

Lemma: Siano $f \in \mathcal{P}_{e,sk}$, $g \in \mathcal{P}_{e',s'k}$, dove
 $e, s, e', s', k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, allora $\{f, g\} \in \mathcal{P}_{e+e'-1, (s+s')k}$

Si verifica facilmente che $\varepsilon_{fe}^{sd(z,s)} \in \mathcal{P}_{e,sk}$
ad ogni passo z , se ciò è vero inizialmente
(per $z=0$).

Quinto 2-esimo passo di normalizzazione

- Puno wezpa

$$H^{(s-2)} = \sum \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{wzwp} \\ \begin{array}{c} \text{H}^{(s-2)} \\ \text{wzwp} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Eq. omologica $\varepsilon^2 L_{X^{(2)}} \underline{\omega} \cdot \underline{f} + \varepsilon^2 f_0 = \varepsilon \langle f_0 \rangle$

si risolve come al primo passo e

otteniamo $X^{(2)} = \sum_{0 < |k| \leq 2K} \frac{c_k}{i \underline{k} \cdot \underline{\omega}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$

↑ costante

piccolo divisore

sviluppo di $f_0^{(2-1,2)}$

Definiamo $\hat{H}^{(2)} = \exp \varepsilon^2 L_{X^{(2)}} H^{(2-1)}$

dove $X_1^{(2)}(\underline{q}) = X^{(2)}(\underline{q}) + \sum_{\underline{k}} \cdot \underline{q}$ dove il secondo termine trasforma le azioni in modo da tenere $\underline{\omega}$ costante!

In generale $\varepsilon^2 \left\langle f_1^{(z-1,2)} \right\rangle = \varepsilon^2(\Delta \underline{\omega}) \cdot \underline{f} \neq 0$

$\uparrow$
 vettore $\in \mathbb{R}^n$

Potremmo $\underline{\xi}^{(z)} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\varepsilon^2 \left\langle \underline{\xi}^{(z)} \cdot \underline{f}_2^{(z-1,0)} + \varepsilon^2 \left\langle \underline{f}_1^{(z-1,2)} \right\rangle = 0$$

matrice $n \times n$ lineare
simmetrica

$$\varepsilon^2 \left\langle \underline{f}_2^{(z-1,0)}, \underline{\xi}^{(z)} \right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \frac{1}{2} \underline{f} \cdot \underline{C} \underline{f}, \underline{\xi}^{(z)} \right\rangle = -\varepsilon^2 \underline{C} \underline{\xi}^{(z)}$$

$$\Rightarrow \underline{C} \underline{\xi}^{(z)} = \Delta \underline{\omega} \Rightarrow \underline{\xi}^{(z)} = \underline{C}^{-1} \Delta \underline{\omega}$$

deve essere invertibile $\underline{C} = \text{Hess} \left(\rho^{(0,0)} \right)_{\underline{f}_2}$

[illegible]

$$\text{pâché } \langle f \rangle = \langle \epsilon \rangle + \epsilon \langle f \rangle$$

Secondo mezzo passo ^{dell'z-esimio passo} di normalizzazione.

$$\text{Eq. analogica } \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \varepsilon^2 \hat{p}_1^{(z-1, z)} = 0$$

Si risolve esattamente come quando $z=1$

$$\text{Definiamo } H^{(z)} = \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} H^{(z-1)} = \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z-1)}} H^{(z-2)}$$

- Schema di rappresentazione grafica di

$$H^{(z)} = \sum_{\substack{O(p) \\ O(\varepsilon)}} O(p) \underline{\omega} \cdot \underline{p} \quad \begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} O(p) \\ \downarrow \\ O(\varepsilon) \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,0)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} p^{(2,z-1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,z)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,z+1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} O(p) \\ \downarrow \\ O(\varepsilon) \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,0)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} p^{(2,z-1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,z)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(2,z+1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Oss.: $H^{(z)}$ è in forma normale di Kolmogorov fino a termini $O(\varepsilon^z)$ (compresi).
 Il teorema KAM può essere dimostrato verificando che $H^{(z)} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} K$ (in forma normale di Kolmogorov)

Teorema (KAM): Sia $H(\underline{p}, \underline{q}; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(\underline{p}, \underline{q})$

con $H_0(\underline{p})$ della forma $H_0 = \underline{\omega} \cdot \underline{p} + O(\|\underline{p}\|^2)$, t.c.

