

Analisi in frequenza (Laskar dagli '80) in poi

Obiettivo: caratterizzare le leggi del
moto quasi-periodiche

Def.: Si dice che una legge del moto $t \mapsto f(t)$ (conf. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
quasi-periodica se $\exists g: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^m$ (t.c. -
 $\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0 \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$) t.c. -

$$f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Def.: Si dice che una legge del moto quasi-periodica è a decadimento esponenziale se (conf. alla def. precedente) la funz.

g è t.c. - $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{\vartheta}}$ e $\mathcal{F}A, \sigma \in \mathbb{R}_+$
 t.c. $|c_{\underline{k}}| \leq A e^{-|\underline{k}| \sigma}$

Oss. g è analitica -

Oss. Si consideri una legge del moto
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ dove $(p(t), q(t)) = \mathcal{C}(\underline{P} = \underline{0}, \underline{Q} = \underline{ut})$
 dove $\mathcal{C}$ è una transf. canonica corrisp. alla
 forma normale di Kolmogorov, allora
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ è quasi-periodica a decadimento
 esponenziale

Def.: Si dice che una funzione $w: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione peso se essa è analitica, periodica di periodo $2T$ ed è tale che $\frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt w(t) = 1$.

Es.: $w_p(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} \left(1 + \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right)^p$ sono funzioni

peso. Considereremo "filtro di Hamming":

$$w_1(t) = 1 + \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \Rightarrow w_1(t_0) = 2, w_1(t_0-T) = w_1(t_0+T) = 0$$

Def.: Si dice integrale fondamentale dell'analisi in frequenza il seguente: $A_j(\nu; \underline{p_0}, \underline{q_0}, t_0, T, w) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt p_1(t) \exp(i q_1(t) - \nu t) w(t)$

dove (p_0, q_0) sono cond. iniz. della legge del moto $t \mapsto (p(t), q(t))$
 $((p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n)$, cioè $p(t_0) = p_0, q(t_0) = q_0$ e $j = 1, \dots, n$
 numero dei gradi di libertà.

Analogamente se le variabili canoniche sono $\left(\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
 si def. $A_j(r; y_0, x_0, t_0, T, \omega) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \left(x_j(t) + i y_j(t) \right) e^{-i\omega t} \omega(t)$
 che è fortemente ispirato alla def. precedente,
 ricordando che $x_j = \sqrt{2} p_j \cos q_j, y_j = \sqrt{2} p_j \sin q_j$ è una
 transf. canonica.

$$\nu \mapsto A_j(\nu; \mathbb{P}_0, q_0, t_0, T, \omega)$$

lo pensiamo come una funzione che ci descrive un'ampiezza in corrispondenza a una frequenza ν , che è analoga a una radio.

Prop.: Sia $z: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{C}$ è una
 (*) funz. quasiperiodica a decadimento esponenziale,
 cioè $z(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} a_{\underline{k}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{\omega} t)$ dove $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^m$ (con $\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0$
 $\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$), $|a_{\underline{k}}| \leq c e^{-|\underline{k}| \sigma}$ (con c, σ positivi); sia

