

Analisi in frequenza (Laskar dagli '80) _{in poi}

Obiettivo: caratterizzare le leggi del
moto quasi-periodiche

Def.: Si dice che una legge del moto $t \mapsto f(t)$ (conf. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
quasi-periodica se $\exists g: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^m$ (t.c. -
 $\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0 \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$) t.c. -

$$f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Def.: Si dice che una legge del moto quasi-periodica è a decadimento esponenziale se (conf. alla def. precedente) la funz.

g è t.c. - $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{\vartheta}}$ e $\mathcal{F}A, \sigma \in \mathbb{R}_+$
 t.c. $|c_{\underline{k}}| \leq A e^{-|\underline{k}| \sigma}$

Oss. g è analitica -

Oss. Si consideri una legge del moto
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ dove $(p(t), q(t)) = \mathcal{C}(\underline{p} = \underline{0}, \underline{q} = \underline{ut})$
 dove $\mathcal{C}$ è una transf. canonica corrisp. alla
 forma normale di Kolmogorov, allora
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ è quasi-periodica a decadimento
 esponenziale

Def.: Si dice che una funzione $w: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione peso se essa è analitica, periodica di periodo $2T$ ed è tale che $\frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt w(t) = 1$.

Es.: $w_p(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} \left(1 + \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right)^p$ sono funzioni

peso. Considereremo "filtro di Hamming":

$$w_1(t) = 1 + \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \Rightarrow w_1(t_0) = 2, w_1(t-T) = w_1(t+T) = 0$$

Def.: Si dice integrale fondamentale dell'analisi in frequenza il seguente: $A(\nu; \underline{p}, \underline{q}, t_0, T, w) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt p_1(t) \exp(i q_1(t) - \nu t) w(t)$

dove (p_0, q_0) sono cond. iniz. della legge del moto $t \mapsto (p(t), q(t))$
 $((p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n)$, cioè $p(t_0) = p_0, q(t_0) = q_0$ e $j = 1, \dots, n$
 numero dei gradi di libertà.

Analogamente se le variabili canoniche sono $\left(\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
 si def. $A_j(r; y_0, x_0, t_0, T, \omega) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \left(x_j(t) + i y_j(t) \right) e^{-i\omega t} \omega(t)$
 che è fortemente ispirato alla def. precedente,
 ricordando che $x_j = \sqrt{2p_j} \cos q_j, y_j = \sqrt{2p_j} \sin q_j$ è una
 transf. canonica.

$$\nu \mapsto A_j(\nu; \mathbb{P}_0, q_0, t_0, T, \omega)$$

lo pensiamo come una funzione che ci descrive un'ampiezza in corrispondenza a una frequenza ν , che è analoga a una radio.

Prop.: Sia $z: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{C}$ è una funz. quasiperiodica a decadimento esponenziale, cioè $z(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} a_{\underline{k}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{\omega} t)$ dove $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^m$ (con $\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0$ $\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$), $|a_{\underline{k}}| \leq c e^{-|\underline{k}| \sigma}$ (con c, σ positivi); sia

$w: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ una funt. peso,

allora

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\gamma; T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} dt \, z(t) e^{-i\gamma t} w(t) dt$$

$$= \begin{cases} a_{\underline{k}^*} & \text{se } \gamma = \underline{k}^* \cdot \underline{\omega} \text{ per un fissato } \underline{k}^* \\ 0 & \text{se } \gamma \neq \underline{k} \cdot \underline{\omega} \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Lemma: $w(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}} b_{\underline{k}} \exp\left(i \underline{k} \cdot \frac{\underline{\omega}}{T} t\right)$ ← esp. in serie di Fourier con
 con $b_0 = 1$ comp. il cui periodo è multiplo di $T \Rightarrow$ comp. $n \cdot \frac{2\pi}{T}$

Dim. con scrittura con l'esp. in serie è possibile perché w è analitica e di periodo $2T$.

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} b_{k_0} e^{\frac{ik_0 \pi t}{T}} = \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} b_{k_0} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt e^{\frac{ik_0 \pi t}{T}} \\
 &= b_0 \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt + \sum_{k_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} b_{k_0} \frac{T}{2T i k_0 \pi} \left[e^{\frac{ik_0 \pi}{T}(t_0+T)} - e^{\frac{ik_0 \pi}{T}(t_0-T)} \right] \\
 &= b_0 + \sum_{k_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{b_{k_0} e^{\frac{ik_0 \pi t_0}{T}}}{2 i k_0 \pi} \left[e^{ik_0 \pi} - e^{-ik_0 \pi} \right] = b_0.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_0 = 1.$$

C.U.D.

