uguale a $\mathbf{w}_2$;

- (E25) si riaggiornino nuovamente i valori degli elementi dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (D);
- (E3) se l'errore relativo riguardante la determinazione dell'autovalore è significativamente maggiore dell'*errore di macchina*, cioè se si verifica che

$$\frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{|\lambda|} > 2n \times 10^{-16} ,$$

- allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (E21)–(E25);
- (F) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (A) dell'obiettivo 1;
- (G) all'interno della *main function*, si calcolino gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ corrispondenti all'autovalore *massimo* della matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (E);
- (H) all'interno della *main function*, anche grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A)–(C), si calcolino le seguenti quantità: $\|(JQJQ)\mathbf{v}_1 + \omega_1^2\mathbf{v}_1\|$, $\|(JQJQ)\mathbf{v}_2 + \omega_1^2\mathbf{v}_2\|$, $|\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 + 1|$ e le si stampino sul video *in formato esponenziale*. Ovviamente, la determinazione degli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ *deve considerarsi ben riuscita* se tali quantità sono tutte e tre al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Obiettivo 5:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 4, in modo tale da costruire la matrice *simplettica* $\mathcal{V}$. A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si includa nel programma una *function* che effettua il calcolo di una matrice inversa rispetto a una data, utilizzando il *metodo di Cramer*;
- (B) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice $(JQJQ)^{-1}$ grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (A);
- (C) all'interno della *main function*, si calcolino gli autovettori $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ corrispondenti all'autovalore *minimo* della matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (E) dell'obiettivo 5, avendo cura di inserire la matrice $(JQJQ)^{-1}$ tra gli argomenti;
- (D) all'interno della *main function*, anche grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A)–(C) dell'obiettivo 5, si calcolino le seguenti quantità: $\|(JQJQ)\mathbf{v}'_1 + \omega_2^2\mathbf{v}'_1\|$, $\|(JQJQ)\mathbf{v}'_2 + \omega_2^2\mathbf{v}'_2\|$, $|\mathbf{v}'_1 \cdot J\mathbf{v}'_2 + 1|$ e le si stampino sul video *in formato esponenziale*. Ovviamente, la determinazione degli autovettori $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ *deve considerarsi ben riuscita* se tali quantità sono tutte e tre al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*;
- (E) all'interno della *main function*, si definisca la matrice $\mathcal{V}$, in modo che essa rispetti l'equazione (20);
- (F) si verifichi che la matrice $\mathcal{V}$ è *simplettica*; a tale scopo, si proceda così come descritto ai seguenti punti (F1)–(F3);
 - (F1) si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{V}^T J \mathcal{V} - J$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1;
 - (F2) si calcoli il massimo elemento in valore assoluto tra quelli che compongono la matrice $\mathcal{V}^T J \mathcal{V} - J$;

- (F3) si effettui la stampa sul video *in formato esponenziale* del massimo elemento in valore assoluto tra quelli della matrice $\mathcal{V}^T J \mathcal{V} - J$.

Ovviamente, la verifica numerica che la matrice $\mathcal{V}$ è *simplettica* *deve considerarsi ben riuscita* se tale massimo elemento (in valore assoluto) è al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Obiettivo 6:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 5, in modo tale da costruire la matrice *simplettica* $\mathcal{W}$, tale che il prodotto matriciale $\mathcal{W}^T Q \mathcal{W}$ è della forma (24). A tal fine si può procedere come segue:

- (A) all'interno della *main function*, si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{V}^T Q \mathcal{V}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1;
- (B) all'interno della *main function*, si determinino i valori dei coefficienti β_1 e β_2 , che sono definiti in (23); inoltre, si introduca la matrice $\mathcal{L}$ in modo consistente con la formula (22);
- (C) sempre all'interno della *main function*, si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{W}^T Q \mathcal{W}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1; inoltre, si effettui una stampa sul video della matrice $\mathcal{W}^T Q \mathcal{W}$ in modo che sia *esteticamente non disprezzabile*.

Ovviamente, la determinazione della matrice $\mathcal{W}$ *deve considerarsi ben riuscita*, se gli elementi non diagonali di $\mathcal{W}^T Q \mathcal{W}$ sono circa dello stesso ordine di grandezza dell'*errore di macchina* o di poco superiori ad esso.

Obiettivo (finale) 7:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 6, in modo tale da costruire la matrice *simplettica* $\mathcal{U}$ che soddisfa le equazioni (5)–(6). A tal fine si può procedere come segue:

- (A) all'interno della *main function*, si introduca la matrice $\mathcal{D}$ in modo consistente con la formula (26);
- (B) all'interno della *main function*, si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{U} = \mathcal{W} \mathcal{D}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (A) dell'obiettivo 1;
- (C) sempre all'interno della *main function*, si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{U}^T Q \mathcal{U}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1; inoltre, si effettui una stampa sul video della matrice $\mathcal{U}^T Q \mathcal{U}$ in modo che sia *esteticamente non disprezzabile*.

Ovviamente, la determinazione della matrice $\mathcal{U}$ *deve considerarsi ben riuscita*, se sulla diagonale troviamo (due volte per ciascuno) dei valori circa uguali a ω_1 e ω_2 , mentre gli elementi non diagonali di $\mathcal{U}^T Q \mathcal{U}$ devono essere circa dello stesso ordine di grandezza dell'*errore di macchina* o di poco superiori ad esso. Si ricordi che i valori di ω_1 e ω_2 sono stati stampati sul video al termine dell'obiettivo 3.

- (D) Infine, si verifichi che la matrice $\mathcal{U}$ è *simplettica*; a tale scopo, si proceda così come descritto ai seguenti punti (D1)–(D3);
 - (D1) si effettui il calcolo della matrice $\mathcal{U}^T J \mathcal{U} - J$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function* descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1;

- (D2) si calcoli il massimo elemento in valore assoluto tra quelli che compongono la matrice $\mathcal{U}^T J \mathcal{U} - J$;
 - (D3) si effettui la stampa sul video *in formato esponenziale* del massimo elemento in valore assoluto tra quelli della matrice $\mathcal{U}^T J \mathcal{U} - J$.
- Ovviamente, la verifica numerica che la matrice $\mathcal{U}$ è simplettica *deve considerarsi ben riuscita* se tale massimo elemento (in valore assoluto) è circa dello stesso ordine di grandezza dell'*errore di macchina* o di poco superiore ad esso.