$w: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ una funt. peso,

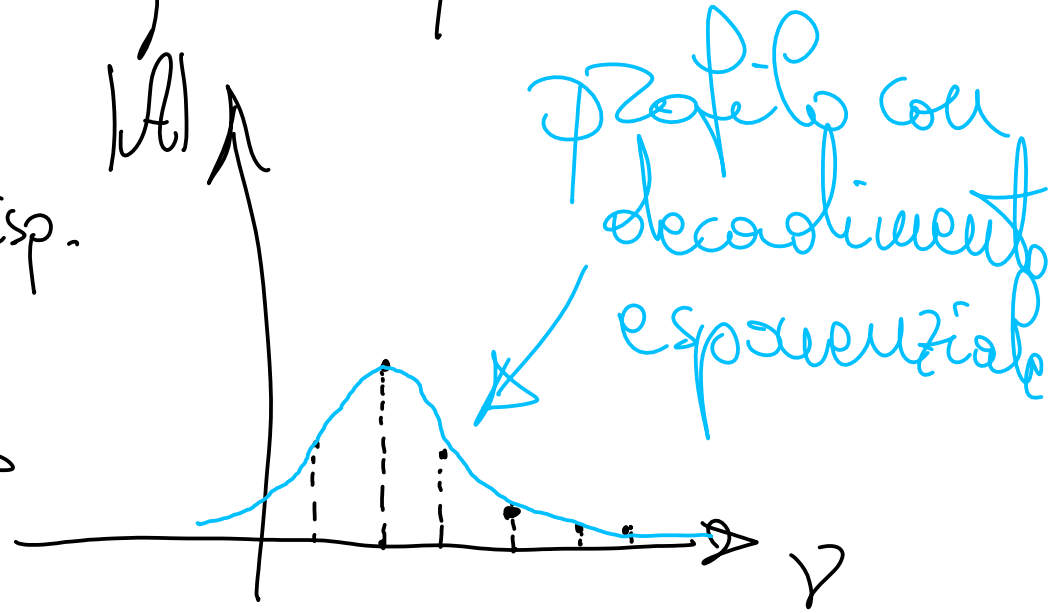
allora

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\gamma; T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} dt \, z(t) e^{-i\gamma t} w(t) dt$$

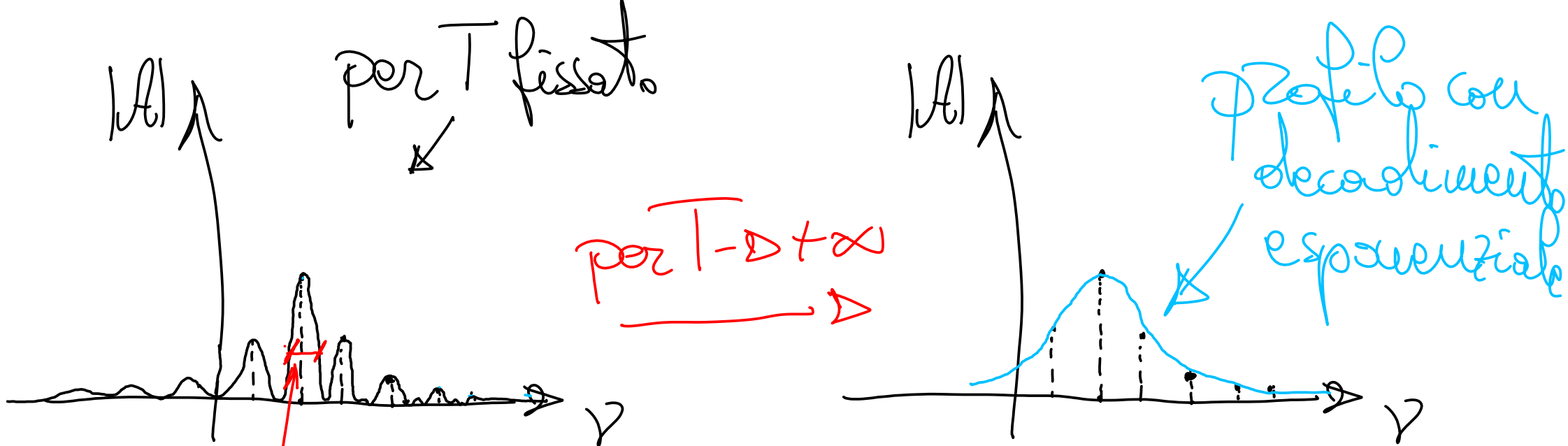
$$= \begin{cases} a_{\underline{k}^*} & \text{se } \gamma = \underline{k}^* \cdot \underline{\omega} \text{ per un fissato } \underline{k}^* \\ 0 & \text{se } \gamma \neq \underline{k} \cdot \underline{\omega} \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Lemma: $w(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}} b_{\underline{k}} \exp\left(i \underline{k} \cdot \frac{\underline{\omega}}{T} t\right)$ ← esp. in serie di Fourier con
 con $b_0 = 1$ comp. il cui periodo è multiplo di $T \Rightarrow$ comp. $n \cdot \frac{2\pi}{T}$
 oppure $n \cdot \frac{2\pi}{T}$

Quindi per segnali quasi-periodici
 avremo che l'aspetto
 del grafico della risposta A in corrisp.
 alla frequenza γ sarà del
 tipo quasi destra —
 nel limite di $T \rightarrow +\infty$ —



Oss. per T fissato la legge $\gamma \mapsto A(\gamma)$ è
 una funz. analitica (per leggi del moto quasi-
 periodiche con legge di decadimento esponenziale)



l'ampiezza dei picchi
tende a zero per $T \rightarrow +\infty$

Oss.: Sia $z: [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ una funt. periodi-
ca e continua, sia $w_c: [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ una
funt. pos., allora il "segnale" $z(t)w(t)$ ammette

