

Vale quindi anche il

Teorema [di scambio]: Sia f una funzione dinamica allora

$$f(P, q) \Big|_{\substack{P = \exp(\varepsilon L_\chi) \bar{P} \\ q = \exp(\varepsilon L_\chi) \bar{q}}} = \exp(\varepsilon L_\chi) f(P, q) \Big|_{(P, q) = (\bar{P}, \bar{q})}$$

Esempi: ① traslazione delle azioni $\chi(q) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \cdot q_i$ $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^N$, costante

$$\exp(\varepsilon L_{\chi(q)}) q = q + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_{\chi}^{j-1} \left\{ q, \sum_{i=1}^N \varepsilon_i q_i \right\} = q$$

$$\forall i, n \quad \exp(\varepsilon L_{\chi(q)}) P_i = P_i + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_{\chi}^{j-1} \underbrace{\left\{ P_i, \sum_{q \in \mathcal{Q}} q \right\}}_{\text{constante}} =$$

$$\Rightarrow \exp(\epsilon_{\chi(a)}) P = P - \epsilon_{\chi(a)} \psi$$

② $X = X(g)$ funzione tipomorfica

$$\Rightarrow \exp(\varepsilon L_{X(q)}) q = q, \quad \exp(\varepsilon L_{X(q)}) p = p + \varepsilon \{p, X(q)\}$$

$$\text{hence } \{p_i, X(q)\} = -\frac{\partial}{\partial q_i} X(q)$$

Def.: Si dice norma di Fourier pesata

su $D_{p,\sigma} = G_p \times T_\sigma^n$, la seguente

$$\|f\|_{(p,\sigma)} := \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup_{P \in G_p} |c_{\underline{k}}(P)| \cdot e^{|\underline{k}| \sigma}$$

dove $f(P, q) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}}(P) e^{i \underline{k} \cdot q}$

$\uparrow$
 $= |\underline{k}| = |k_1| + \dots + |k_n|$

Prop.: Sia f analitica in $D_{p,\sigma}$ e t.c. $\|f\|_{(p,\sigma)} \leq +\infty$,

allora $\forall j=1, \dots, n$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial P_j} \right\|_{(1-d)(p,\sigma)} \leq \frac{\|f\|_{(p,\sigma)}}{d p}, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial q_j} \right\|_{(1-d)(p,\sigma)} \leq \frac{\|f\|_{(p,\sigma)}}{d \sigma}$$

e $\forall d \in (0,1)$ si ha che:

Prop. (1): Siano g, f analitiche in $D_{(p, \sigma)}$ e $D_{(1-d')}(p, \sigma)$
 con $\|f\|_{(1-d')}(p, \sigma)$ e $\|g\|_{(p, \sigma)}$ finite, allora
 $\forall d, d' \text{ t.c. } d+d' < 1$

$$\| \{f, g\} \|_{(1-d-d')}(p, \sigma) \leq \frac{2 \|f\|_{(1-d')}(p, \sigma) \|g\|_{(p, \sigma)}}{e^{-d \cdot (d+d') p \sigma}}$$

Dim.: Siano $f(\underline{t}, \underline{q}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}}(\underline{t}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}}$,
 $g(\underline{t}, \underline{q}) = \sum_{\underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} c'_{\underline{k}'}(\underline{t}) e^{i \underline{k}' \cdot \underline{q}}$ gli sviluppi in
 serie di Fourier di f e g .