è analitica $G_r \times T_\tau \times B_\rho(0)$ e con norma di Fourier pesata finita e inoltre

- $\underline{\omega}$ dissonante $|\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \geq \frac{\gamma}{|\underline{k}|^\tau}$ per qualche $\gamma > 0, \tau \geq n-1$

- $\det(\text{Hess } H_0) \neq 0 \quad \forall \underline{p} \in G_r$

- $|\varepsilon| < \varepsilon^*(H, r, \tau, \gamma, \rho)$

valore di soglia

Allora $\exists$ una transf. ^{analitica} canonica $(\underline{p}, \underline{q}) \mapsto \mathcal{C}_\varepsilon(\underline{P}, \underline{Q})$

t.c. $H(\mathcal{C}_\varepsilon(\underline{P}, \underline{Q})) = \underline{\omega} \cdot \underline{P} + O(\|\underline{P}\|^2)$ e $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathbb{I} + O(\varepsilon)$.

Tutte le ipotesi dell' $\mathcal{P}'$ enunciato precedenti

① Regolarità analitica della fluenza può essere sostituita dalla richiesta che sia $\mathcal{C}^k$.

② la cond. di fattore può essere rilassata.

③ Si può rilassare anche la non-degenerazione.

④ Le ipotesi di applicabilità della dim. pura, mentre analitiche del teorema KAM sono estr. restrittive (oss. di fluenza che mostra che la versione di

Arredo del th. KAM non si applicherebbe a
un modello a 3 corpi ristretto del sist. Sole,
Giove, Saturno anche se le masse dei
pianeti fossero sostituite da quelle di 2 neutroni)
Come dim. computer-assisted si arriva
all'applicazione a modelli realistici.

Oss. (di Kolmogorov): anche se l' enunciato
è per un solo fissato $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ siccome la
cond. di f. è quella generica (in misura il
complem. è nullo) allora il th. KAM copre
l'esistenza di tutti i dif. per ε abbastanza piccoli.

Dentro la dia. (cenni)

L'algoritmo di costruzione della forma usuale di Kolmogorov converge in modo classico, cioè le generazioni sono $O(\varepsilon)$ al passo 1, $O(\varepsilon^2)$ al passo 2, $O(\varepsilon^3)$ al passo 3, $O(\varepsilon^4)$ al quarto -

Inizialmente, si pensava fosse necessario il metodo quadratico per cui le generazioni sono $O(\varepsilon)$ al passo 1, $O(\varepsilon^2)$ al passo 2, $O(\varepsilon^4)$ al passo 3, ..., $O(\varepsilon^{2^{i-1}})$ al passo i .
Il "metodo classico" si dice essere convergente se si studia accuratamente l'accumulo dei

piccioli divisori -

Ad ogni passo def. $\alpha_z = \min_{0 < |k| \leq zK} |k \cdot \underline{w}|$

(es. se $\underline{w}$ è diop. allora $\alpha_z \geq \frac{\gamma}{(zK)^2}$)

Mostriamo la non-convergenza del Birkhoff

Termini da eliminare

Generatrici

passo 1

$\rho^{(0)}$
 $\downarrow$
 f_1

$$\|x_1\| \leq \frac{\|\rho^{(0)}\|}{\alpha_1}$$

u 2

$\rho^{(1)}$
 $f_2 \rightarrow L_{x_1} \rho^{(0)}$
 $\downarrow$
 f_1

$$\|x_2\| \leq \frac{\|\rho^{(0)}\|}{\alpha_1 \alpha_2}$$

u z

$\rho^{(z-1)}$
 $f_z \rightarrow L_{x_{z-1}} \rho^{(0)}$
 $\downarrow$
 f_1

$$\|x_z\| \leq \frac{\text{cost.}}{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_z)}$$