La rapp. in serie di Fourier

$$z(t)w_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i k \frac{\pi t}{T}}$$

$$\text{dove } c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \, z(t) w_e(t) e^{-i k \frac{\pi t}{T}}.$$

$$\Rightarrow c_k = A\left(\frac{k\pi}{T}; z(0), 0, T, w_e\right)$$

$\swarrow$ $\overset{=t_0}{}$

I coefficienti della serie di Fourier seguono
da discretizzazione dell'integrale fond. dell'
analisi in frequenza.

Siamo interessati ai punti di massimo
della funzione $\nu \mapsto |A_j(\nu; t_0, T, \vec{p}_0, q_0, \omega_c)|^2$
che raccogliamo nell'insieme

$$P_{j,T} := \left\{ \nu^* \in \mathbb{R} : \exists p^* t. \forall \nu \in B(p^*) \setminus \{\nu^*\}, \right. \\ \left. |A_j(\nu; \dots)|^2 < |A_j(\nu^*; \dots)|^2 \right\}$$

Dalla Proposizione (■) segue che, se
stiamo studiando un segnale quasi-periodico
a decadimento esponenziale $(p_j(t) e^{i q_j(t)}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{i \underline{k} \cdot \underline{\omega} t}$,

con $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ vett. di vel. esp. fond. e $\exists a > 0, \sigma > 0$ t.c. $\frac{|c_k|}{\sigma} \leq a e^{\frac{1}{4} k_0}$
 allora $P_{j,T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \left\{ \gamma = \underline{k} \cdot \underline{w} : \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \right\}$

Proposizione: Si consideri $t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$ segnale
 quasi-periodico a decad. esp. $\left(z(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} c_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{w} t} \right)$.

Siano $\gamma^* = \underline{k}^* \cdot \underline{w}$ per un qualche $\underline{k}^* \in \mathbb{Z}^m$ e p.t.c.
 γ^* è p.to di max. assoluto in $B_{\rho^*}(\gamma^*)$ della funz.

Ciò $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| A(\gamma; t_0, T, z_0, w_0) \right|^2$ introduce
 γ_T p.to di max. assoluto in $B_{\rho^*}(\gamma^*)$ della funz. $\left| A(\cdot; t_0, T, z_0, w_0) \right|^2$

$B_p^*(\gamma^*)$, sussiste la seguente relazione
 asintotica $|v_T - \gamma^*| = \frac{\left(\overset{p \geq 1}{\text{costanti}}\right)^p \cdot (p!)^2}{T^{2p}} + o\left(\frac{1}{T^{2p}}\right)$
 per $T \rightarrow +\infty$.
 $= \gamma_\infty$

Oss. nella proposizione prec. c'è una
 dip. forte da p che è l'indice di W_p , dove

$$W_p(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(t-t_0)}{T}\right) \right)^p$$

Oss.: Per T fissato se calcoliamo $\lim_{p \rightarrow +\infty} |v_T - \gamma^*| = +\infty$.

Oss.: Per ρ fissato, ovviamente, $|v_T - v^*| \sim \frac{1}{T^{2e}}$
per $T \rightarrow +\infty$.

Tipicamente, si sceglie $w_1 = 1$ o (più frequen-
tamente), $w_2 = 1 + \cos\left(\frac{\pi(t-t_0)}{T}\right)$ il quale dà
una legge di convergenza $O\left(\frac{1}{T^4}\right)$ dei p.t. di max.
rel.

Invece, usando semplicemente i coef. di Fourier
darebbe una convergenza che $O\left(\frac{1}{T}\right)$.

L'algoritmo di calcolo dell'analisi in frequenza è basato sul seguente approccio:

- Appr. iniz. dei p.ti di max. con la FFT
- A partire dall'appr. iniz. prec. - si determina
il p.to di max. di $|A(\cdot; t_0, T, z_0, u_0)|^2$
con un metodo alla Newton -

- Discriminare i moti quasi-periodici
da quelli caotici (metodo 1)

Si studia la variazione delle frequenze (vedi fig. 10 qui sotto).