$$\| \{f, g\} \|_{(1-d'-d)} \leq \sum_{\underline{k}, \underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{|\underline{k}_j|}{(d+d')^p} + \frac{|\underline{k}'_j|}{d^p} \right) \sup_{\substack{p \in \mathcal{G} \\ |p| = (1-d)^p}} |c_{\underline{k}}(p)| \sup_{\substack{p \in \mathcal{G} \\ |p| = d^p}} |c'_{\underline{k}'}(p)| e^{(1-d-d')(|\underline{k}|+|\underline{k}'|)\sigma}$$

applichi-
chiamo
ai termini
nei riquadri rossi
la disuguaglianza
sottolineata (in rosso)
alla fine di 2 righe sopra

$$\leq \sum_{\underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_p} |c'_{\underline{k}'}(p)| e^{|\underline{k}'|\sigma} \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_{(1-d)^p}} |c_{\underline{k}}(p)| \frac{e^{-|\underline{k}|d\sigma}}{(d'+d)^p} e^{(1-d')|\underline{k}|\sigma}$$

$$+ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_{(1-d')^p}} |c_{\underline{k}}(p)| e^{|\underline{k}|(1-d')\sigma} \sum_{\underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_p} |c'_{\underline{k}'}(p)| \cdot \frac{e^{-|\underline{k}'|(d+d')\sigma}}{d^p} e^{|\underline{k}'|\sigma}$$

e così otte-
nio le mappe
razionali dei coef-
ficienti moltip-
licativi rap-
presentati in rosso
a fine delle 2 righe

$$\leq \sum_{\underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_p} |c'_{\underline{k}'}(p)| e^{|\underline{k}'|\sigma} \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_{(1-d)^p}} |c_{\underline{k}}(p)| \frac{e^{(1-d')|\underline{k}|\sigma}}{(d'+d)^p} \cdot \frac{1}{e^{d\sigma}}$$

$$+ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_{(1-d')^p}} |c_{\underline{k}}(p)| e^{|\underline{k}|(1-d')\sigma} \sum_{\underline{k}' \in \mathbb{Z}^n} \sup_{p \in \mathcal{G}_p} |c'_{\underline{k}'}(p)| \frac{e^{|\underline{k}'|\sigma}}{d^p} \cdot \frac{1}{e^{(d+d')\sigma}}$$

$$\leq \frac{2}{e(d+d')d\rho\sigma} \|f\|_{(1-d')(\rho,\sigma)} \|g\|_{(\rho,\sigma)} \quad \text{C.V.D.}$$

Ricordiamo che $\exp L_\chi = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} L_\chi^j$.

Prop. (2): Siano f, χ 2 funz. analitiche in $\mathcal{D}_{\rho,\sigma} = G_\rho \times T_\sigma^n$
 t.c. $\|f\|_{(\rho,\sigma)}$ e $\|\chi\|_{(\rho,\sigma)}$ sono finite, allora $\forall j \geq 1$ e $\forall \Delta \in \mathcal{A}_1$

$$\text{si ha che } \left\| \frac{1}{j!} L_\chi^j f \right\|_{(1-\Delta)(\rho,\sigma)} \leq \left(\frac{2e}{\Delta^2 \rho \sigma} \|\chi\|_{(\rho,\sigma)} \right)^j \|f\|_{(\rho,\sigma)}$$

Dim.: $\forall \frac{s=1, \dots, j}{d=\Delta/j}$ applichiamo la Prop. (1) con
 $d=\Delta/j$ e $d+d'=\frac{\Delta}{j} \cdot s$, cioè $d'=\frac{s-1}{j}\Delta$, cioè applichiamo

$$\| \{f, g\} \|_{(1-d'-d)(p, \sigma)} \leq \frac{2 \|f\|_{(1-d')(p, \sigma)} \|g\|_{(p, \sigma)}}{e^{d \cdot (d+d') p \sigma}}$$

con $g = \chi$ e $f \in L_x^{s-1} p$, quindi

$$\| L_x^s p \|_{(1-\frac{s}{j}\Delta)(p, \sigma)} \leq \frac{2 \| L_x^{s-1} p \|_{(1-\frac{s-1}{j}\Delta)(p, \sigma)} \|\chi\|_{(p, \sigma)}}{e^{\frac{\Delta}{j} \cdot \frac{\Delta}{j} \cdot s p \sigma}}$$