Questo spiega perché $\|\chi_2\| \lesssim \frac{\text{costanti}}{(z!)^2}$

$$\Rightarrow \sup_{(\bar{z}, \underline{z}) \in B_\rho(0)} |\chi_2'(\bar{z}, \underline{z})| \lesssim \text{costanti} (z! \rho^2)^{j^2} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$



Nel KAN si può fare molto
meglio la stima, perché nella
forma generale tutti i termini
di grado 0 e 1 in $\mathbb{F}$ e di ordine $O(\varepsilon^j)$ con
 $j=1, \dots, 2-1$ sono nulli.

Concentriamoci sull'accumulo dei pic-div.
per le $\chi_2^{(z)}$. Esse ris. eq. analitiche sono del tipo

$$\chi_2^{(z)} = \sum_{0 < |\underline{k}| \leq 2K, ||\underline{j}||=1} \sum_{\underline{k}} c_{\underline{k}} \frac{P_{\underline{j}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{z})}{i \underline{k} \cdot \underline{w}}$$

su. in serie
di Taylor-Taylor
di $f_1^{(z)}(z)$

Oss. 1: $\chi_2^{(z)} \in \mathcal{P}_{1, 2K} \Rightarrow \forall \hat{f}_e^{(z,s)} \in \mathcal{P}_{e,sK}$ si ha che
 $L_{\chi_2^{(z)}} \hat{f}_e^{(z,s)} \in \mathcal{P}_{e, (2+s)K} \Rightarrow \hat{f}_e^{(z, z+s)} \Leftrightarrow L_{\chi_2^{(z)}} \hat{f}_e^{(z,s)}$

$\Rightarrow$ Oss. 2: nel caso $\ell=1$, $\Rightarrow \hat{f}_1^{(z, z+s)} \Leftrightarrow L_{\chi_2^{(z)}} \hat{f}_1^{(z, z+s)}$
 con $z+s \geq 2z$ -

$$\text{Oss. 3: } \left\| \rho^{(z, z+s)} \right\|_{f_1} \left\| \chi_2^{(z)} \right\|_{f_1} \left\| \hat{\rho}^{(z, z+s)} \right\|_{f_1} \leq \frac{2e}{(d_2 - d_{2-1})^2 \rho_0} \left\| \chi_2^{(z)} \right\|_{f_1} \left\| \hat{\rho}^{(z, z+s)} \right\|_{f_1}$$

con d_2 che regola lo scorcio, dove es. $\sim O(1/4)$
 t.c. $d_2 < 1$, $d_2 = (d_1 - d_0) + (d_2 - d_1) + \dots + (d_2 - d_{2-1})$

↑
 scorcio
 al primo passo

↑
 al passo #2

↑
 al passo #2

ad. es. si può $d_2 - d_{2-1} = c \frac{1}{2^2}$ con c t.c.

$$c \sum_{2 \geq 1} \frac{1}{2^2} = 1/4$$

→ Studiare l'accumulo dei piccoli divisori
 in modo simile o quanto fatto x il Birkhoff.

passo 1

Termini da eliminare
 $\hat{p}^{(0,1)}_1$

Geometrici
 $\| \chi^{(1)}_2 \| \lesssim \frac{\| \hat{p}^{(0,1)}_1 \|}{\alpha_1}$

passo 2

$L_{\chi^{(1)}_2} \hat{p}^{(1,1)}_1 \simeq \frac{\text{cost.}}{\alpha_1 (d_1 - d_0)^2} \rightarrow \| \chi^{(2)}_2 \| \lesssim \frac{1 \text{ Cost.}}{\alpha_1 \cdot d_2}$

passo 4

$L_{\chi^{(2)}_2} \hat{p}^{(2,2)}_1 \simeq \frac{\text{cost.}}{\alpha_1^2 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)^2} \rightarrow \| \chi^{(4)}_2 \| \lesssim \frac{2^4 \text{ Cost}}{\alpha_1^2 \cdot d_2 \cdot d_4}$

