

Problema di due rotatori posti in verticale
(con $g = O(\varepsilon)$) e debolmente accoppiati (con $k = O(\varepsilon)$)

Lagrangiana

$$L = T - U \quad \text{con } T = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

dove $I = m R^2$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) - mgR (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) - k R^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

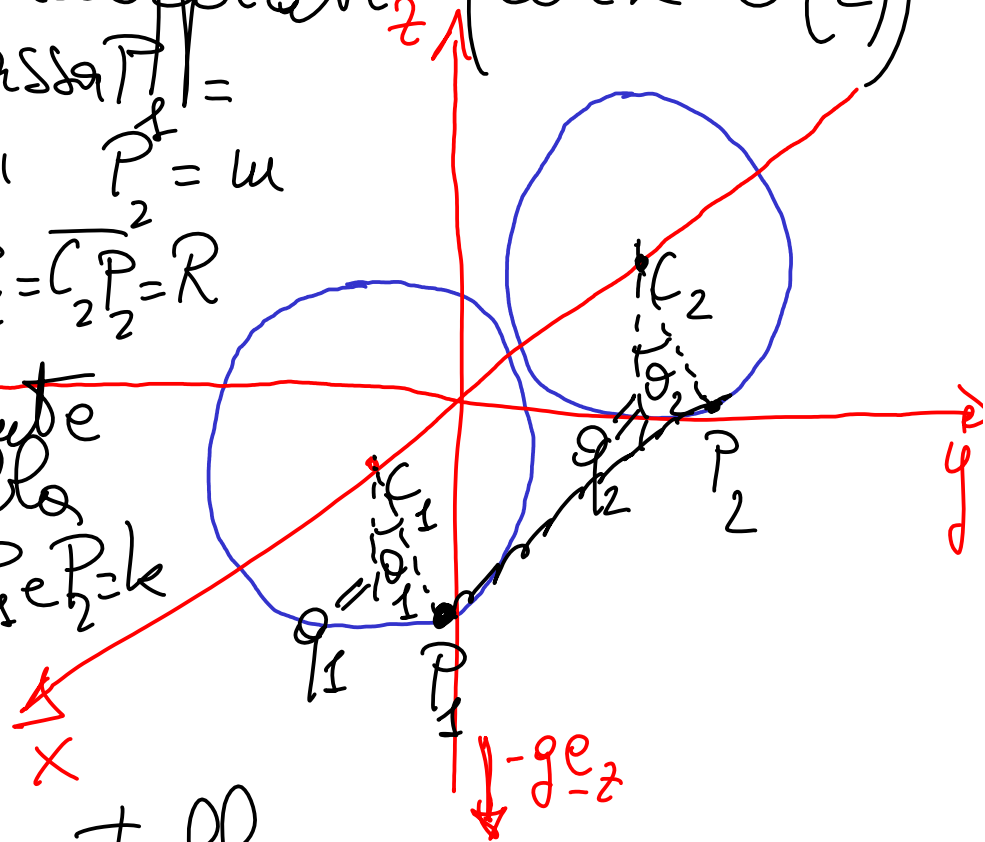
$$H(\mathbb{T}, \mathbb{T}) = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \varepsilon U(\vartheta_1, \vartheta_2) \quad \text{proviamo a sviluppare la parte integrabile attorno al toro}$$

massa $m = 1$
" $P_i = m$

$$\overline{C_1 P_1} = \overline{C_2 P_2} = R$$

costante
molle
tra P_1 e $P_2 = k$

da controllare



caratterizzato dalle velocità angolari (ω_1, ω_2) del moto quasi-periodico che vogliamo studiare.

A questo scopo, poniamo $P_1 = P_1 + P_1^*$, $P_2 = P_2 + P_2^*$, $q_1 = Q_1$, $q_2 = Q_2$, dove (P_1^*, P_2^*) sono costanti (incognite) il cui valore è da determinare in modo t.c.