Applicando
 con $f \in L_x^{s-2} p$
 $d' = \frac{s-2}{j}\Delta, d = \frac{\Delta}{j}$

$$\leq \frac{2j^2}{e^{\Delta^2 \cdot s \cdot p \sigma}} \frac{2 \| L_x^{s-2} p \|_{(1-\frac{s-2}{j}\Delta)(p, \sigma)} \|\chi\|_{(p, \sigma)}}{e^{\frac{\Delta}{j} \cdot \frac{\Delta}{j} (s-1) p \sigma}}$$

$$\leq \dots \leq \left(\frac{2j^2}{e^{\Delta^2 p \sigma}} \right)^j \cdot \frac{1}{s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot 1} \left(\|\chi\|_{(p, \sigma)} \right)^j \|p\|_{(p, \sigma)}$$

Nel caso con $s=j$, otteniamo

$$\frac{1}{j!} \|L_x^j f\|_{(1-\Delta)(p,\sigma)} \leq \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{2j^2 \|X\|_{(p,\sigma)}}{e \Delta^2 \rho \sigma} \right)^j \|f\|_{(p,\sigma)} \right)$$

Stirling,
cioè $j! \leq j! e^j$

$$\leq \left(\frac{j! e^j}{j!} \right)^2 \left(\frac{2 \|X\|_{(p,\sigma)}}{e \Delta^2 \rho \sigma} \right)^j \|f\|_{(p,\sigma)}$$

$$\leq \left(\frac{2 e^2 \|X\|_{(p,\sigma)}}{e \Delta^2 \rho \sigma} \right)^j \|f\|_{(p,\sigma)} \quad \text{C.V.D.}$$

Proposizione: Siano X analitico su $\mathcal{D}_{(p,\sigma)}$ e $d \in (0, \frac{1}{2})$
t.c. $\frac{2e \|X\|_{(p,\sigma)}}{d^2 \rho \sigma} \leq \frac{1}{2}$, allora $\mathcal{C}(f, g) = \exp L_X(f, g)$

è una transf. analitica e canonica su $D_{(1-d)}(P, \sigma)$.

Inoltre $\mathcal{C}(D_{(1-d)}(P, \sigma)) \subset D_{(P, \sigma)}$ e vale il
th. di scambio $\forall f$ analitica su $D_{(P, \sigma)}$ et.c. $\|f\|_{(P, \sigma)}^{<+\infty}$,
cioè $\forall (\underline{P}, \underline{Q}) \in D_{(1-d)}(P, \sigma)$

$$f(\mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})) = \exp L_{\chi} f|_{(F, \tau) = (\underline{P}, \underline{Q})}$$

Dim.: si procede come per la Prop. (2), cioè

$$\forall i=1, \dots, n \quad \exp L_{\chi} P_i - P_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} L_{\chi}^j P_i$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{j!} L_{\chi}^j P_i \right\|_{(1-d)(P, \sigma)} \leq \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{2j^2 \|\chi\|_{(P, \sigma)}}{ed^2 \sigma} \right)^{j-1} \left\| L_{\chi} P_i \right\|_{(1-d/j)(P, \sigma)} = \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{2j^2 \|\chi\|_{(P, \sigma)}}{ed^2 \sigma} \right)^{j-1} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right\|_{(1-d/j)(P, \sigma)}$$

$$\leq \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{2j^2 \|X\|_{(p,\infty)}}{ed^2 p \sigma} \right)^j \frac{dP}{j} \leq \left(\frac{2e \|X\|_{(p,\infty)}}{d^2 p \sigma} \right)^j dP$$

Stirling

$$\Rightarrow \sup_{D_{(1-d)(p,\infty)}} \sum_{j=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{j!} L_{\chi}^j P_i \right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} dP = dP$$

Analogamente, si procede per $\exp L_{\chi} q_i - q_i$.

C.V.D.