$O(\epsilon^4)$

passo 8

$O(\epsilon^8)$

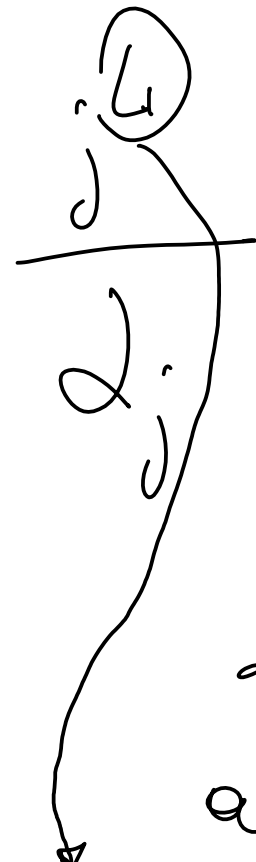
$L_{\chi^{(4)}_2} \hat{p}^{(4,4)}_1 \simeq \frac{\text{cost.}}{\alpha_1^4 \cdot d_2^2 \cdot d_4 \cdot (d_2 - d_1)^4 \cdot (d_4 - d_3)^2}$

$\| \chi^{(8)}_2 \| \lesssim \frac{\text{Cost.}}{(\alpha_8 (d_4 - d_3) \alpha_1^4 \cdot d_2^2 \cdot d_4 \cdot (d_2 - d_1)^4)}$

In modo meno rozzo si riesce a mostrare che

$$\| \chi_2^{(2)} \| \leq_{\text{cost.}} \prod_{j \in S_j} \dots$$

insieme di indici



con S_j t.c.

i, j compresi tra

2^{k-1} e $2^k - 1$ sono

al più $2^{\lfloor \frac{2}{2^k} \rfloor} \forall k$

$$\| \chi_2^{(2)} \| \leq_{\text{cost.}} \prod_{k \geq 1} \left(\frac{2^{4k}}{\alpha_{2^k}} \right)^{2^{\lfloor \frac{2}{2^k} \rfloor}}$$

$$\leq_{\text{cost.}} \prod_{k \geq 1} \left(2^{k(1+4)} \right)^{2^{\lfloor \frac{2}{2^k} \rfloor}}$$

Calcoliamo il $\log_2 \prod_{k \geq 1} \left(2^{k(\tau+4)} \right)^{2^{-k/2}}$

$$\leq 2 \sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k} \leq 16(\tau+4)$$

$$\| \chi_2^{(z)} \| \leq \text{cost} \cdot \left(2^{16(\tau+4)} \right)^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 \| \chi_2^{(z)} \| \leq a^2 \quad \text{con } a < 1 \text{ se } \varepsilon \text{ picc. abbastanza}$$

Analisi in frequenza (Laskar dagli '80)
in poi

Obiettivo: caratterizzare le leggi del
moto quasi-periodiche

Def.: Si dice che una legge del moto $t \mapsto f(t)$ (conf. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
quasi-periodica se $\exists g: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^m$ (t.c. -
 $\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0 \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$) t.c. -

$$f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Def.: Si dice che una legge del moto quasi-periodica è a decadimento esponenziale se (conf. alla def. precedente) la funz.

g è t.c. - $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{\vartheta}}$ e $\mathcal{F}A, \sigma \in \mathbb{R}_+$
 t.c. $|c_{\underline{k}}| \leq A e^{-|\underline{k}| \sigma}$

Oss. g è analitica -

Oss. Si consideri una legge del moto
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ dove $(p(t), q(t)) = \mathcal{C}(\underline{P} = \underline{0}, \underline{Q} = \underline{ut})$
 dove $\mathcal{C}$ è una transf. canonica corrisp. alla
 forma normale di Kolmogorov, allora
 $t \mapsto (p(t), q(t))$ è quasi-periodica a decadimento
 esponenziale