Dim. (della proposizione): Calcoliamo

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\nu; T) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{m+1}} a_{\underline{k}} b_{k_0} \exp\left[i\left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + k_0 \frac{\pi}{T}\right)t\right]$$

Oss. che $\sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{m+1}} |a_{\underline{k}} b_{k_0}| = \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} |b_{k_0}| \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\underline{k}}|$

$$\leq \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} |b_{k_0}| \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{|\underline{k}|=s} e^{-s\sigma} \leq 2 \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} |b_{k_0}| \sum_{s=0}^{+\infty} e^{-s\sigma} \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} 1$$

$$\leq \text{cost.} \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} |b_{k_0}| \sum_{s=0}^{+\infty} \pi^s \quad \text{con } \pi < 1 < +\infty$$

Oss. che $\int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} |a_{k_0} b_{\underline{k}}| < +\infty$

$\Rightarrow$ possiamo scambiare $\int$ e $\sum$.

$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\nu; T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} \frac{b_{k_0} a_{\underline{k}}}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) t \right],$

dove abbiamo la conv. unif. della $\sum$ risp. a T ,
poiché $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} \left| \frac{b_{k_0} a_{\underline{k}}}{2T} \cdot 2T \right| = \sum_{(k_0, \underline{k})} |b_{k_0}| |a_{\underline{k}}| < +\infty$

$\Rightarrow$ possiamo scambiare $\lim$ e $\sum$.

Abbiamo quindi che

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\nu; T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} a_{\underline{k}} b_{k_0} \exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) t \right]$$

$$= \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} a_{\underline{k}} b_{k_0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) t \right]$$

$$= \sum_{(k_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} a_{\underline{k}} b_{k_0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \frac{\exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) t_0 \right]}{i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right)}$$

$$\left\{ \exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) T \right] - \exp \left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T} \right) T \right] \right\}$$

$$= \sum_{(\underline{k}_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{m+1}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\exp[i(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu + \frac{k_0 \pi}{T})t_0]}{(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu)T + k_0 \pi} \sin((\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu)T + k_0 \pi)$$

dove i passaggi precedenti valgono se $(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu)T + k_0 \pi \neq 0$

Supponiamo che $\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu \neq 0 \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m$

$\Rightarrow$ per T grande abbastanza abbiamo $(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \nu)T + k_0 \pi \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \pm \infty$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\exp[i(\frac{\epsilon R}{T})] \cdot \sin(\frac{\epsilon R}{T})}{T + \infty} = 0$$

Supponiamo che $\exists \underline{k}^* \text{ t.c. } \underline{k}^* \cdot \underline{\omega} = \nu$ e consideriamo il

• Sottocaso $k_0 \neq 0$, allora abbiamo che

$$\left(\underline{k}^* \cdot \underline{\omega} - \gamma \right) T + k_0 \pi \neq 0$$
 e dobbiamo considerare

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\gamma, T) = \sum_{(\underline{k}_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} a_{\underline{k}} b_{\underline{k}_0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{e^{i \frac{k_0 \pi}{T} t_0}}{k_0 \pi} \sin\left(\frac{k_0 \pi}{T}\right) = 0$$

• Rimane il caso $\underline{k}^* \cdot \underline{\omega} = \gamma$, con sottocaso $k_0 = 0$,

allora
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} A(\gamma, T) = \sum_{(\underline{k}_0, \underline{k}) \in \mathbb{Z}^{u+1}} a_{\underline{k}} b_{\underline{k}_0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt \exp\left[i \left(\underline{k} \cdot \underline{\omega} - \gamma + \frac{k_0 t}{T} \right) T\right]$$

si annulla sempre tranne quando
$$= b_0 a_{\underline{k}^*} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} dt = a_{\underline{k}^*} \text{ C.V.D.}$$

Quindi per segnali quasi-periodici
avremo che l'aspetto
del grafico della risposta A in corrisp.
alla frequenza γ sarà del
tipo quasi destra —
nel limite di $T \rightarrow +\infty$ —