Costanti additive che non influenzano il moto

$$\frac{1}{2I} \left[(P_1 + P_1^*)^2 + (P_2 + P_2^*)^2 \right] = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{P_1^*}{I_1} P_1 + \frac{P_2^*}{I_2} P_2 + \frac{1}{2I} (P_1^{*2} + P_2^{*2})$$

Imponiamo che valga questa uguaglianza

$$\Rightarrow \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \text{cost.}$$

I valori delle traslazioni sulle origini delle azioni sono t.c. $P_1^* = I_1 \omega_1$, $P_2^* = I_2 \omega_2$

Con abuso di notazione, rinominiamo (P, Q) come (p, q) .
 la nostra ham. iniziale (che descrive il problema) è quindi

$$H^{(0)}(p, q) = \frac{\omega}{2} p + \frac{1}{2I} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4} R (\cos q_1 + \cos q_2) - k R \cos(q_1 - q_2)$$

parte integrabile, è $O(1)$

parte perturbativa (dip. da q)
 è $O(\epsilon)$

Ricorriamo al seguente "schema grafico"

ordine di grandezza (associato al grado di perturbazione):

	$O(1)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon^2)$
$O(\ p\ ^2)$	$p^{(0,0)}$	$\vdots$	$\vdots$
$O(\ p\)$	p_2	$\vdots$	$\vdots$
$O(1)$	$\frac{\omega}{2} p$	$\vdots$	$\vdots$
	0	$\vdots$	$\vdots$

passo di normalizzazione:

grado pol. in p

esempio $K=2$

$p \in \mathcal{P}_{e,sk}$ con $k \in \mathbb{N}$

cioè $p^{(z,s)}(p, q) = \sum_{|j|=p} \sum_{|k| \leq sk} c_{j,k} p^j e^{ik \cdot q}$

Descrizione del primo passo di normalizzazione

termini da eliminare per portare la Hamiltoniana in forma norm. di Holmboe

Lemma: Siano $f \in \mathcal{P}_{e,sk}$, $g \in \mathcal{P}_{e',s'k}$, dove
 $e, s, e', s', k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, allora $\{f, g\} \in \mathcal{P}_{e+e'-1, (s+s')k}$

Dim.: Siano $f = \sum_{|\underline{j}|=e} \sum_{|\underline{k}| \leq sk} c_{\underline{j}, \underline{k}} \mathcal{P}_{\underline{j}}^{\underline{k}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$ e

$g = \sum_{|\underline{j}'|=e'} \sum_{|\underline{k}'| \leq s'k} c'_{\underline{j}', \underline{k}'} \mathcal{P}_{\underline{j}'}^{\underline{k}'} \exp(i \underline{k}' \cdot \underline{q})$

$$\Rightarrow \{f, g\} = \sum_{|\underline{j}|=e} \sum_{|\underline{j}'|=e'} \sum_{|\underline{k}| \leq sk} \sum_{|\underline{k}'| \leq s'k} \sum_{m=1}^n \frac{i k_m j'_m - i k'_m j_m}{\mathcal{P}_m} \mathcal{P}_{\underline{j}+\underline{j}'}^{\underline{k}+\underline{k}'} \exp(i(\underline{k}+\underline{k}') \cdot \underline{q})$$

$$\in P_{e+e'-1, (s+s')K} \quad \left(\text{poiché } |\underline{j} + \underline{j}'| = |\underline{j}| + |\underline{j}'| \right. \\ \left. \text{e } |\underline{k} + \underline{k}'| \leq |\underline{k}| + |\underline{k}'| \leq (s+s')K \right) \\ \text{C.V.D.}$$

Primo "mezzo-passo" di normalizzazione

Cerchiamo di determinare $X^{(1)}(\underline{q})$ t.c. - risolve
l'eq. omologica $\varepsilon L_{X^{(1)}} \omega \cdot \underline{f} + \varepsilon f_0^{(0,1)}(\underline{q}) = 0$, ← costanti

cioè $\left\{ \underline{\omega} \cdot \underline{f}, X^{(1)}(\underline{q}) \right\} = -f_0^{(0,1)}(\underline{q}) = -\sum_{|\underline{k}| \leq K} C_{\underline{k}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$