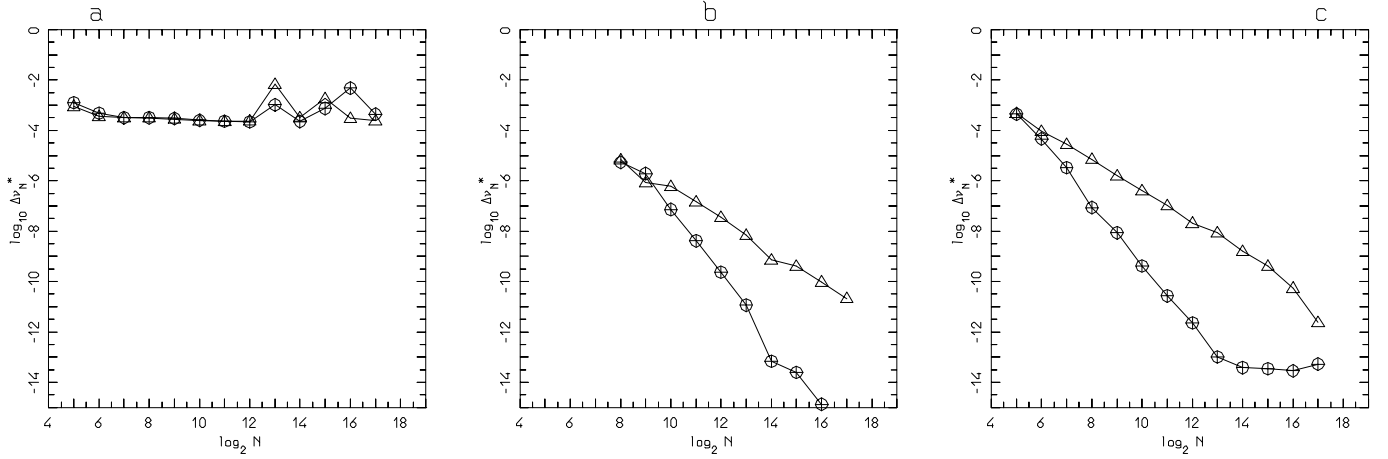


Figura 10. Studio della variazione rispetto al tempo iniziale del punto di massimo ν^* dell'integrale fondamentale dell'analisi in frequenza. Sono state considerate 3 diverse orbite della standard map: in figura 10a viene presa in esame un'orbita situata nella *zona caotica* della risonanza $34/55$ quando $\varepsilon = 0.97$ (vedi fig. 8c); la figura 10b si riferisce alla *catena di 8 isole di librazione* attorno all'orbita periodica di frequenza $1/2$ che si può facilmente osservare in fig. 2 (per cui $\varepsilon = 0.9$); infine, la figura 10c è relativa al *toro invariante* di frequenza $(\sqrt{5}-1)/2$ che è visibile sempre in fig. 2. Ciascuna delle orbite è stata calcolata dalla propria condizione iniziale (x_0, y_0) a $(x_{N_{TOT}}, y_{N_{TOT}})$, dove $N_{TOT} = 2^{18}$ punti. In grafico sono riportati i valori del logaritmo degli scarti medi $\log_{10} \Delta \nu_N^*$ in funzione di $\log_2 N$, dove N è il numero di punti dei sottoinsiemi in cui vengono suddivise tutte le iterazioni della standard map che sono state calcolate a partire dalla condizione iniziale; le definizioni complete sono riportate lungo il testo e nella (29). I simboli Δ e $\oplus$ indicano che il calcolo dell'integrale fondamentale dell'analisi in frequenza è stato effettuato rispettivamente con le funzione peso $\mathcal{W}_0(t) = 1$ e $\mathcal{W}_1(t) = 1 + \cos(\pi(t - t_0)/T)$.

In realtà, è lecito aspettarsi che $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta \nu_N^* = 0$ anche per quanto riguarda la separatrice; infatti, la risonanza $1/2$ costituisce la componente principale del moto per tutte le orbite che sono racchiuse dalla zona caotica esterna disegnata in 11a. Per il momento, limitiamo la discussione a un livello *intuitivo*: possiamo immaginare che la velocità angolare che corrisponde al massimo assoluto dell'integrale fondamentale dell'analisi in frequenza tenga conto della risonanza $1/2$ e quindi sia costante “all'interno della zona risonante” (ciò sarà confermato nel sottoparagrafo 4.3.3); allora, in questo caso dobbiamo estendere il nostro studio anche agli altri punti di massimo relativo per poter sperare di riconoscere la caoticità del moto. Ricordiamo che la proposizione 3 si riferisce a un qualsiasi punto di massimo relativo; quindi, affinché un moto sia quasi-periodico, è necessario che sia verificata l'uguaglianza $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta \nu_N^* = 0$ *per tutti i punti di massimo relativo*, dove possiamo adattare le definizioni (29) in modo ovvio.