Verso il Teorema KAM

(Kolmogorov 1954, Arnold 1963,
Moser 1962)



Consideriamo il problema generale della
dinamica $H(\underline{p}, \underline{q}; \varepsilon) = h(\underline{p}) + \varepsilon f(\underline{p}, \underline{q}; \varepsilon)$,
immaginiamo che $I(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{L}(\underline{p}, \underline{Q})$ caso
unico t.c. $H(\mathcal{L}(\underline{p}, \underline{Q})) = \mathcal{H}(\underline{p}, \underline{Q}) = \omega \cdot \underline{p} + O(\|\underline{p}\|^2)$
allora è evidente che $\{\underline{p} = 0, \underline{Q} \in \mathbb{T}^n\}$ $\in \mathbb{R}^n$
è invariante rispetto a Φ_H^t e su di esso il moto è quasi-periodico.

Verifica:
$$\begin{cases} \dot{\underline{P}}_j = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j} \Big|_{\underline{P}=\underline{0}} = \mathcal{O}(\|\underline{P}\|^2) \Big|_{\underline{P}=\underline{0}} = 0 \Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{0} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} \Big|_{\underline{P}=\underline{0}} = \omega_j + \mathcal{O}(\|\underline{P}\|) \Big|_{\underline{P}=\underline{0}} = \omega_j \Rightarrow Q(t) = Q(0) + \omega t \end{cases}$$

Per fissare le idee consideriamo
un problema particolare

Oss. (più che un'osservazione è un'anticipazione): anche
se il modello che consideriamo è molto particolare
il procedimento che andiamo a considerare è generale, perché
dopo il primo passo di linearizzazione avremo Ham. con sviluppi di
Fourier infinito negli angoli, ma con decadimento veloce dei coeff.
(che sono limitati da una successione di maggioranti che $\rightarrow 0$ geometricamente), per l'analisi.

Problema di due rotatori posti in verticale
(con $g = O(\varepsilon)$) e debolmente accoppiati (con $k = O(\varepsilon)$)

Lagrangiana

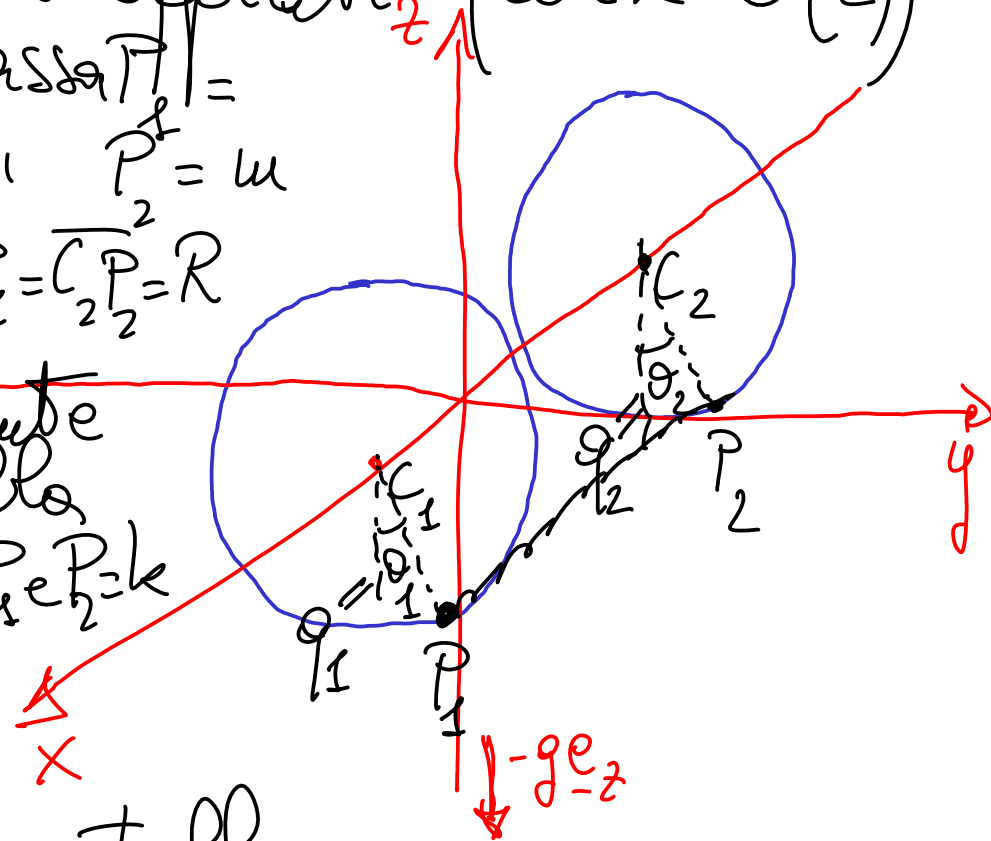
$$L = T - U \quad \text{con } T = \frac{1}{2} I (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2)$$