Poiiamo $X^{(1)}(\underline{q}) = \sum_{0 < |\underline{k}| \leq K} \underline{x}_{\underline{k}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$ incognite t.c.

$$\sum_{\underline{k} \neq 0} \sum_{m=1}^n -i\omega_m \cdot k_m X_{\underline{k}} \exp(i\underline{k} \cdot \underline{q}) = \sum_{0 < |\underline{k}| \leq K} -C_{\underline{k}} \exp(i\underline{k} \cdot \underline{q})$$

$$\forall \underline{k} \text{ t.c. } 0 < |\underline{k}| \leq K \Rightarrow i\underline{k} \cdot \underline{\omega} X_{\underline{k}} = C_{\underline{k}} \rightarrow X_{\underline{k}} = \frac{C_{\underline{k}}}{i\underline{k} \cdot \underline{\omega}}$$

$$\Rightarrow X^{(1)} \in \mathcal{P}_{0,K}$$

piccolo divisore

Definiamo $H^{(1)} = \exp \varepsilon L_{X^{(1)}} H^{(0)} = \exp \varepsilon L_{X^{(1)}} \left(\underline{\omega} \cdot \underline{p} + \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \varepsilon \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,1)} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,2)} + \dots \right)$

$$= \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \varepsilon L_{X^{(1)}} \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \varepsilon L_{X^{(1)}} \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \varepsilon^2 L_{X^{(1)}} \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \dots$$

$$= \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \varepsilon \frac{1}{2} \rho_{(0,1)}^{(0,1)} + \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \varepsilon L_{X^{(1)}} \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \varepsilon^2 L_{X^{(1)}} \frac{1}{2} \rho_{(0,0)}^{(0,0)} + \dots$$

per l'eq. omologica

$\in \mathcal{P}_{1,K}$ $\in \mathcal{P}_{0,2K}$

In rapp. grafica abbiamo

$$\hat{H}^{(1)} = \sum \left| \begin{array}{cccc} \mathcal{O}(\|F\|^2) & \hat{p}_2^{(1,0)}(F) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \mathcal{O}(\|F\|) & \underline{w} \cdot F & \varepsilon \hat{p}_1^{(1,1)} & 0 & 0 & \dots \\ \mathcal{O}(1) & 0 & 0 & \varepsilon^2 \hat{p}_2^{(1,2)} & 0 & \dots \\ \hline & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\varepsilon) & \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \dots \end{array} \right|$$

date $\hat{p}_e^{(1,s)} \in \mathcal{P}$

Oss. che $\langle \hat{p}_1^{(1,1)} \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dq_1 \dots dq_n \hat{p}_1^{(1,1)}$

$\Rightarrow \{ \hat{p}_2^{(0,0)}, \chi \} = \sum_{u=1}^n \sum_{|j|=2} \sum_{|k| \leq K} \hat{i}_{jk}^{(u)} \hat{c}_j \hat{c}_k \exp i k \cdot q$

$\hat{i}_{jk}^{(u)} = 0$ quando $k=0$

$$\Rightarrow \langle \hat{f}_1^{(1,1)} \rangle = \langle \{ \hat{p}^{(0,0)}, X \} \rangle = 0$$

Secondo mezzo passo del primo passo di work.

Risolviame l'eq. omologica $\varepsilon L_{\chi_2^{(1)}} \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \varepsilon \hat{f}_1^{(1,1)} = 0$

Sia $\chi_2^{(1)} = \sum_{|\underline{j}|=1} \sum_{\underline{k}} \underbrace{y_{\underline{j},\underline{k}}}_{\text{incognite}} \underline{p}^{\underline{j}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$, sappiamo

eliminare $\hat{f}_1^{(1,1)} = \sum_{|\underline{j}|=1} \sum_{|\underline{k}| \leq K} c_{\underline{j},\underline{k}} \underline{p}^{\underline{j}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$

$$\{ \underline{\omega} \cdot \underline{p}, \chi_2^{(1)} \} = \sum_{|\underline{j}|=1} \sum_{\underline{k}} \sum_{m=1}^n -i \omega_m k_m y_{\underline{j},\underline{k}} \underline{p}^{\underline{j}} \exp i \underline{k} \cdot \underline{q}$$