4.3.2 Scomposizione del segnale di entrata

La discussione alla fine della sezione precedente mostra chiaramente la necessità di considerare non solo la componente del moto associata al punto di massimo assoluto, ma

Ad esempio si può confrontare i p.ti
di max v_T presi su 2 intervalli consecutivi:

$$[t_0 - T, t_0 + T], [t_0^* - T, t_0^* + T]$$

con $t_0 = -T$, sono $[-2T, 0]$ e $[0, 2T]$, quindi
e $t_0^* = +T$

$$\text{calcoliamo } |v_{T; t_0} - v_{T; t_0^*}| \leq |v_{T; t_0} - v^*| + |v_{T; t_0^*} - v^*|$$

$$\lesssim O\left(\frac{1}{T^{2e}}\right)$$

è una relazione che vale se il segnale è di tipo quasi-periodico.

Invece, per moti caotici non si osserva la convergenza della differenza $|v_{T;t_0} - v_{T;t_0^*}|$ a zero per $T \rightarrow +\infty$

Metodo 2: decomposizione del segnale

Abbiamo
$$z^{(0)}(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{\omega} t}$$

Lo $\underline{0}$ indica che è il segnale iniziale

Si procede iterativamente per la ricerca dei max.

cioè • Da $z^{(0)}(t)$ si calcola $\tilde{c}_j$ con $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} + 1$ della
 rapp. in serie di Fourier $z^{(0)}(t) \sim \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \tilde{c}_j \exp(i \frac{j \pi}{T} (t-t_0))$, dove

$N = 2T/\Delta$ e Δ è l'intervallo di campionamento del segnale. Il calcolo lo fa la FFT. Si determina j corrisp. a $|\tilde{c}_j|$ è max. tra i coef.

- Si cerca il p.to di max. assoluto $\nu_T^{(1)}$ di $A(\cdot; t_0, T, \dots)$ a partire dalla sua appor. $\nu_j = \frac{\pi j}{T}$, con un metodo alla Newton.

- Dopo aver determinato $\nu_T^{(1)}$ si calcola $c^{(1)} = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \, z(t) \exp(-i \nu_T^{(1)} t) \psi_e(t)$

Per iterare, si ricordi che

$$c^{(1)} = \langle z, e^{i\gamma_T^{(1)} t} \rangle_{\omega_e}$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega_e}$ prodotto scalare su $L^2([t_0-T, t_0+T])$

Si osserva che $\langle e^{i\gamma_T^{(1)} t}, e^{i\gamma_T^{(1)} t} \rangle_{\omega_e} = 1$ -

Consideriamo

$$z^{(1)} = z^{(0)} - \langle z^{(0)}, e^{(0)} \rangle_{\omega_e} e^{(0)} \quad \text{con}$$

$e^{(0)} = e^{i\gamma_T^{(1)} t}$ primo vettore della base ortogonale che andiamo a costituire -

Si itera come segue:

Sia $z^{(s-1)}$ il vettore dopo che sono state determinate (e sottratte al vettore iniziale) le prime $s-1$ componenti rispetto alla base ortogonale $e_1, \dots, e_{s-1}$.

Si determini

$$z^{(s)} = z^{(0)} - z^{(0)} \perp \text{Span}(e_1, \dots, e_{s-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \langle z^{(0)}, e_j \rangle e_j$$

Si determina $v_T^{(2)}$ p.to di max. assoluto
 per il segnale $z^{(s)} \Rightarrow v_T^{(s)} \neq v_T^{(j)} \forall j=1, \dots, s-1$.
 $\Rightarrow e^{i v_T^{(s)} t} \notin \text{Span}(e^{i v_T^{(1)} t}, \dots, e^{i v_T^{(s-1)} t})$

$e_1, \dots, e_{s-1}$ sono ch. doppia base ortogonale
 ottenuto da $e^{i v_T^{(1)} t}, \dots, e^{i v_T^{(s-1)} t}$ grazie a Gram-Schmidt
 $\Rightarrow$ da $e^{i v_T^{(s)} t}$ si determina e_s -