dove $I = m R^2$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) - m g R (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) - k R^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

massa $m = 1$
" $P = m$
 $\overline{C_1 P_1} = \overline{C_2 P_2} = R$
costante
molle
tra P_1 e $P_2 = k$

da controllare



$$H(\overline{P}, \overline{q}) = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \varepsilon U(\vartheta_1, \vartheta_2) \quad \text{proviamo a sviluppare la parte integrabile attorno al toro}$$

caratterizzato dalle velocità angolari (ω_1, ω_2) del moto quasi-periodico che vogliamo studiare.

A questo scopo, poniamo $P_1 = P_1 + P_1^*$, $P_2 = P_2 + P_2^*$, $q_1 = Q_1$, $q_2 = Q_2$, dove (P_1^*, P_2^*) sono costanti (incognite) il cui valore è da determinare in modo t.c.

Costanti additive che non influenzano il moto

$$\frac{1}{2I} \left[(P_1 + P_1^*)^2 + (P_2 + P_2^*)^2 \right] = \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{P_1^*}{I} P_1 + \frac{P_2^*}{I} P_2 + \frac{1}{2I} (P_1^{*2} + P_2^{*2})$$

Imponiamo che valga questa uguaglianza

$$= \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \text{cost.}$$

I valori delle traslazioni sulle origini delle azioni sono t.c. $P_1^* = I \omega_1$, $P_2^* = I \omega_2$

$$H(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \frac{1}{2I} (P_1^2 + P_2^2) + \\ - m g R (\cos Q_1 + \cos Q_2) - k R^2 \cos(Q_1 - Q_2)$$

Studiamo quindi il problema rappresentato dalla seguente hamiltoniana iniziale

$$H^{(0)}(P, q) = \underline{w} \cdot P + \frac{1}{2} P^2 + \varepsilon f_0(q),$$

dove

$f^{(z,s)}$

passo di normalizzazione

$\leftarrow$ grado polinomiale in P

grado trigonometrico massimo che è al più sK dove $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

s è abbinate anche all'ordine di grandezza in ε .

$p^{(0,s)} \in \mathcal{P}_{e,sk}$ (dove nell'esempio $K=2$), cioè

$$g \in \mathcal{P}_{e,sk} \text{ se } g(\underline{r}, \underline{q}) = \sum_{|\underline{j}|=0} \sum_{|\underline{k}| \leq sk} \overline{c_{\underline{j}\underline{k}}} \underline{r}^{\underline{j}} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{q})$$

Introduciamo lo schema grafico di rappresentazione

$$H^{(0)} = \sum_{\substack{\underline{r} \\ \underline{q}}} \begin{pmatrix} O(|\underline{r}|^2) \\ O(|\underline{r}|) \\ O(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{(0,0)} \\ \underline{w} \cdot \underline{r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0(1) & 0(\varepsilon) & 0(\varepsilon^2) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$