$$\Rightarrow \forall \underline{k} \text{ t.c. } 0 < |\underline{k}| \leq K \quad -i\underline{k} \cdot \underline{\omega} \underline{y}_{\underline{j}, \underline{k}} = -c_{\underline{j}, \underline{k}} \Rightarrow \underline{y}_{\underline{j}, \underline{k}} = \frac{c_{\underline{j}, \underline{k}}}{i\underline{k} \cdot \underline{\omega}}$$

$$\Rightarrow \chi_2^{(s)}(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{|\underline{j}|=1} \sum_{0 < |\underline{k}| \leq K} \frac{c_{\underline{j}, \underline{k}}}{i\underline{k} \cdot \underline{\omega}} \underline{p}^{\underline{j}} \exp i\underline{k} \cdot \underline{q}$$

percolo
divisore

Definiamo $\hat{H}^{(s)} = \exp(\varepsilon L_{\chi_2^{(s)}}) \hat{H}^{(s)} =$

$$= \exp(\varepsilon L_{\chi_2^{(s)}}) \left(\underline{\omega} \cdot \underline{p} + \hat{p}_2^{(1,0)} + \varepsilon \hat{p}_1^{(1,1)} + \varepsilon^2 \hat{p}_0^{(1,2)} \right)$$

$\Rightarrow$ abbiamo uno sviluppo infinito in ε e s.

$$\exp(\varepsilon L_{\chi_2^{(s)}}) \varepsilon \hat{p}_1^{(1,1)} = \varepsilon \hat{p}_1^{(1,1)} + \varepsilon^2 \left\{ \hat{p}_1^{(1,1)}, \chi_2^{(s)} \right\} + \frac{\varepsilon^3}{2} \left\{ \left\{ \hat{p}_1^{(1,1)}, \chi_2^{(s)} \right\}, \chi_2^{(s)} \right\} + \dots$$

$\in \mathcal{P}_{1,K} \quad \quad \quad \in \mathcal{P}_{1,2K} \quad \quad \quad \in \mathcal{P}_{1,3K}$

Nello schema grafico

Vollo Schema grafisch

$$H^{(1)} = \sum \frac{\begin{array}{c} \mathcal{O}(\|f\|^2) \\ \mathcal{O}(\|f\|) \\ \mathcal{O}(1) \end{array}}{\mathcal{O}(1)} \cdot \begin{array}{c} \rho^{(1,0)} \\ \omega \cdot f \\ 0 \end{array} - \begin{array}{c} \varepsilon \rho^{(1,1)} \\ 0 \\ 0 \end{array} - \begin{array}{c} \varepsilon^2 \rho^{(1,2)} \\ \varepsilon \rho^{(1,2)} \\ \varepsilon^2 \rho^{(1,2)} \end{array} - \begin{array}{c} \varepsilon^3 \rho^{(1,3)} \\ \varepsilon^3 \rho^{(1,3)} \\ \varepsilon^3 \rho^{(1,3)} \end{array} - \dots$$

$\mathcal{O}(1) \quad \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

Si verifica facilmente che $\varepsilon_{fe}^{s, (1, s)} \in \mathcal{P}_{e, sK}$
 Generico 2-esimo passo di normalizzazione

- Pieno mezzo

[illegible]

Eq. omologica $\varepsilon^2 L_{X^{(2)}} \underline{\omega} \cdot \underline{f} + \varepsilon^2 f_0 = \varepsilon \langle f_0 \rangle$

si risolve come al primo passo e

otteniamo $X^{(2)} = \sum_{0 < |k| \leq 2K} \frac{c_k}{i \underline{k} \cdot \underline{\omega}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$

piccolo divisore

sviluppo di $f_0^{(2,2,z)}$

Definiamo $\hat{H}^{(2)} = \exp \varepsilon^2 L_{X_1^{(2)}} H^{(2-1)}$

dove $X_1^{(2)}(\underline{q}) = X^{(2)}(\underline{q}) + \sum \dots \cdot \underline{q}$

dove il secondo termine trasforma le azioni in modo da tenere $\underline{\omega}$ costante!

In generale $\varepsilon^2 \left\langle f_1^{(z-1,2)} \right\rangle = \varepsilon^2(\Delta \omega) \cdot f \neq 0$

$\uparrow$
 vettore $\in \mathbb{R}^4$

Poniamo $\underline{\xi}^{(z)} \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$\varepsilon^2 \left\langle \underline{\xi}^{(z)} \cdot \underline{g} \right\rangle f_2^{(z-1,0)} + \varepsilon^2 \left\langle f_1^{(z-1,2)} \right\rangle = 0$$

matrice $n \times n$ lineare
simmetrica

$$\varepsilon^2 \left\langle f_2^{(z-1,0)}, \underline{\xi}^{(z)} \cdot \underline{g} \right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \frac{1}{2} f \cdot C f, \underline{\xi}^{(z)} \cdot \underline{g} \right\rangle = -\varepsilon^2 C \underline{\xi}^{(z)}$$

$$\Rightarrow C \underline{\xi}^{(z)} = \Delta \omega \Rightarrow \underline{\xi}^{(z)} = C^{-1} \Delta \omega$$

deve essere invertibile $C = \text{Hess} \left(f_2^{(0,0)} \right)$,

Fasso

$$\hat{H}^{(2)}$$

$$= 1$$

[illegible]

also $H^{\wedge}(z) = \exp \varepsilon L_{\chi(z)} H^{(z-1)}$

$$e \langle f_1 \rangle = 0$$

~~Patched~~

Secondo mezzo passo ^{della z-esimonia} di normalizzazione.

$$\text{Eq. analogica } \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} \underline{\omega} \cdot \underline{p} + \varepsilon^2 \hat{p}_1^{(z-1, z)} = 0$$

Si risolve esattamente come quando $z=1$

$$\text{Definiamo } H^{(z)} = \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} H^{(z-1)} = \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z)}} \exp \varepsilon^2 L_{\chi^{(z-1)}} H^{(z-2)}$$

- Schema di rappresentazione grafica di

$$H^{(z)} = \sum_{\substack{O(p) \\ O(\varepsilon)}} O(p) \underline{\omega} \cdot \underline{p} \quad \begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} O(p) \\ \downarrow \\ O(\varepsilon) \end{array} & \begin{array}{c} p^{(z,0)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(z,1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} p^{(z,z-1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(z,z)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p^{(z,z+1)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \\ \varepsilon^2 \downarrow \end{array} \end{array}$$

Oss.: $H^{(z)}$ è in forma normale di Kolmogorov fino a termini $O(\varepsilon^z)$ (compresi).
 Il teorema KAM può essere dimostrato verificando che $H^{(z)} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} K$ (in forma normale di Kolmogorov)

Teorema (KAM): Sia $H(\underline{p}, \underline{q}; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(\underline{p}, \underline{q})$

con $H_0(\underline{p})$ della forma $H_0 = \underline{\omega} \cdot \underline{p} + O(\|\underline{p}\|^2)$, t.c.

è analitica $G_r \times T_\tau \times B_\rho(0)$ e con norma di Fourier pesata finita e inoltre

- $\underline{\omega}$ dissonante $|\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \geq \frac{\gamma}{|\underline{k}|^\tau}$ per qualche $\gamma > 0, \tau \geq n-1$

- $\det(\text{Hess } H_0) \neq 0 \quad \forall \underline{p} \in G_r$
- $|\varepsilon| < \varepsilon^*(H, r, \tau, \gamma, \rho)$

Allora $\exists$ una transf. ^{analitica} canonica $(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{C}_\varepsilon(\underline{P}, \underline{Q})$

t.c. $H(\mathcal{C}_\varepsilon(\underline{P}, \underline{Q})) = \underline{\omega} \cdot \underline{P} + O(\|\underline{P}\|^2)$ e $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathbb{I} + O(\varepsilon)$.

valore di soglia